

# Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1028

---

Séminaire d'Analyse  
P. Lelong – P. Dolbeault –  
H. Skoda

Années 1981/1983

Edité par P. Lelong, P. Dolbeault et H. Skoda

---



Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York Tokyo 1983

## **Editeurs**

Pierre Lelong, Pierre Dolbeault, Henri Skoda  
Université Paris VI, Mathématiques  
Place Jussieu, Tour 4546, 75230 Paris CEDEX 05, France

AMS Subject Classifications (1980): 32A45, 32C05, 32C30, 32F05,  
32F15, 32H30, 32L05, 34A20, 35A20, 58E20

ISBN 3-540-12731-3 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo  
ISBN 0-387-12731-3 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin Tokyo

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek.

Séminaire P. Lelong – P. Dolbeault – H. Skoda (Analyse): Séminaire P. Lelong –  
P. Dolbeault – H. Skoda (Analyse): années ... – Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer  
1980/81 u. d. T.: Séminaire Pierre Lelong, Henri Skoda (Analyse): Seminaire Pierre Lelong,  
Henri Skoda (Analyse) 1981/83 (1983)

(Lecture notes in mathematics; Vol. 1028)

ISBN 3-540-12731-3 (Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo)

ISBN 0-387-12731-3 (New York, Heidelberg, Berlin, Tokyo)

NE: GT

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks. Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to "Verwertungsgesellschaft Wort", Munich.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1983

Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.  
2146/3140-543210

## I N T R O D U C T I O N

Le présent volume contient les exposés faits de la fin de 1981 au début de 1983 au Séminaire d'Analyse P.LELONG-P.DOLBEAULT-H.SKODA. Il fait suite au volume n° 919 des Lecture Notes.

Les thèmes étudiés concernent l'analyse et, en particulier l'analyse complexe, mais aussi la géométrie kaehlérienne, l'étude des fibrés vectoriels, et celle des systèmes différentiels. Donnons un bref résumé des problèmes traités :

1. L'exposé de L.GRUMAN donne des résultats sur la distribution des valeurs des applications holomorphes.

Si  $X$  est un ensemble analytique de dimension pure  $p$  dans  $C^n$  et  $\ell \in G_q(C^n)$  un sous-espace de  $C^n$  de dimension  $q \geq n-p$ , l'indicatrice  $\sigma_X(r) = \text{aire de } X \cap B_n(o, r)$  donne une majoration asymptotique de  $\sigma_X(\ell, r)$ , l'aire de  $\ell \cap X \cap B_n(o, r)$  pour  $q \geq n-p$ , sauf pour les  $\ell$  appartenant à un ensemble exceptionnel  $E_X \in G_q(C^n)$  qu'on étudie. On obtient aussi une minoration de  $\sigma_X(\ell, r)$  hors d'un ensemble  $E'_X$ . Quand  $\sigma_X(r)$  est d'ordre fini,  $E'_X \cap Y$  est localement pluripolaire sur les sous-ensembles  $Y$  de la grassmannienne  $G_q$ ; l'exposé complète un exposé antérieur (Lecture Notes n° 822) par des résultats récents.

2. L'article de B.A.TAYLOR compare pour les compacts  $K$  de la boule unité de  $C^n$  deux notions capacitaires; on utilise la fonction extrémale de  $K$  dans  $C^n$ , soit  $u_K^*$ .

On établit  $\int_{|z|=1} u_K^*(z) d\sigma(z) \leq n\gamma(K)$  où  $\gamma(K)$  est la  $\lim \sup$  de  $u_K^*(z) - \log|z|$

pour  $|z| \rightarrow +\infty$ . Si l'on pose  $T(K) = \exp[ -\sup_{|z| \leq 1} u_K^*(z) ]$ , et  $C(K) = e^{-\gamma(K)}$ ,

on obtient en utilisant une inégalité de N.SIBONY, une comparaison

$T(K) \leq C(K) \leq AT(K)^\delta$  où les constantes  $A, \delta > 0$ , sont indépendantes du compact  $K$  pris dans la boule unité.

3. L'article de P.LELONG montre que l'opérateur de Monge-Ampère complexe s'annule sur un ensemble partout dense pour  $L^1_{loc}$  dans le cône des fonctions plurisousharmoniques positives et l'opérateur est discontinu au voisinage de toute fonction  $V$  de ce cône.

