

MATHÉMATIQUES  
&  
APPLICATIONS

Directeurs de la collection :  
G. Allaire et M. Benaïm

63

**MATHÉMATIQUES & APPLICATIONS**  
Comité de Lecture 2008–2011/Editorial Board 2008–2011

RÉMI ABGRALL  
INRIA et Mathématiques, Univ. Bordeaux 1, FR  
abgrall@math.u-bordeaux.fr

GRÉGOIRE ALLAIRE  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
allaire@cmapx.polytechnique.fr

MICHEL BENAÏM  
Mathématiques, Univ. de Neuchâtel, CH  
michel.benaim@unine.ch

OLIVIER CATONI  
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 6, FR  
catoni@ccr.jussieu.fr

THIERRY COLIN  
Mathématiques, Univ. Bordeaux 1, FR  
colin@math.u-bordeaux1.fr

MARIE-CHRISTINE COSTA  
CEDRIC, CNAM informatique, Paris, FR  
costa@cnam.fr

JEAN DELLA-DORA  
LMC, IMAG, Inst. Technology Grenoble, FR  
jean.della-dora@imag.fr

JACQUES DEMONGEOT  
TIMC, IMAG, Univ. Grenoble I, FR  
jacques.demongeot@imag.fr

NICOLE EL KAROUI  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
elkaroui@cmapx.polytechnique.fr

JOSSELIN GARNIER  
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 6 et 7, FR  
garnier@math.jussieu.fr

STÉPHANE GAUBERT  
INRIA, Saclay, Îles-de-France, Orsay et  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
stephane.gaubert@inria.fr

CLAUDE LE BRIS  
CERMICS, ENPC et INRIA  
Marne la Vallée, FR  
lebris@cermics.enpc.fr

CLAUDE LOBRY  
INRA, INRIA, Sophia-Antipolis et  
Analyse Systèmes et Biométrie  
Montpellier, FR  
lobrinria@wanadoo.fr

LAURENT MICLO  
Analyse, Topologie et Proba., Univ. Provence, FR  
miclo@cmi.univ-mrs.fr

VALÉRIE PERRIER  
Mod. et Calcul, ENSIMAG, Grenoble, FR  
valerie.perrier@imag.fr

BERNARD PRUM  
Statist. et Génome, CNRS, INRA, Univ. Evry, FR  
bernard.prum@genopole.cnrs.fr

PHILIPPE ROBERT  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, FR  
philippe.robert@inria.fr

PIERRE ROUCHON  
Automatique et Systèmes, École Mines, Paris, FR  
pierre.rouchon@ensmp.fr

ANNICK SARTENAER  
Mathématiques, Univ. Namur, BE  
annick.sartenaer@fundp.ac.be

ERIC SONNENDRÜCKER  
IRMA, Strasbourg, FR  
sonnen@math.u-strasbg.fr

SYLVAIN SORIN  
Combinat. et Optimisation, Univ. Paris 6, FR  
sorin@math.jussieu.fr

ALAIN TROUVÉ  
CMLA, ENS Cachan, FR  
trouve@cmla.ens-cachan.fr

JEAN PHILIPPE VIAL  
Management Studies, Univ. Geneva, CH  
jean-philippe.vial@hec.unige.ch

CÉDRIC VILLANI  
UMPA, ENS Lyon, FR  
cedric.villani@umpa.ens-lyon.fr

ENRIQUE ZUAZUA  
Matemáticas, Univ. Autónoma Madrid, ES  
enrique.zuazua@uam.es

Directeurs de la collection :  
**G. ALLAIRE et M. BENAÏM**

Instructions aux auteurs :

Les textes ou projets peuvent être soumis directement à l'un des membres du comité de lecture avec copie à G. ALLAIRE OU M. BENAÏM. Les manuscrits devront être remis à l'Éditeur sous format  $\LaTeX$ 2 $\epsilon$  (cf. <ftp://ftp.springer.de/pub/tex/latex/svmonot1/>).

