

# Lecture Notes in Physics

Edited by H. Araki, Kyoto, J. Ehlers, München, K. Hepp, Zürich  
R. Kippenhahn, München, D. Ruelle, Bures-sur-Yvette  
H.A. Weidenmüller, Heidelberg, J. Wess, Karlsruhe and J. Zittartz, Köln

Managing Editor: W. Beiglböck

## 344

---

M. Rascle D. Serre  
M. Slemrod (Eds.)

## PDEs and Continuum Models of Phase Transitions

Proceedings of an NSF-CNRS Joint Seminar  
Held in Nice, France, January 18–22, 1988

---



Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong

**Editors**

M. Rascle

Département de Mathématiques, Université de Nice  
Parc Valrose, F-06034 Nice Cédex, France

D. Serre

Ecole Normale Supérieure de Lyon  
46, allée d'Italie, F-69364 Lyon Cédex 07, France

M. Slemrod

Mathematics Department, University of Wisconsin  
Walnut Street, Madison, WI 53706, USA

ISBN 0-387-51617-4 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

ISBN 3-540-51617-4 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is only permitted under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its version of June 24, 1985, and a copyright fee must always be paid. Violations fall under the prosecution act of the German Copyright Law.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1989

Printed in Germany

Printing: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.  
Bookbinding: J. Schäffer GmbH & Co. KG., Grünstadt  
2153/3140-543210 – Printed on acid-free paper

## PREFACE

The N.S.F. - C.N.R.S. Joint Seminar : "Partial Differential Equations and Continuum Models of Phase Transitions" was held in Nice in January 1988, under the auspices of the International Society for the Interaction of Mechanics and Mathematics and within the framework of the 1987 - 1988 "Année spéciale sur les phénomènes non linéaires", supported in France by C.N.R.S. and the Ministère des Universités.

The study of phase transitions, the importance of which is crucial in many physical applications, is obviously one of the fundamental problems of Physics. During the last few years, spectacular progress has been made in constructing and understanding better continuum models and the associated systems of partial differential equations, in spite of the difficulty of problems such as the existence of solutions to "wildly" non-convex problems or the Hadamard instability in mixed-type systems. Therefore the goal of this Seminar was to bring together scientists from different fields (applied mathematics, theoretical or computational mechanics, solid-state physics, etc). Through a few examples (micro-structure of crystals, defects in liquid crystals, liquid-vapor interfaces, etc), the speakers have described several key points of continuum models (structure and evolution of interfaces, regularization by means of interfacial energy, (non-)equilibrium theories, etc) and some of the most typical mathematical problems and results: study of oscillations (Young's measures), singular solutions, admissibility of shock waves, role of higher-order perturbations, etc.

This Seminar had a very pleasant atmosphere, and we think it was highly successful. We really enjoyed the quality of the talks and the contributions in this volume as well as the opportunity of developing scientific contacts and cooperation. We are particularly grateful to John BALL, James GLIMM, Morton GURTIN, Maurice KLEMAN and Gérard MAUGIN for their help in organizing this workshop.

Finally we are particularly grateful to the following organizations which have supported this meeting:

C.N.R.S., N.S.F., S.M.A.I., G.A.M.N.I., D.R.E.T., the European Research Office of the U.S. Army, le Conseil Général des Alpes Maritimes, l'Université de Nice, and we wish to thank for their assistance:

Marie-Christine BERMOND, Annie BOREL, Sonia CHAKOFF and Janine LACHKAR.

*Nice, September 1989*

*Michel RASCLE*

*Denis SERRE*

*Marshall SLEMROD*

## PREFACE

Le Séminaire conjoint C.N.R.S.-N.S.F: "Equations aux dérivées partielles et modèles continus de transitions de phases" s'est tenu à Nice du 18 au 22 janvier 1988, dans le cadre de l'Année spéciale 1987 - 1988 sur les phénomènes non linéaires, organisée en France sous le haut patronage du C.N.R.S. et du Ministère des Universités. Ce Séminaire était organisé sous les auspices de l'International Society for the Interactions of Mechanics and Mathematics.