3. Le mémoire de J.-P. DEMAILLY et B. GAVEAU traite un problème voisin du précédent en prenant un point de vue statistique :  $\Omega$  étant un domaine pseudo-convexe de  $\mathbb{C}^n$ , et  $F = (F_1, \dots, F_p)$  une application holomorphe  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , avec croissance donnée, on étudie la courbure de Ricci des surfaces de niveau  $X_a = F^{-1}(a)$  lorsque  $X_a$  est sans singularité (on munit  $X_a$  de la métrique  $\alpha = \frac{1}{4} dd^c \|z\|^2$ ) ; on donne un contrôle de croissance "en moyenne" par rapport à  $a$  pour la forme de courbure  $R$  à l'approche de  $b\Omega$ , en utilisant essentiellement des majorations de formes différentielles et de courants positifs.

4. L'exposé de H. BEN MESSAOUD montre que si  $\theta$  est un courant positif fermé, de dimension  $p$  dans  $\mathbb{C}^n$ , il existe pour tout  $\ell$ ,  $p < \ell < n-1$  un courant  $T$  de dimension  $\ell$  qui a même nombre de Lelong que  $\theta$  en tout point de  $\mathbb{C}^n$ , ce qui étend le résultat connu relatif à  $\ell = n-1$ . La construction de  $T$  peut se faire avec contrôle de croissance de l'indicatrice  $\nu_T(r)$  par  $\nu_\theta(r)$ .

5. L'article de N. MOK montre qu'une variété kaehlérienne  $X$  de courbure bisecttionnelle positive est analytiquement isomorphe à une variété affine dès qu'est vérifiée une certaine majoration de la courbure scalaire en fonction de la distance géodésique, en même temps qu'une majoration du volume des tranches  $B(0,r) \cap X$ .

6. Le problème de Neumann pour le  $\bar{\partial}$  et ses estimations sous-elliptiques, dans les domaines pseudo-convexes de  $\mathbb{C}^n$  fait l'objet de l'article de A. TALHAOUI ; il donne des conditions locales suffisantes en un point frontière pour l'existence d'une solution dans le cas d'une pseudo-convexité faible du bord  $b\Omega$ . En un point de sous-ellipticité il établit pour les ordres de contact des courbes analytiques complexes avec  $b\Omega$  une borne supérieure conjecturée par Th. BLOOM.

7. L'article de J. LE POTIER apporte des résultats concernant l'existence de fibrés vectoriels holomorphes de rang  $r = 2$  sur une surface complexe non algébrique  $M$ , compacte avec nombre de Betti  $b_1 = \text{rang } H^1(M, \mathbb{Z}) = 0$  et avec fibré canonique  $K(M) = \det. T^*(M)$  trivial, quand on se fixe les classes de Chern  $c_1$  et  $c_2$  de  $E$ . Le problème conduit à l'étude des classes d'isomorphismes de fibrés sur  $M$  en supposant nul le groupe de Picard.

8. L'exposé de P.de BARTOLOMEIS étudie les applications harmoniques  $N \rightarrow M$  de variétés riemanniennes; les applications holomorphes ou antiholomorphes sont harmoniques si  $N, M$  sont kaehlériennes, et l'on cherche des cas où l'implication inverse est vraie ce qui conduit à étudier le cas des applications pluriharmoniques. On donne un énoncé où  $N$  possède une exhaustion plurisousharmonique et  $M$  a une courbure positive ; les applications harmoniques qui minimisent l'énergie sont alors holomorphes .

9. L'exposé de B.FUGLEDE vise à étendre la théorie des fonctions finement holomorphes de  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{C}^d$ ,  $d > 1$  ; ceci suppose d'abord le choix d'une topologie "fine" sur  $\mathbb{C}^d$ . On compare  $\tau^d$  (topologie produit des topologies fines sur  $\mathbb{C}$ ),  $\tau_{\text{psh}}$  la moins fine qui rend continues les fonctions plurisousharmoniques, et enfin  $\tau_{2d}$ , qui est la topologie fine sur  $\mathbb{R}^{2d}$ ; on a  $\tau^d \subset \tau_{\text{psh}} \subset \tau_{2d}$  et l'exposé donne pour  $\tau^d$  des résultats assez analogues au cas  $n = 1$ ,  $\tau^d$  dépendant toutefois du choix des axes. On obtient là une approche du cas  $\tau_{\text{psh}}$ , qui est peut être le plus intéressant pour la suite de cette recherche.

