

*Waldmann*  
Poisson-Geometrie und  
Deformationsquantisierung

Stefan Waldmann

# Poisson-Geometrie und Deformations- quantisierung

Eine Einführung

Mit 32 Abbildungen

 Springer

HD Dr. Stefan Waldmann  
Fakultät für Mathematik und Physik  
Physikalisches Institut  
Albert-Ludwigs-Universität  
Hermann Herder Straße 3  
79104 Freiburg  
E-mail: Stefan.Waldmann@physik.uni-freiburg.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

---

Mathematics Subject Classification (2000): 53D05, 53D17, 53D20, 53D55, 81S10

---

ISBN 978-3-540-72517-6 Springer Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funk- sendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media

[springer.de](http://springer.de)

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Text und Abbildungen wurden mit größter Sorgfalt erarbeitet. Verlag und Autor können jedoch für eventuell verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen.

Umschlaggestaltung: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Herstellung: LE- $\text{\TeX}$  Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig

Satz: Datenerstellung durch den Autor unter Verwendung eines Springer  $\text{\TeX}$ -Makropakets

Gedruckt auf säurefreiem Papier

175/3180YL - 5 4 3 2 1 0

Für Sonja, Richard, Silvia und Viola

---

## Vorwort

Dieses Buch entstand aus einem – anfangs bei weitem nicht so ausführlich geplanten – Vorlesungsskript zu einer zweisemestrigen Vorlesung über Poisson-Geometrie und Deformationsquantisierung mit wöchentlichen Übungen, die ich in Freiburg am Physikalischen Institut im Wintersemester 2003/2004 und im Sommersemester 2004 und dann wieder im Wintersemester 2006/2007 und Sommersemester 2007 hielt. Die Zielgruppe dieser Veranstaltung waren Physik- und Mathematikstudenten im Hauptstudium. Mein wesentliches Ziel bei diesen Vorlesungen und nun auch bei diesem Buch war es, eine kohärente Darstellung der klassischen Mechanik (in Form von symplektischer und Poisson-Geometrie) und ihrer Quantisierung (in Form von Deformationsquantisierung) zu geben, da meiner Überzeugung nach eine klassische physikalische Theorie ohne Blick auf ihre Quantisierung ebenso unvollständig sein muß wie eine quantentheoretische Theorie ohne das genaue Wissen um die klassischen Ursprünge.

An der Entstehung dieses Buches haben mir viele Kollegen und Freunde mit Rat und Tat beigestanden, es sei ihnen an dieser Stelle daher herzlich gedankt: vor allem Martin Bordemann, Nikolai Neumaier und Hartmann Römer verdanke ich viele Diskussionen zur Differentialgeometrie, mathematischen Physik und insbesondere zur Deformationsquantisierung, welche auf die eine oder andere Art in diesem Buch mit eingeflossen sind. Thomas Strobl möchte ich besonders für seine wichtigen Kommentare und Hinweise zur Quantisierung danken. Martin Schlichenmaier und Gerd Rudolph gebührt ebenfalls großer Dank für ihre zahlreichen Verbesserungsvorschläge und Kommentare. Juan-Pablo Ortega sei für hilfreiche Erklärungen zur Blätterungstheorie gedankt. Den Freiburger Diplomanden und Doktoranden Florian Becher, Svea Beiser, Michael Carl, Jakob Heller, Hans-Christian Herbig, Stefan Jansen, Frank Keller und Stefan Weiß möchte ich herzlich für ihre Kommentare und das eifrige Korrekturlesen danken. Den Hörerinnen und Hörern meiner Vorlesung sei ebenfalls für die vielen Kommentare insbesondere zu den Übungen gedankt. Weiter möchte ich Julius Wess ganz besonders für die Ermutigung danken, dieses Buch zu schreiben, auch wenn es ursprünglich etwas anders

geplant war. Ebenfalls danke ich Herrn Prof. Wolf Beiglböck für seine Kommentare zu den ersten Versionen des Manuskripts. Schließlich möchte ich den Damen und Herren vom Springer-Verlag für ihre Unterstützung bei der Umsetzung dieses Buchprojekts danken.

Der größte Dank gebührt aber sicherlich meinen Kindern Silvia, Richard und Sonja, die mit viel Geduld lange Abwesenheiten meinerseits ertrugen, und meiner Frau Viola, die mir jederzeit Diskussionspartner, Stütze und Inspiration bei der Entstehung dieses Buches war.