Carlo Gaetan  
Xavier Guyon

# Modélisation et statistique spatiales

 Springer

Carlo Gaetan  
Dipartimento di Statistica  
Università Ca' Foscari Venezia  
San Giobbe, Cannaregio 873  
30121 Venice  
Italy  
gaetan@unive.it

Xavier Guyon  
Centre Pierre Mendès France  
Université Paris 1 et SAMOS  
90 rue de Tolbiac  
75634 Paris Cedex 13  
France  
xavier.guyon@univ-paris1.fr

Library Congress Control Number: 2008924866

---

Mathematics Subject Classification (2000): 13P10, 68Q40, 14Q20, 65F15, 08-0,  
14-01, 68-01

---

ISSN 1154-483X  
ISBN-10 3-540-79225-2 Springer Berlin Heidelberg New York  
ISBN-13 978-3-540-79225-3 Springer Berlin Heidelberg New York

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.  
La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.  
Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement  
de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants  
du Code pénal.

Springer est membre du Springer Science+Business Media  
©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008  
springer.com  
WMXDesign GmbH

Imprimé sur papier non acide 3100/SPi - 5 4 3 2 1 0 -

---

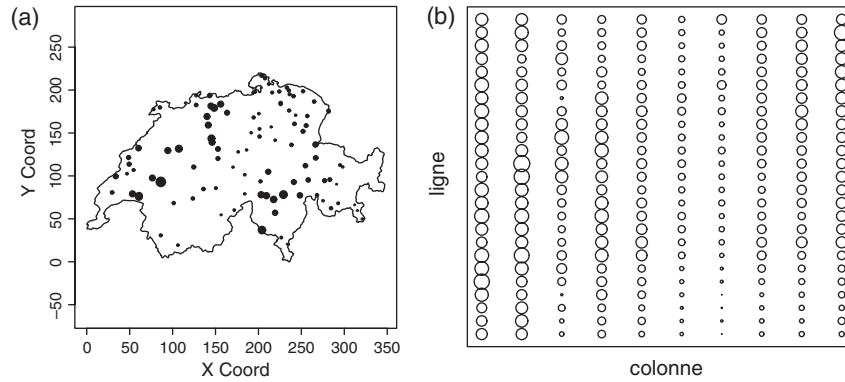
## Préface

La statistique spatiale étudie des phénomènes dont l'observation est un processus aléatoire  $X = \{X_s, s \in S\}$  indexé par un *ensemble spatial*  $S$ ,  $X_s$  appartenant à un espace d'états  $E$ . La localisation d'un site d'observation  $s \in S$  est soit fixée et déterministe, soit aléatoire. Classiquement,  $S$  est un sous-ensemble bidimensionnel,  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ . Mais  $S$  peut aussi être unidimensionnel (chromatographie, essai agronomique en ligne) ou encore être un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  (prospection minière, science du sol, imagerie 3-D). D'autres domaines, ainsi la statistique bayésienne ou la planification des expériences numériques, peuvent faire appel à des espaces  $S$  de dimension  $d \geq 3$ . Notons enfin que l'étude d'une dynamique spatiale ajoute la dimension temporelle au spatial, indexant par exemple l'observation par  $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$  si la dynamique est bidimensionnelle.

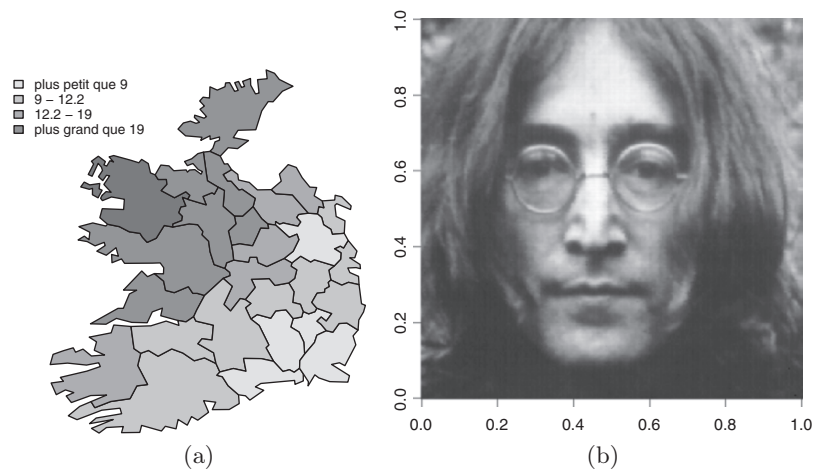
Les méthodes d'analyse spatiale connaissent un développement important du fait d'une forte demande de la part de nombreux domaines d'application tels que l'exploitation minière, les sciences de l'environnement et de la terre, l'écologie et la biologie, la géographie, l'économie spatiale, l'épidémiologie, l'agronomie et la foresterie, le traitement d'image, etc. Cette variété de la "demande" fait la richesse du sujet. A titre d'illustration, nous donnons ci-dessous quelques exemples des trois types de données spatiales qui seront étudiées dans ce livre.

