Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

489

Jacques Bair
René Fourneau

Etude Géométrique des Espaces Vectoriels

Une Introduction

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1975

Authors
Dr. Jacques Bair
Dr. René Fourneau
Institut de Mathématique
de l'Université de Liège
B-4000 Liège

Library of Congress Cataloging in Publication Data

Bair, Jacques.
Étude géometrique des espaces vectoriels.

(Lecture notes in mathematics ; 489)
1. Convex sets. 2. Vector spaces. I. Fourneau, René, joint author. II. Title. III. Series: Lecture notes in mathematics (Berlin) ; 489.
QA3.L28 no. 489 [QA640] 512'.523 75-30920

AMS Subject Classifications (1970): 46-02, 52-02, 52A05

ISBN 3-540-07413-9 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-07413-9 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Ces notes reproduisent presque fidèlement le texte d'un seminaire que nous avons tenu à l'Université de Liège, durant le premier semestre 1974.

Le but était de fournir une introduction aux développements récents de la géométrie des espaces vectoriels réels, en mettant l'accent sur les généralisations de la convexité et sur le traitement des espaces de dimension infinie.

A l'origine, il était prévu de présenter essentiellement les résultats obtenus récemment dans ce domaine par les membres du service du Professeur Jongmans. Dans le but d'éviter à l'auditeur un recours trop fréquent à la littérature, il a été nécessaire de présenter des travaux de divers auteurs, notamment de V.L. Klee. Ce souci a conduit à rassembler en un tout cohérent une théorie dispersée jusqu'à présent dans un grand nombre d'articles.

Nous avons jugé utile de fournir quelques applications de la théorie, ce qui nous a amenés à aborder des domaines aussi divers que les espaces vectoriels ordonnés et les algèbres de fonctions.

C'est un plaisir pour nous de remercier Monsieur le Professeur F. Jongmans pour ses encouragements et pour l'intérêt qu'il a toujours porté à nos recherches.

Nos remerciements vont également aux personnes qui ont participé à ce séminaire et qui, par leur critique constructive, nous ont apporté une aide précieuse.

Enfin nous tenons à remercier Mesdames Naa et Streel qui se sont chargées de la dactylographie du manuscrit à ses divers stades.

Liège, juillet 1974.

Jacques Bair | René Fourneau

GUIDE POUR LE LECTEUR

Il n'est nul besoin, pour prendre connaissance d'un chapitre particulier, de lire in extenso les chapitres précédents. Ce guide est destiné à permettre au lecteur de suivre le chemin le plus direct conduisant à une partie donnée du texte.

Première partie : opérateurs algébriques fondamentaux

Cette première partie est consacrée à l'étude des opérateurs d'internat, d'attenance, d'enveloppe algébrique, de marge et de fermeture algébrique. Ces opérateurs utilisés de façon épisodique par bon nombre d'auteurs, dont Klee, Köthe, Nikodym et Valentine, sont apparentés à certains opérateurs topologiques. A l'exemple de F. Jongmans, nous avons adopté une terminologie voisine de celle de G. Köthe, ce qui nous fait appeler "algébriques" des opérateurs qui sont liés à la structure $\mathbb{R}$-vectorielle (plus particulièrement à la structure de corps ordonné archimédien complet de $\mathbb{R}$), mais auxquels le qualificatif "géométriques" conviendrait peut-être mieux.

Les connaissances requises pour la lecture de cette partie se réduisent aux éléments de l'algèbre linéaire réelle.

Les chapitres I.1, I.3, I.4, I.5 et I.6 constituent le tronc de ce séminaire, leur lecture (ainsi que celle de I.2 où des exemples illustrent les notions introduites) est essentielle pour la compréhension de n'importe quel chapitre ultérieur. Les autres chapitres sont moins fondamentaux.

Deuxième partie : itérés transfinis des opérateurs algébriques

Les problèmes rencontrés dans l'étude de la fermeture algébrique ont conduit à considérer les itérés transfinis des opérateurs fondamentaux.

La lecture de ce chapitre nécessite la connaissance des nombres ordinaux (voir Kamke [1], Hewitt-Stromberg [1] ou Nollet [1]) et des chapitres I.8, I.10 et I.11, en plus du tronc commun.

Troisième partie : applications

La première application (chapitre III.1) que nous envisageons est l'étude des partitions convexes d'un espace vectoriel. Ces partitions sont liées à la séparation de plusieurs ensembles convexes. Le seul tronc commun suffit pour aborder le chapitre.

Le (très long) chapitre suivant expose la théorie des espaces vectoriels ordonnés en s'inspirant de la présentation de G. Jameson [1]. Ici, les opérateurs algébriques se révèlent extrêmement précieux (cf. par exemple le théorème III.2.2.3 et le sous-chapitre III.2.3) et même mieux adaptés que les opérateurs topologiques dans un espace vectoriel topologique ordonné.

Chemin faisant, le lecteur rencontrera une preuve géométrique nouvelle du théorème de Choquet-Kendall et une propriété remarquable des simplexes de Choquet algébriquement fermés non algébriquement bornés dues aux auteurs de cet ouvrage (cf. Bair-Fourneau [1] et [2]).

La lecture de ce chapitre requiert la connaissance du tronc commun et de III.1.1. De plus, le sous-chapitre III.2.5 est, pour l'essentiel, indépendant du reste de ce chapitre.

Le chapitre III.3 présente une initiation à la programmation mathématique dans un espace vectoriel; le lecteur, au courant des chapitres de base, lira ce passage sans difficulté.

Les liens entre les notions géométriques de facette et de classe de Klee et leurs rapports surprenants avec les parties de Gleason relatives à une algèbre de fonctions sont montrés en III.4. Seul le paragraphe III.4.4 exige quelques connaissances spéciales, à savoir des éléments de la théorie des espaces normés.

Quatrième partie : considérations sur la nature de l'espace

Cette partie débute par des caractérisations de la dimension d'un espace vectoriel réel en termes d'opérateurs fondamentaux. La seconde partie est nécessaire pour la lecture de ce chapitre.

Les chapitres suivants jettent les bases d'une étude semblable à celle faite dans la première partie lorsque le corps de base n'est plus le corps des réels.

Cinquième partie : propriétés topologiques

On détermine ici les rapports entre les opérateurs algébriques et les opérateurs associés à une topologie non nécessairement vectorielle, et on introduit deux topologies liées aux opérateurs algébriques. Toute la première partie est nécessaire pour aborder celle-ci, de même que certains résultats du chapitre II.1.