Freiburg, Mai 2007

*Stefan Waldmann*

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b> .....	1
<b>1 Aspekte der Hamiltonschen Mechanik</b> .....	9
1.1 Analytische Aspekte der Hamiltonschen Mechanik .....	10
1.2 Geometrische Aspekte der Hamiltonschen Mechanik .....	12
1.2.1 Geometrische Eigenschaften von Flüssen .....	12
1.2.2 Hamiltonsche Flüsse .....	13
1.2.3 Die symplektische Form .....	15
1.3 Algebraische Aspekte der Hamiltonschen Mechanik .....	16
1.3.1 Observable und Zustände .....	16
1.3.2 Die Poisson-Klammer und die Zeitentwicklung .....	20
1.4 Warum „Geometrische Mechanik“ .....	21
1.5 Aufgaben .....	22
<b>2 Differentialgeometrische Grundlagen</b> .....	29
2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten .....	30
2.1.1 Karten und Atlanten .....	30
2.1.2 Tangentialvektoren und das Tangentenbündel .....	35
2.1.3 Vektorfelder, Flüsse und Lie-Klammern .....	41
2.2 Vektorbündel .....	45
2.2.1 Bündelkarten und erste Eigenschaften .....	46
2.2.2 Konstruktionen von Vektorbündeln .....	50
2.2.3 Algebraische Strukturen für Schnitte von Vektorbündeln .....	54
2.2.4 Kovariante Ableitungen und Krümmung .....	60
2.2.5 Orientierung und $\alpha$ -Dichtenbündel .....	63
2.3 Kalkül auf Mannigfaltigkeiten .....	72
2.3.1 Tensorfelder und Lie-Ableitung .....	72
2.3.2 Differentialformen .....	75
2.3.3 Multivektorfelder und die Schouten-Nijenhuis-Klammer .....	82
2.3.4 Integration auf Mannigfaltigkeiten .....	87
2.4 Aufgaben .....	92

<b>3</b>	<b>Symplektische Geometrie</b> .....	105
3.1	Symplektische Mannigfaltigkeiten als Phasenräume .....	105
3.1.1	Definitionen und erste Eigenschaften .....	106
3.1.2	Hamiltonsche Vektorfelder und Poisson-Klammern ....	108
3.1.3	Das Darboux-Theorem .....	113
3.2	Beispiele von symplektischen Mannigfaltigkeiten .....	118
3.2.1	Kotangentenbündel .....	118
3.2.2	Von Lagrangescher zu Hamiltonscher Mechanik .....	130
3.2.3	Fast-Komplexe Strukturen und Kähler-Mannigfaltigkeiten .....	138
3.3	Impulsabbildungen und Phasenraumreduktion .....	151
3.3.1	Lie-Gruppen und Gruppenwirkungen .....	152
3.3.2	Impulsabbildungen .....	175
3.3.3	Die Marsden-Weinstein-Reduktion .....	185
3.4	Aufgaben .....	191
<b>4</b>	<b>Poisson-Geometrie</b> .....	209
4.1	Poisson-Mannigfaltigkeiten .....	210
4.1.1	Poisson-Klammern und Poisson-Tensoren .....	211
4.1.2	Hamiltonsche und Poisson-Vektorfelder .....	215
4.1.3	Beispiele von Poisson-Mannigfaltigkeiten .....	218
4.1.4	Symplektische Blätterung und das <i>Splitting</i> -Theorem ..	225
4.1.5	Poisson-Abbildungen .....	233
4.2	Lie-Algebroiden und Poisson-Kohomologie .....	237
4.2.1	Lie-Algebroiden .....	238
4.2.2	Poisson-Kohomologie .....	247
4.2.3	Die fundamentale und die modulare Klasse .....	253
4.2.4	Formale Poisson-Tensoren .....	257
4.3	Aufgaben .....	271
<b>5</b>	<b>Quantisierung: Erste Schritte</b> .....	281
5.1	Die Problemstellung .....	281
5.1.1	Klassische Mechanik und Quantenmechanik im Vergleich	283
5.1.2	Quantisierung und klassischer Limes .....	288
5.2	Kanonische Quantisierung für polynomiale Funktionen .....	292
5.2.1	Das Groenewold-van Hove-Theorem .....	294
5.2.2	Ordnungsvorschriften: Standard- und Weyl-Ordnung ...	299
5.2.3	Wick-, Anti-Wick- und $\hbar$ -Ordnung .....	303
5.2.4	Die ersten Sternprodukte .....	306
5.3	Symbolkalkül für Pseudodifferentialoperatoren .....	314
5.3.1	Integralformeln und Pseudodifferentialoperatoren .....	315
5.3.2	Integralformeln für die Sternprodukte .....	324
5.3.3	Asymptotische Entwicklungen und ihre Konvergenz ....	331
5.3.4	Asymptotische Entwicklung und klassischer Limes ....	336
5.4	Geometrische Verallgemeinerung: Kotangentenbündel .....	337