### *Les données géostatistiques*

$S$  est un sous-espace *continu* de  $\mathbb{R}^d$ , le champ  $\{X_s, s \in S\}$  étant observé en  $n$  sites fixés  $\{s_1, \dots, s_n\} \subset S$  et l'espace d'état  $E$  étant réel. C'est le cas des données pluviométriques de la Fig. 1-a, ou encore des données de porosité d'un sol (cf. Fig. 1-b). Les sites d'observation peuvent être disposés régulièrement ou non. La géostatistique aborde, par exemple, les questions de modélisation, d'identification et de séparation des variations à grande et à petite échelle, de prédiction (ou krigeage) en un site non-observé et de reconstruction de  $X$  partout sur  $S$ .



**Fig. 1.** (a) Cumuls pluviométriques sur le réseau météorologique suisse le 8 mai 1986 (passage du nuage de Chernobyl, données `sic` du package `geoR` du logiciel *R* [178]); (b) Porosité d'un sol (données `soil` du package `geoR`). Pour (a) et (b), les dimensions des symboles sont proportionnelles à la valeur  $X_s$ .



**Fig. 2.** (a) Pourcentage d'individus du groupe sanguin A dans les 26 comtés de l'Irlande (données `eire` du package `spdep`); (b) Image de John Lennon ( $256 \times 256$  pixels sur 193 niveaux de gris, données `lennon` du package `fields`).

*Les données latticielles ou données sur un réseau  $S$  fixé*

$S$  est un ensemble *discret fixé* non-aléatoire, généralement  $S \subset \mathbb{R}^d$ , et  $X$  est observé sur  $S$ . Les sites  $s$  peuvent représenter des unités géographiques d'un réseau muni d'un graphe de voisinage  $\mathcal{G}$  (cf. les 26 comtés de l'Irlande, Fig. 2-a), la variable  $X_s$  intégrant une quantité d'intérêt sur cette unité  $s$ . L'espace d'état  $E$  est réel ou non. En analyse d'image,  $S$  est un ensemble régulier

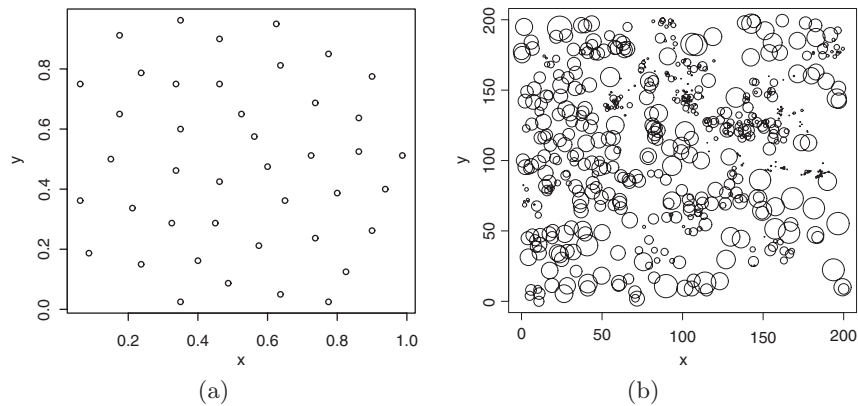
de pixels (cf. Fig. 2-b). Parmi les objectifs étudiés, signalons la construction et l'analyse de modèles explicatifs, l'étude de la corrélation spatiale, la prédiction, la restauration d'image.