L'étude des transitions de phases est évidemment l'un des problèmes fondamentaux de la physique, d'importance cruciale dans de très nombreuses applications. Au cours des dernières années, des progrès spectaculaires ont été réalisés dans l'élaboration et la compréhension des modèles continus et des systèmes d'équations aux dérivées partielles associés, qui posent des problèmes difficiles; par exemple l'existence de solutions à des problèmes variationnels "violemment" non convexes ou l'instabilité d'Hadamard pour des systèmes de type mixte. L'objectif de ce Séminaire était donc de permettre à des

spécialistes d'horizons différents (mathématiques appliquées, mécanique théorique ou numérique, physique du solide...) de se rencontrer et de faire le point. A travers un certain nombre d'exemples (micro-structures des cristaux, défauts dans les cristaux liquides, interfaces liquide-vapeur etc...), les conférenciers ont traité plusieurs points-clé de la modélisation (structure et évolution des interfaces, régularisation via l'énergie interfaciale, théories thermodynamiques (hors)équilibre etc...) et présenté quelques-uns des problèmes et des résultats mathématiques récents les plus typiques: étude des oscillations (mesures d'Young), solutions singulières, admissibilité des ondes de choc, rôle des perturbations d'ordre supérieur etc...

Ce Séminaire s'est déroulé dans une ambiance très agréable et nous pensons qu'il a été très fructueux, tant par la qualité des exposés et des contributions de ce volume que par les contacts qu'il a permis de nouer et de développer. Nous tenons à remercier particulièrement John BALL, James GLIMM, Morton GURTIN, Maurice KLEMAN et Gérard MAUGIN pour leur participation à l'organisation de cette rencontre.

Enfin, nous remercions particulièrement pour leur soutien:

C.N.R.S., N.S.F., S.M.A.I., G.A.M.N.I., D.R.E.T., European Research Office of the U.S. Army, Conseil Général des Alpes Maritimes, Université de Nice,

et pour leur aide dans l'organisation matérielle de ce Séminaire:

Marie-Christine BERMOND, Annie BOREL, Sonia CHAKOFF et Janine LACHKAR.

LE PRESENT DOCUMENT A ETE ETABLI EN EXECUTION DU CONTRAT N° 87/1454 PASSE PAR LA DIRECTION DES RECHERCHES ET ETUDES TECHNIQUES, DIRECTION SCIENTIFIQUE, SECTION SOUTIEN A LA RECHERCHE (DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT).

## CONTENTS

### I - Continuum Mechanics

#### *a - Liquid crystals*

- Y. Bouligand** : Clusters of singularities in liquid crystals 3  
**M.-C. Calderer** : Stability analysis of flows of liquid crystal polymers exhibiting a banding structure 10

#### *b - Elastic crystals*

- S. Cadet** : Coupled transverse-longitudinal solitons in elastic crystals 22  
**C. Collins, M. Luskin** : The computation of the austenitic-martensitic phase transition 34  
**R. James, D. Kinderlehrer** : Theory of diffusionless phase transitions 51

#### *c - Fluids*

- P. Casal, H. Gouin** : Invariance properties of inviscid fluids of grade N 85  
**M.E. Gurtin** : On diffusion in two-phase systems : the sharp interface versus the transition layer 99  
**B.J. Plohr** : Instabilities in shear flow of viscoelastic fluids with fading memory 113

#### *d - General theory*

- M. Kléman** : Singularities of the order parameter in condensed matter physics 128  
**I. Müller** : Swelling and shrinking of polyelectrolyte gels 138  
**P.A. Thompson, G.E.A. Meier** : Adiabatic phase changes, fast and slow 146

### II - Mathematical Analysis

#### *a - Systems of conservation laws*

- J. Glimm** : The continuous structure of discontinuities 177  
**M. Shearer, S. Schemter** : Riemann problems involving undercompressive shocks 187  
**M. Slemrod** : The viscosity-capillarity approach to phase transitions 201

#### *b - Miscellaneous topics*

- J.M. Ball** : A version of the fundamental theorem for Young measures 207  
**J. Carr, R.L. Pego** : Very slow phase separation in one dimension 216

- List of Participants 227