10. C'est encore une extension de l'analyse complexe que traite l'exposé de G.RABY, en démontrant une version du Nullstellensatz pour deux fonctions sous-analytiques de classe  $C^r$ ,  $r \geq 0$ . Il montre que les fonctions continues, sous-analytiques sur un ensemble fermé et sous-analytique  $Y$  dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sont des restrictions de fonctions continues et sous-analytiques dans  $\Omega$ .

11. Les exposés suivants concernent l'étude des systèmes différentiels. Celui de H.AIRAULT reprend l'étude classique (R.FUCHS, PAINLEVE, R.GARNIER) des conditions d'intégrabilité d'un système linéaire ; des exemples permettent d'explorer la liaison entre le système linéaire et les équations qui expriment la condition d'intégrabilité ; on examine le cas où elles conduisent à des équations à points critiques fixes ; dans certains cas on peut se ramener à un système hamiltonien ; une étude plus poussée concerne les équations 3 et 5 de Painlevé.

12. L'étude des systèmes de Pfaff ayant une singularité polaire normale est l'objet d'un gros mémoire de B.KLARES et C.SADLER ; ce cas se ramène à celui d'une singularité à une seule variable pour une forme polynôme et l'on donne des développements de la solution et une version convergente pour la monodromie.

13. L'exposé de J.-P.DEMAILLY concerne les opérateurs microdifférentiels analytiques ; il donne une démonstration d'un théorème de KASHIWARA de la constructibilité du faisceau des solutions d'un système holonome en utilisant des stratifications particulières de Whitney d'un système différentiel sur un ouvert à frontière non caractéristique.

14. L'article de H.CHARRIERE étudie l'existence de secteurs spiralés dans  $C$  ou  $C^n$  de sommet l'origine dans lesquels on a une solution holomorphe de l'équation  $\tau u = F(x, u)$  admettant un développement asymptotique en  $0$ , où  $\tau$  est un champ de vecteurs singulier en  $0$  du type  $\tau = \sum_1^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , et ceci pour  $F$  holomorphe au voisinage de  $(0,0)$  ; elle obtient des énoncés qui généralisent ceux de S.KAPLAN dans ce problème étudié par H.Poincaré et qui bénéficie d'un intérêt nouveau.

Nous remercions les auteurs qui nous ont confié leurs textes, Madame Orion qui a préparé les manuscrits, et l'édition Springer qui édite et diffuse ce séminaire en contribuant ainsi à faire connaître rapidement des résultats nouveaux.

P.LELONG, P.DOLBEAULT, H.SKODA

T A B L E D E S M A T I E R E S

[1]	AIRAULT (H.). - Etude des conditions d'intégrabilité associées à un système différentiel linéaire .....	1
[2]	de BARTOLOMEIS (P.). - Sur l'analyticité complexe de certaines applications harmoniques .....	27
[3]	BEN MESSAOUD (H.). - Courants intermédiaires associés à un courant positif fermé .....	41
[4]	CHARRIÈRE (H.). - Etude asymptotique dans des secteurs spiralés autour de l'origine de l'équation $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = F(x, u)$ et théorème de BOREL-RITT .....	69
[5]	DEMAILLY (J.-P.). - Constructibilité des faisceaux de solutions des systèmes différentiels holonomes d'après Masaki KASHIWARA .....	83
[6]	DEMAILLY (J.-P.) et GAVEAU (B.). - Majoration statistique de la cour- bure d'une variété analytique .....	96
[7]	GRUMAN (L.). - Ensembles exceptionnels pour les applications holomorphes dans $\mathbb{C}^n$ .....	125
[8]	KLARES (B.) et SADLER (Ch.). - Systèmes de Pfaff et algèbres de Lie libres, étude d'une singularité polaire normale. ....	163
[9]	LELONG (P.). - Discontinuité et annulation de l'opérateur de Monge- Ampère complexe .....	219

- [10] LE POTIER (J.). - Fibrés vectoriels sur les surfaces K3 ..... 225
- [11] MOK (M.). - Application of an Extension Theorem for Closed Positive  
Currents to Kähler Geometry ..... 239
- [12] RABY (G.). - Théorème des zéros sous-analytiques et inégalités de  
ŁOJASIEWICZ ..... 253
- [13] TALHAOUI (A.). - Le problème  $\bar{\partial}$  de Neumann et ses estimations sous-  
elliptiques ..... 266
- [14] TAYLOR (B.A.). - An estimate for an extremal plurisubharmonic function  
on  $\mathbb{C}^n$  ..... 318