### Les données ponctuelles

La Fig. 3-a donne la répartition des centres de cellules d'une coupe histologique observée au microscope, la Fig. 3-b celle d'aiguilles de pin dans une forêt ainsi que leurs longueurs respectives. Ici, c'est l'ensemble des sites  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $x_i \in S \subset \mathbb{R}^d$  où ont lieu les observations qui est *aléatoire* tout comme le nombre  $n = n(x)$  de sites observés :  $x$  est une réalisation d'un processus ponctuel (PP) spatial  $X$  observé dans la fenêtre  $S$ . Le processus  $X$  est dit *marqué* si en outre on observe une marque en chaque  $x_i$ , par exemple la longueur de l'aiguille observée en  $x_i$ . Une question centrale dans l'analyse statistique des PP consiste à savoir si la répartition des points est plutôt régulière (le cas pour la Fig. 3-a) ou bien si elle est due au hasard (processus ponctuel de Poisson) ou encore si elle présente des agrégats (le cas pour la Fig. 3-b).

Comme pour les séries temporelles, la statistique spatiale se différencie de la statistique classique par le fait que les observations sont dépendantes : on dit que  $X$  est un processus spatial ou encore que  $X$  est un *champ aléatoire*.

Cette dépendance crée une redondance de l'information disponible qui peut être utilement exploitée pour la prévision mais qui modifie les comportements statistiques. L'absence de biais, la consistance, l'efficacité ou la convergence en loi d'un estimateur devront être vérifiées dans ce contexte. Mais l'originalité de la statistique spatiale est de faire appel à des *modélisations non-causales* : en ce sens, la statistique spatiale se distingue radicalement de la statistique des séries temporelles qui fait appel à des modélisations causales utilisant de façon



**Fig. 3.** (a) Les 42 centres de cellules d'une coupe histologique observée au microscope (données `cells` du package `spatstat`) ; (b) Positions et tailles de 584 aiguilles de pin dans un sous-bois (données `longleaf` du package `spatstat`).

naturelle le déroulement du temps et la notion de passé (modélisation du débit d’une rivière, d’une action en bourse, de l’évolution d’un taux de chômage, etc.). Une modélisation spatiale markovienne s’exprimera, elle, en terme de voisinage spatial d’un site  $s$  “dans toutes les directions”. Ceci vaut aussi pour la dimension  $d = 1$  : si par exemple, pour  $S \subseteq \mathbb{Z}^1$ ,  $X_s$  est le rendement d’un pied de maïs dans une culture en ligne, un modèle raisonnable comparera  $X_s$  à ses *deux voisins*, le pied de maïs “à gauche”  $X_{s-1}$  et le pied de maïs “à droite”  $X_{s+1}$ , là où un modèle autorégressif causal de  $X_s$  en  $X_{s-1}$  n’a pas d’interprétation naturelle ; si la culture est en champ, on pourrait faire dépendre le rendement  $X_{s,t}$  au site  $(s,t)$  des rendements aux 4 plus proches voisins,  $X_{s-1,t}$ ,  $X_{s+1,t}$ ,  $X_{s,t-1}$  et  $X_{s,t+1}$ , voire des rendements aux 8 plus proches voisins.

Les trois types de structures spatiales [cf. Cressie 48] structurent l’organisation du livre. Les trois premiers chapitres sont consacrés à la modélisation de chaque type de données (chapitre 1 : Modèles du second ordre et géostatistique, modèles intrinsèques, modèles AR ; chapitre 2 : Champs de Gibbs-Markov sur un réseau ; chapitre 3 : Processus ponctuels spatiaux). Vu l’importance des techniques de simulation en statistique spatiale, le chapitre 4 présente les principales méthodes de simulation spatiale par chaîne de Markov (méthodes *MCMC* pour *Monte Carlo Markov Chain*). Enfin, le chapitre 5 rassemble les principales méthodes statistiques utilisées pour les différents modèles et types de données et en décrit les propriétés. Quatre appendices complètent le livre, présentant les principaux outils probabilistes et statistiques utiles à la statistique spatiale (simulation, théorèmes limites, estimation par minimum de contraste) ainsi que les logiciels utilisés dans les illustrations.

