Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

335

H. Huck · R. Roitzsch
U. Simon · W. Vortisch
R. Walden · B. Wegner
W. Wendland
Technische Universität Berlin und Technische Hochschule Darmstadt

Beweismethoden der Differentialgeometrie im Großen

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1973

AMS Subject Classifications (1970): Primary: 53-02, 53C45, 53C40
Secondary: 53A05, 53B25

ISBN 3-540-06385-4 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-06385-4 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

VORWORT

Der vorliegende Bericht ist aus Seminaren zur "Differentialgeometrie im Großen" 1970/71 an der TU Berlin entstanden. Wir gehen auf drei Beweismethoden der globalen Differentialgeometrie ein: auf die Indexmethode, die Integralformelmethode und die Maximummethode. Der Bericht soll eine Einführung in diese Methoden sein und sollte - nach unserer Meinung - für Studenten, die eine einsemestrige Lehrveranstaltung "Differentialgeometrie" besucht haben, lesbar sein. Eine entsprechende Darstellung klassischer Resultate findet man in der Ausarbeitung einer Vorlesung von H. Hopf durch J. W. Gray [67] und in dem Buch [32] von Efimov mit dem Nachtrag von E. Rembs und K. P. Grotemeyer; in diesem Nachtrag wird auf Resultate aus der Theorie der I-Verbiegungen sehr ausführlich eingegangen.

Die funktionentheoretischen Methoden im Zusammenhang mit der Theorie der Minimalflächen sowie die Untersuchung des globalen Verlaufs von Geodätischen und die damit zusammenhängenden Fragen haben wir in dieser Ausarbeitung nicht dargestellt; dazu sei z. B. auf den Überblicksartikel von K. Leichtweiß [84] und auf die Vorlesungsausarbeitung von Gromoll-Klingenberg-Meyer [44] verwiesen. Auch auf Anwendungen des de Rhamschen Zerlegungssatzes in der globalen Flächentheorie gehen wir hier nicht ein.

Zum Aufbau des Berichtes:

Um Studenten, die ein Interesse für globale differentialgeometrische Problemstellungen haben, das Einlesen zu erleichtern, haben wir in der Einleitung Grundbegriffe und Grundformeln der Differentialgeometrie in unserer Terminologie zusammengestellt; für eine Reihe von Hilfssätzen haben wir sonst schwer zugängliche Beweise angegeben. Wir benutzen den klassischen Tensorkalkül.

Wir haben uns aus zwei Gründen auf zweidimensionale Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum beschränkt:
- Beweise mit der Indexmethode sind bisher nur für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten bekannt;
- bei der Maximummethode und der Integralformelmethode treten die wesentlichen Beweisprinzipien auch schon für zweidimensionale Flächen klar hervor.

Die hier dargestell ten Methoden lassen sich natürlich auch in der affinen und relativen Differentialgeometrie sowie bei Immersionen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten in Riemannsche Räume anwenden; derartige Resultate wollen wir hier aber nicht darstellen.

Die drei Kapitel führen unabhängig voneinander in die 3 Methoden ein. In Bemerkungen weisen wir auf offene Probleme und auf ergänzende Literatur hin.

Die Indexmethode:

Mit der Indexmethode konnten wir einige Fortschritte gegenüber bisher bekannten Ergebnissen erzielen. Kapitel II ist daher am ausführlichsten und möglichst systematisch aufgebaut. Die Erweiterung der bisherigen Theorie ergab sich aus der Anwendung einiger Ergebnisse der Theorie der partiellen elliptischen Differentialgleichungssysteme erster Ordnung bzw. der verallgemeinerten analytischen Funktionen (vgl. z. B. [13], [14], [53], [126]) auf bisher ungelöste geometrische Probleme.