5.4.1	Standardgeordnete Quantisierung auf $T^*Q$ . . . . .	338
5.4.2	$\kappa$ -Ordnung und Sternprodukte auf $T^*Q$ . . . . .	347
5.5	Aufgaben . . . . .	355
<b>6</b>	<b>Formale Deformationsquantisierung</b> . . . . .	<b>371</b>
6.1	Sternprodukte auf Poisson-Mannigfaltigkeiten . . . . .	372
6.1.1	Ziele und Erwartungen . . . . .	372
6.1.2	Die Definition von Sternprodukten . . . . .	374
6.1.3	Existenz und Klassifikation von Sternprodukten . . . . .	380
6.2	Algebraische Deformationstheorie nach Gerstenhaber . . . . .	386
6.2.1	$\lambda$ -Adische Topologie und der Banachsche Fixpunktsatz . . . . .	389
6.2.2	Die Gerstenhaber-Klammer und der Hochschild-Komplex . . . . .	393
6.2.3	Formale Deformationen assoziativer Algebren . . . . .	402
6.2.4	Eine formale assoziative Deformation . . . . .	410
6.2.5	Das Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorem . . . . .	413
6.3	Kalkül mit Sternprodukten . . . . .	419
6.3.1	Inverse, Exponential- und Logarithmusfunktion . . . . .	419
6.3.2	Derivationen von Sternprodukten . . . . .	423
6.3.3	Automorphismen von Sternprodukten . . . . .	429
6.3.4	Zeitentwicklung und die Heisenberg-Gleichung . . . . .	433
6.3.5	Spurfunktionale . . . . .	437
6.4	Die Fedosov-Konstruktion . . . . .	444
6.4.1	Das formale Weyl-Algebrabündel . . . . .	446
6.4.2	Die Fedosov-Derivation . . . . .	453
6.4.3	Die Fedosov-Taylor-Reihe und das Fedosov-Sternprodukt . . . . .	464
6.4.4	Die Fedosov-Klasse . . . . .	470
6.5	Aufgaben . . . . .	474
<b>7</b>	<b>Zustände und Darstellungen</b> . . . . .	<b>485</b>
7.1	Zustände als positive Funktionale . . . . .	486
7.1.1	Geordnete Ringe, Prä-Hilbert-Räume und *-Algebren . . . . .	487
7.1.2	Positivitätsbegriffe . . . . .	495
7.1.3	Positive Funktionale in der Deformationsquantisierung . . . . .	501
7.1.4	Die KMS-Bedingung und thermodynamische Zustände . . . . .	507
7.1.5	Positive Deformationen . . . . .	512
7.2	Darstellungen und GNS-Konstruktion . . . . .	517
7.2.1	Elementare Darstellungstheorie einer *-Algebra . . . . .	518
7.2.2	Die allgemeine GNS-Konstruktion . . . . .	522
7.2.3	GNS-Darstellungen in der Deformationsquantisierung . . . . .	525
7.2.4	Deformation und klassischer Limes von *-Darstellungen . . . . .	537
7.3	Aufgaben . . . . .	544

<b>A Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten</b> .....	551
A.1 Zerlegungen der Eins .....	551
A.2 Algebraische Definition von Differentialoperatoren .....	556
A.3 Differentialoperatoren der Algebra $C^\infty(M)$ .....	560
A.4 Algebraische Definition von Multidifferentialoperatoren .....	566
A.5 Multidifferentialoperatoren auf Schnitten von Vektorbündeln ..	573
<b>Kommentiertes Literaturverzeichnis</b> .....	579
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	583
<b>Sachverzeichnis</b> .....	601