De nombreux exemples, le plus souvent traités avec le logiciel *R* [178], illustrent les sujets abordés. Lorsqu’elles ne sont pas directement disponibles dans *R* ou dans un site spécifié, les données étudiées, leurs descriptions, les scripts des programmes utilisés ainsi que des liens utiles sont figurés dans le site

[www.dst.unive.it/~gaetan/ModStatSpat](http://www.dst.unive.it/~gaetan/ModStatSpat)

attaché au livre. Chaque chapitre se termine par des exercices.

La bibliographie permettra au lecteur d’approfondir certaines notions présentées succinctement ainsi que certains résultats techniques dont nous ne donnons pas la démonstration. On y trouvera également des livres de référence complétant une présentation que nous avons voulu volontairement réduite et sans souci d’exhaustivité dans un domaine aux multiples facettes et en plein développement [69].

Nos remerciements vont à tous les collègues qui nous ont donné le goût de l’analyse spatiale, pour leurs idées, leurs remarques, leurs contributions et qui nous ont permis d’utiliser les données issues de leur travail. Notre reconnaissance va également au *R Development Core Team* et aux auteurs des *packages* spatiaux du logiciel *R* [178] qui mettent librement à la disposition du public des outils logiciels performants et efficaces, compléments indispensables aux



méthodes et outils exposés ici. Nous remercions les rapporteurs pour leur lecture approfondie du premier projet ; leurs remarques ont permis d'améliorer significativement la version actuelle. Merci à Bernard Ycart pour ses encouragements à dépasser un projet initial beaucoup plus modeste. Bien entendu, cela n'aurait pas pu se faire sans la patience et l'attention de nos familles et l'appui de nos équipes de recherche respectives, à savoir le Dipartimento di Statistica à l'Università Ca' Foscari - Venezia et le SAMOS à Paris 1.

Venise et Paris  
mars 2008

*Carlo Gaetan*  
*Xavier Guyon*

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Modèle spatial du second ordre et géostatistique</b> .....	<b>1</b>
1.1	Rappels sur les processus stochastiques.....	2
1.2	Processus stationnaire.....	3
1.2.1	Définitions, exemples.....	4
1.2.2	Représentation spectrale d'une covariance.....	6
1.3	Processus intrinsèque et variogramme.....	8
1.3.1	Définition, exemples et propriétés.....	8
1.3.2	Variogramme d'un processus stationnaire.....	10
1.3.3	Exemples de covariances et de variogrammes.....	11
1.3.4	Anisotropies.....	14
1.4	Propriétés géométriques : continuité, différentiabilité.....	16
1.4.1	Continuité et différentiabilité : le cas stationnaire.....	17
1.5	Modélisation spatiale par convolution.....	19
1.5.1	Modèle continu.....	19
1.5.2	Convolution discrète.....	21
1.6	Modèles spatio-temporels.....	22
1.7	Les modèles auto-régressifs spatiaux.....	25
1.7.1	Modèles <i>MA</i> , <i>ARMA</i> stationnaires.....	26
1.7.2	Auto-régression simultanée stationnaire.....	28
1.7.3	Auto-régression conditionnelle stationnaire.....	31
1.7.4	<i>AR</i> non-stationnaire sur un réseau fini <i>S</i> .....	34
1.7.5	Modèles auto-régressifs avec covariables : <i>SARX</i> .....	38
1.8	Le modèle de régression spatiale.....	39
1.9	Prédiction à covariance connue.....	43
1.9.1	Le krigeage simple.....	43
1.9.2	Krigeage universel.....	44
1.9.3	Expériences numériques.....	47
	Exercices.....	48