Neue Ergebnisse bei den Anwendungen der Indexmethode liegen vor allem bei Kongruenzsätzen für II-isometrische Eiflächen (d. h. Eiflächen mit gleicher zweiter Grundform) und bei globalen II-Verbiegungen vor (vgl. Kap. III § 3 B). Bis vor kurzem waren hier nur zwei Ergebnisse bekannt: der Satz von Grove [51], der mit einer Integralformel bewiesen worden war, und der Satz über die II-Starrheit der Kugel (K. Voss [128]).

Eine Verallgemeinerung der Indexmethode in anderer Richtung nahm H. F. Münzner [95] (wir hoffen, daß dieser ausgezeichnete Bericht bald einmal publiziert werden wird) vor; er betrachtet statt isolierter Singularitäten kompakte Komponenten beliebig gestalteter Singularitätenmengen.

Die Integralformelmethode:

In Kapitel III werden bekannte sowie einige neuere Ergebnisse systematisch zusammengestellt; das Kapitel enthält:
- die Herleitung verschiedener bekannter Integralformeln aus Integralformeln vom Minkowskischen Typ (§§ 3.1 - 3.3);
- die Herleitung einer Integralformel (§ 3.4), die u.a. die Integralformeln von Herglotz [61], Grove [51] und Blaschke [16] als Spezialfälle enthält (eine ähnliche einheitliche Herleitung wird demnächst K. Leichtweiß publizieren);
- Ergebnisse von R. Gardner [39, 40] und R. Schneider [111], der uns freundlicherweise ein preprint zur Verfügung stellte.

Die Maximummethode:

Die Maximummethode in Kapitel IV haben wir exemplarisch an speziellen Ergebnissen dargestellt:
- einer Kennzeichnung der Kugel von A. D. Aleksandrov [8]; dabei folgen wir einer Darstellung von H. Hopf [67];
- dem Kongruenzsatz für isometrische Eiflächen nach einem Beweis von A. D. Aleksandrov und E. P. Senkin [10] in einer Darstellung von K. Voss [130];
- einem Homothetiesatz von C. S. Hsü [74].

Zur Anwendung des Maximumprinzips gibt es eine Reihe weiterer Arbeiten von A. D. Aleksandrov [5]; im Rahmen des Seminars ist es uns leider nicht gelungen, die dort wiedergegebenen Beweise detailliert nachzuvollziehen und bei den geometrischen Konstruktionen, die für die Anwendungen des Maximumprinzips notwendig sind, ein methodisches Prinzip einwandfrei zu erkennen.

Der Anhang bringt

- eine Formelsammlung;
- eine Zusammenstellung von Hilfssätzen algebraischer und geometrischer Natur und die Konstruktion gewisser Tensoren bei vorgelegter geometrischer Problemstellung;
- offene Probleme, für die wir nur Teilergebnisse vorlegen können;
- Hinweise auf einige Arbeiten, in denen verschiedene, von den dargelegten Methoden z. T. abweichende Beweisprinzipien (die auch nicht in den Berichten von Leichtweiß [84] und Gromoll-Klingenberg-Meyer [44] dargestellt werden) zur Lösung globaler Fragestellungen verwendet werden.

Der Bericht ist von den sieben Teilnehmern der Seminare erstellt worden. Zahlreiche Vorschläge erhielten wir von Teilnehmern der jährlichen Geometrie-Tagung in Oberwolfach und verschiedenen Gästen an der TU Berlin; für wertvolle Hinweise und für die Unterstützung unserer Arbeit danken wir insbesondere den Herren R. Gardner, W. Klingenberg, D. Laugwitz, K. Leichtweiß, H. F. Münzner, R. Schneider, K. Voss.

Einen Teil der Maschinenreinschrift hat Frau Monika Bartsch geschrieben; dafür danken wir ihr herzlich.

Berlin und Darmstadt im Juni 1972

H. Huck, R. Roitzsch, U. Simon
W. Vortisch, R. Walden
B. Wegner, W. Wendland

INHALTSVERZEICHNIS