

# Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Series: Mathematisches Institut der Universität Bonn

Adviser: F. Hirzebruch

800

---

Marie-France Vignéras

Arithmétique des Algèbres  
de Quaternions

---



Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York 1980

**Auteur**

Marie-France Vignéras  
Ecole Normale Supérieure  
Mathématiques  
1, rue Maurice Arnoux  
92120 Montrouge  
France

AMS Subject Classifications (1980): 10-02, 10C05, 10D05, 12A80, 14H25

ISBN 3-540-09983-2 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York  
ISBN 0-387-09983-2 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks. Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1980  
Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.  
2141/3140-543210

## INTRODUCTION

Ce livre représente la rédaction d'un cours fait en 1976 à l'Université de Paris XI à Orsay sur l'arithmétique des algèbres de quaternions. On sait bien qu'une partie de cette théorie est un cas particulier des résultats connus sur les algèbres centrales simples. La raison d'être de ce livre est d'expliquer en détail certains aspects qui sont spéciaux aux algèbres de quaternions, et qui ont été développés par Eichler. Le plan de ce livre est le suivant : on commence par un rappel de la théorie générale des algèbres de quaternions, puis on les classe sur les corps locaux et les corps globaux, en utilisant la théorie de la fonction zêta, comme dans le livre de Weil [1]. On développe alors la théorie arithmétique, et les différentes formes de formules de trace en utilisant les techniques adéliques qui permettent de passer des résultats locaux, très simples, aux résultats globaux. Cette théorie est appliquée à l'étude des sous-groupes arithmétiques de  $SL(2)$ . Une des applications est la construction de surfaces riemanniennes isospectrales, mais non isométriques. Ces exemples sont les seuls exemples connus. Chaque chapitre est suivi d'exercices, ou illustré d'exemples.

Je remercie vivement Beck, Michon, Oesterlé, Ribet pour leur aide, l'Université de Paris XI pour son hospitalité, et Madame Bonnardel qui a frappé le manuscrit avec une grande compétence.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I. ALGEBRES DE QUATERNIONS SUR UN CORPS

	pages
§1 Algèbres de quaternions.....	1
Conjugaison, trace réduite, norme réduite, $M(2,K)$ corps neutralisant, $M$ -représentation, quaternions de Hamilton, $H$ .	
§2 Théorème des automorphismes. Corps neutralisants.....	6
$Aut(H)$ , $Aut(H,L)$ , caractérisation des algèbres de matrices, th. de Frobenius, th. de Wedderburn, caracté- risation des corps neutralisants, produit tensoriel, corestriction.	
§3 Géométrie.....	11
Quaternions purs, automorphismes et isométries, isomor- phismes classiques, groupe des commutateurs, groupes finis de rotations de $\mathbb{R}^3$ , groupes finis de quaternions réels.	
§4 Ordres et idéaux.....	19
Anneau de Dedekind, élément entier, ordre maximal, ordre d'Eichler, idéal (entier, bilatère, normal, principal), propriétés des idéaux bilatères, ordres liés, groupe des unités, norme réduite d'un idéal, différente, discrimi- nant, classes d'idéaux, types d'ordres, ordres maximale- ment plongés, classes de conjugaison, unités, équations polynômiales en quaternions.	

CHAPITRE II. ALGEBRES DE QUATERNIONS SUR UN CORPS LOCAL

§1 Classification.....	31
Corps local, invariant de Hasse, symbole de Hilbert, ramification, valuation dans les corps de quaternions.	
§2 Etude de $M(2,K)$ .....	37
L'arbre des ordres maximaux, ordres d'Eichler, normali- sateurs.	
§3 Ordres maximalelement plongés.....	42
Symboles d'Artin et d'Eichler, nombre de plongements maximaux modulo un groupe, conducteur d'un ordre.	

§4	Fonctions zêta.....	47
	Norme, définition classique de la fonction zêta, module, mesures normalisées, caractère et fonction canonique, fonction zêta associée à une fonction de l'espace de Schwartz-Bruhat et à un quasi-caractère, mesure de Tamagawa et discriminant, calculs de volumes.	

### CHAPITRE III. ALGÈBRES DE QUATERNIONS SUR UN CORPS GLOBAL

§1	Adèles.....	57
	Ramification, théorèmes fondamentaux.	
§2	Fonctions zêta. Nombres de Tamagawa.....	64
	Définition classique, formule multiplicative, fonction zêta associée à une fonction de l'espace de Schwartz-Bruhat et à un quasi-caractère, équation fonctionnelle, nombre de Tamagawa.	
§3	Classification.....	74
	Caractérisation des algèbres de matrices, principe de Hasse-Minkowski pour les formes quadratiques, loi de réciprocité du symbole de Hilbert, loi de réciprocité quadratique, th. des normes dans les extensions quadratiques, caractérisation des corps neutralisants et des sous-corps commutatifs maximaux. Th. du corps de classe pour les extensions quadratiques.	
§4	Théorème des normes et d'approximation forte.....	79
	Condition d'Eichler.	
§5	Ordres et idéaux	
	A. Propriétés générales.....	82
	Passage local-global pour les réseaux, propriété locale, niveau, discriminant, caractérisation des ordres maximaux, propriétés des idéaux normaux.	
	B. Nombre de classes d'idéaux et types d'ordres.....	87
	Dictionnaire global-adélique, finitude du nombre de classes.	
	C. Formules de trace pour les plongements maximaux.....	92
	Nombres de classes de conjugaison, symboles d'Artin et d'Eichler.	

CHAPITRE IV. APPLICATIONS AUX GROUPES ARITHMETIQUES

§1 Groupes de quaternions..... 103  
 Groupes de congruence, commensurables, arithmétiques,  
 volume, groupe modulaire, groupe de Picard, groupe  
 modulaire de Hilbert.

§2 Surfaces de Riemann..... 111  
 Homographies, métrique, longueur, aire, géodésiques,  
 isométries, aires des polygones, les différents types  
 d'homographie ; parabolique, elliptique d'angle  $\theta$ ,  
 hyperbolique de norme  $N$ , domaine fondamental, cycles,  
 pointes, genre, mesure d'Euler-Poincaré, rationalité de  
 $\zeta_K(-1)$ .

§3 Exemples et applications

A. Groupes de congruence..... 120

B. Normalisateurs..... 121

C. Construction d'un domaine fondamental..... 123

D. Courbes géodésiques minimales..... 128

E. Exemples de surfaces riemanniennes isospectrales mais  
 non isométriques..... 129

F. Espace hyperbolique de dimension 3..... 133  
 Métrique hyperbolique, fonction de Lobachevski, volume  
 d'un tétraèdre, domaine fondamental du groupe de Picard.

CHAPITRE V. ARITHMETIQUE DES QUATERNIONS QUAND LA CONDITION  
 D'EICHLER N'EST PAS VERIFIEE

§1 Unités..... 138  
 Théorème de Dirichlet, régulateur.

§2 Nombre de classes..... 142  
 Formule analytique de Dirichlet, masse, trace des matrices  
 d'Eichler-Brandt, nombre de classes et types d'ordre.

§3 Exemples

A. Algèbres de quaternions sur  $\mathbb{Q}$  ..... 145

B. Graphes arithmétiques..... 146

C. Isomorphismes classiques..... 148

D. Construction du réseau de Leech..... 149

E. Tables..... 152

BIBLIOGRAPHIE..... 157

INDEX..... 165