<b>2</b>	<b>Champ de Gibbs-Markov sur réseau</b> . . . . .	55
2.1	Recollement de lois conditionnelles . . . . .	56
2.2	Champ de Gibbs sur $S$ . . . . .	57
2.2.1	Potentiel d'interaction et spécification de Gibbs . . . . .	57
2.2.2	Exemples de spécification de Gibbs . . . . .	59
2.3	Champ de Markov et champ de Gibbs . . . . .	66
2.3.1	Définitions : cliques, champ de Markov . . . . .	67
2.3.2	Le théorème de Hammersley-Clifford . . . . .	67
2.4	Les auto-modèles markoviens de Besag (AMM) . . . . .	69
2.4.1	Recollement de lois conditionnelles et auto-modèle . . . . .	69
2.4.2	Exemples d'auto-modèles markoviens . . . . .	70
2.5	Dynamique d'un champ de Markov . . . . .	76
2.5.1	Chaîne de Markov de champ de Markov (CMCM) . . . . .	76
2.5.2	Exemples de dynamiques . . . . .	77
	Exercices . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Processus ponctuels spatiaux</b> . . . . .	83
3.1	Définitions et notations . . . . .	84
3.1.1	Espace exponentiel . . . . .	85
3.1.2	Moments d'un processus ponctuel . . . . .	87
3.1.3	Exemples de processus ponctuels . . . . .	89
3.2	Processus ponctuel de Poisson . . . . .	92
3.3	Processus ponctuel de Cox . . . . .	93
3.3.1	Processus de Cox <i>log</i> -Gaussien . . . . .	93
3.3.2	PP doublement poissonnien . . . . .	94
3.4	Densité d'un processus ponctuel . . . . .	94
3.4.1	Définition . . . . .	95
3.4.2	Processus ponctuel de Gibbs . . . . .	96
3.5	Distances au plus proche voisin d'un PP . . . . .	100
3.5.1	Les mesures de Palm . . . . .	101
3.5.2	Deux distances au ppv de $X$ . . . . .	101
3.5.3	Moment réduit d'ordre 2 . . . . .	102
3.6	Processus ponctuel de Markov . . . . .	104
3.6.1	Propriété de Markov au sens de Ripley-Kelly . . . . .	104
3.6.2	Propriété de Markov aux ppv . . . . .	106
3.6.3	PP de Gibbs sur l'espace $\mathbb{R}^d$ . . . . .	109
	Exercices . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Simulation des modèles spatiaux</b> . . . . .	113
4.1	Convergence d'une chaîne de Markov . . . . .	115
4.1.1	Loi des grands nombres et TCL pour une chaîne homogène . . . . .	120
4.2	Deux algorithmes markoviens de simulation . . . . .	120
4.2.1	Echantillonneur de Gibbs sur un espace produit . . . . .	121
4.2.2	L'algorithme de Metropolis-Hastings (MH) . . . . .	123

4.3	Simulation d'un champ de Markov sur un réseau . . . . .	126
4.3.1	Les deux algorithmes de base . . . . .	126
4.3.2	Exemples . . . . .	127
4.3.3	Simulation sous contrainte . . . . .	130
4.3.4	Simulation d'une dynamique de champ de Markov . . . . .	131
4.4	Simulation d'un processus ponctuel . . . . .	132
4.4.1	Simulation conditionnelle à un nombre fixé de points . . . . .	132
4.4.2	Simulation inconditionnelle . . . . .	132
4.4.3	Simulation de PP de Cox . . . . .	134
4.5	Performance et contrôle des méthodes MCMC . . . . .	134
4.5.1	Performances d'une méthode MCMC . . . . .	134
4.5.2	Deux méthodes de contrôle de la convergence . . . . .	135
4.6	Simulation exacte depuis le passé . . . . .	138
4.6.1	L'algorithme de Propp et Wilson . . . . .	138
4.6.2	Deux aménagements de l'algorithme . . . . .	140
4.7	Simulation d'un champ gaussien sur $S \subseteq \mathbb{R}^d$ . . . . .	142
4.7.1	Simulation d'un champ gaussien stationnaire . . . . .	142
4.7.2	Simulation gaussienne conditionnelle . . . . .	146
	Exercices . . . . .	146
<b>5</b>	<b>Statistique des modèles spatiaux . . . . .</b>	<b>153</b>
5.1	Estimation en géostatistique . . . . .	154
5.1.1	Analyse du nuage variographique . . . . .	154
5.1.2	Estimation empirique d'un variogramme . . . . .	156
5.1.3	Estimation paramétrique d'un modèle de variogramme . . . . .	158
5.1.4	Estimation du variogramme en présence d'une tendance . . . . .	160
5.1.5	Validation d'un modèle de variogramme . . . . .	163
5.2	Autocorrélation sur un réseau spatial . . . . .	170
5.2.1	L'indice de Moran . . . . .	171
5.2.2	Test asymptotique d'indépendance spatiale . . . . .	172
5.2.3	L'indice de Geary . . . . .	174
5.2.4	Test de permutation d'indépendance spatiale . . . . .	174
5.3	Statistique des champs du second ordre . . . . .	178
5.3.1	Estimation d'un modèle stationnaire sur $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	178
5.3.2	Estimation d'un modèle auto-régressif . . . . .	181
5.3.3	Estimation du maximum de vraisemblance . . . . .	183
5.3.4	Estimation d'une régression spatiale . . . . .	184
5.4	Estimation d'un champ de Markov . . . . .	193
5.4.1	Le maximum de vraisemblance . . . . .	193
5.4.2	Pseudo-vraisemblance conditionnelle de Besag . . . . .	196
5.4.3	La méthode de codage . . . . .	203
5.4.4	Précisions comparées du <i>MV</i> , <i>MPVC</i> et du codage . . . . .	206
5.4.5	Identification du support d'un champ de Markov . . . . .	207

5.5	Statistique pour un processus ponctuel spatial . . . . .	212
5.5.1	Test d'homogénéité spatiale basé sur les quadrats . . . . .	212
5.5.2	Estimation de l'intensité d'un PP . . . . .	213
5.5.3	Estimation des caractéristiques du second ordre . . . . .	215
5.5.4	Estimation d'un modèle paramétrique de PP . . . . .	223
5.5.5	Pseudo-vraisemblance conditionnelle d'un $PP$ . . . . .	225
5.5.6	Approximation Monte Carlo d'une vraisemblance de Gibbs . . . . .	228
5.5.7	Résidus d'un processus ponctuel . . . . .	231
5.6	Modèle hiérarchique spatial et statistique bayésienne . . . . .	235
5.6.1	Régression spatiale et krigeage bayésien . . . . .	236
5.6.2	Modèle linéaire généralisé hiérarchique spatial . . . . .	238
	Exercices . . . . .	244

**Appendices**

<b>A</b>	<b>Simulation de variables aléatoires</b> . . . . .	255
A.1	La méthode d'inversion . . . . .	255
A.2	Simulation d'une chaîne de Markov à nombre fini d'état . . . . .	257
A.3	La méthode de rejet . . . . .	257
A.4	Simulation d'une loi gaussienne . . . . .	258
<b>B</b>	<b>Théorèmes limites pour un champ aléatoire</b> . . . . .	261
B.1	Ergodicité et lois des grands nombres . . . . .	261
B.1.1	Ergodicité et théorème ergodique . . . . .	261
B.1.2	Exemples de processus ergodiques . . . . .	262
B.1.3	Ergodicité et LGN faible dans $L^2$ . . . . .	263
B.1.4	LFGN sous conditions $L^2$ . . . . .	264
B.2	Coefficient de mélange fort . . . . .	264
B.3	TCL pour un champ mélangeant . . . . .	266
B.4	TCL pour une fonctionnelle d'un champ de Markov . . . . .	267
<b>C</b>	<b>Estimation par minimum de contraste</b> . . . . .	269
C.1	Définitions et exemples . . . . .	270
C.2	Propriétés asymptotiques . . . . .	275
C.2.1	Convergence de l'estimateur . . . . .	276
C.2.2	Normalité asymptotique . . . . .	277
C.3	Identification d'un modèle par contraste pénalisé . . . . .	281
C.4	Preuve de deux résultats du Chapitre 5 . . . . .	282
C.4.1	Variance de l'estimateur du MV d'une régression gaussienne . . . . .	282
C.4.2	Consistance du MV pour un champ de Markov stationnaire . . . . .	283
<b>D</b>	<b>Logiciels</b> . . . . .	285
	<b>Littérature</b> . . . . .	289
	<b>Index</b> . . . . .	303

---

## Notations et abréviations

c-à-d	c'est-à-dire
c.d.n.	conditionnellement définie négative
Ch.	chapitre
d.p.	définie positive
d.s.	densité spectrale
Ex.	Exercice
Fig.	Figure
i.e.	par exemple
i.i.d.	indépendantes et identiquement distribuées
i.n.i.d.	indépendantes et non-identiquement distribuées
m.q.	moyenne quadratique
ssi	si et seulement si
p.p.v.	plus proches voisins
resp.	respectivement
s.d.p.	semi-définie positive
t.q.	tel que
v.a.	variable aléatoire
AMM	Auto-Modèle Markovien
AMMX	Auto-Modèle Markovien eXogène
AR	Auto-Régression
ARMA	Auto-Régression avec Moyenne Mobile
BB	Bruit Blanc
BBf	Bruit Blanc faible
BBF	Bruit Blanc Fort

BBG	Bruit Blanc Gaussien
CAR	Auto-Régression Conditionnelle
CFTP	<i>Coupling From The Past</i>
CSP	<i>Complete Spatial Randomness</i>
EQNM	Ecart Quadratique Normalisé Moyen
LFGN	Loi Forte des Grands Nombres
MA	Moyenne Mobile ( <i>Moving Average</i> )
MAP	Maximum a Posteriori
MCMC	<i>Monte Carlo Markov Chain</i>
MCG	Moindres Carrés Généralisés
MCQG	Moindres Carrés Quasi Généralisés
MCO	Moindres Carrés Ordinaires
MCP	Moindres Carrés Pondérés
MH	Metropolis-Hastings
MLG	Modèle Linéaire Généralisé
MV	Maximum de Vraisemblance
SAR	Auto-Régression Simultanée
SARX	SAR avec eXogènes
PP	Processus Ponctuel
PPM	Processus Ponctuel Marqué
PPP	Processus Ponctuel de Poisson
PVC	Pseudo-Vraisemblance Conditionnelle
TCL	Théorème Central Limite
$\mathcal{B}(S)$ , (resp. $\mathcal{B}_b(S)$ )	Boréliens (resp. bornés) de $S$ , $S \subseteq \mathbb{R}^d$
$\#(A)$	Cardinalité de $(A)$
$\delta(A)$	Diamètre de $A$ : $\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$
$ \Sigma $	Déterminant de $\Sigma$
$d(A)$	Diamètre intérieur de $A$ : $d(A) = \sup\{r : \exists x \text{ t.q. } B(x;r) \subseteq A\}$
$\mathbf{1}_A$	Fonction indicatrice de $A$
$\partial A$ ( $\partial i$ )	Frontière de voisinage de $A$ (du site $i$ )
$\dots \doteq K(\theta, \alpha)$	Égalité définissant $K(\theta, \alpha)$
$\langle i, j \rangle$	$i$ et $j$ sont voisins
$\nu$	Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$
$\ \cdot\ $ ou $\ \cdot\ _2$	Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$ : $\ x\  = \sqrt{\sum_1^p x_i^2}$
$\ \cdot\ _1$	Norme $l^1$ : $\ x\ _1 = \sum_1^p  x_i $

$\ \cdot\ _\infty$	Norme du sup : $\ x\ _\infty = \sup_i  x_i $
$\ \cdot\ _{VT}$	Norme en variation totale
$\pi \ll \mu$	$\pi$ est absolument continue par rapport à $\mu$
$[x]$	Partie entière de $x$
$\lambda_M(B)$ (resp. $\lambda_m(C)$ )	Plus grande (resp. petite) valeur propre de $B$
$A \otimes B$	Produit de Kronecker des matrices $A$ et $B$
${}^t uv$	Produit scalaire sur $\mathbb{R}^p$ : ${}^t uv = \sum_{i=1}^p u_i v_i$
${}^t C$	Transposée de $C$
$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$	$X$ est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$