

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

489

Jacques Bair
René Fourneau

Etude Géométrique
des Espaces Vectoriels
Une Introduction



Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1975

Authors

Dr. Jacques Bair

Dr. René Fourneau

Institut de Mathématique

de l'Université de Liège

B-4000 Liège

Library of Congress Cataloging in Publication Data

Bair, Jacques.

Étude géométrique des espaces vectoriels.

(Lecture notes in mathematics ; 489)

1. Convex sets. 2. Vector spaces. I. Fourneau, René, joint author. II. Title. III. Series: Lecture notes in mathematics (Berlin) ; 489.

QA3.L28 no. 489 [QA640] 512'.523 75-30920

AMS Subject Classifications (1970): 46-02, 52-02, 52A05

ISBN 3-540-07413-9 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York

ISBN 0-387-07413-9 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1975

Printed in Germany

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	v
GUIDE POUR LE LECTEUR	vi
<u>I. PREMIERE PARTIE : OPERATEURS ALGEBRIQUES</u> FONDAMENTAUX	1
I. 1 Généralités	1
I. 2 Exemples	5
I. 3 Opérateurs algébriques et ensembles convexes	7
I. 4 Opérateurs algébriques et ensembles étoilés	10
I. 5 Opérateurs algébriques et ensembles algébri- quement expansés	12
I. 6 Opérateurs algébriques et ensembles algébri- quement irradiés	14
I. 7 Nouvelles versions des définitions	17
I. 8 Opérations sur les opérateurs algébriques	28
I. 9 Relations entre les opérateurs algébriques	37
I.10 Opérateurs et applications	40
I.11 Fermeture algébrique	47
<u>II. DEUXIEME PARTIE : ITERES TRANSFINIS DES OPERATEURS</u> ALGEBRIQUES	62
II.1 Itérés transfinis de l'enveloppe algébrique	62
II.2 Itérés transfinis de l'internat	70
<u>III. TROISIEME PARTIE : APPLICATIONS</u>	75
III.1 Partitions convexes	75
III.2 Application aux espaces vectoriels ordonnés	84
III.2.1 Cônes et préordres	84
III.2.2 Unités d'ordre	91
III.2.3 Préordres archimédiens	93
III.2.4 Ordres linéaires totaux et théorèmes de séparation	99
III.2.5 Le théorème de Choquet-Kendall et la géométrie des simplexes de Choquet	105
III.3 Programmation mathématique	118
III.4 Facettes, faces, classes de Klee et parties de Gleason	124
<u>IV. QUATRIEME PARTIE : CONSIDERATIONS SUR LA NATURE</u> DE L'ESPACE	138
IV.1 Caractérisations de la dimension de l'espace	138
IV.2 K-espaces vectoriels	142
IV.3 Espaces vectoriels sur un corps ordonné	144
IV.4 Espaces vectoriels sur un sur-corps des réels	147
IV.5 Espaces vectoriels sur un corps valué non-archimédien	149
IV.6 Généralisations de la convexité	153

V. <u>CINQUIEME PARTIE</u> : PROPRIETES TOPOLOGIQUES	158
V.1 Relations entre opérateurs algébriques et topologiques	159
V.2 Topologie de l'internat	165
V.3 Topologie naturelle	168
BIBLIOGRAPHIE	171
INDEX TERMINOLOGIQUE	183
INDEX DES SYMBOLES	185

INTRODUCTION

Ces notes reproduisent presque fidèlement le texte d'un séminaire que nous avons tenu à l'Université de Liège, durant le premier semestre 1974.

Le but était de fournir une introduction aux développements récents de la géométrie des espaces vectoriels réels, en mettant l'accent sur les généralisations de la convexité et sur le traitement des espaces de dimension infinie.

À l'origine, il était prévu de présenter essentiellement les résultats obtenus récemment dans ce domaine par les membres du service du Professeur Jongmans. Dans le but d'éviter à l'auditeur un recours trop fréquent à la littérature, il a été nécessaire de présenter des travaux de divers auteurs, notamment de V.L. Klee. Ce souci a conduit à rassembler en un tout cohérent une théorie dispersée jusqu'à présent dans un grand nombre d'articles.

Nous avons jugé utile de fournir quelques applications de la théorie, ce qui nous a amenés à aborder des domaines aussi divers que les espaces vectoriels ordonnés et les algèbres de fonctions.

C'est un plaisir pour nous de remercier Monsieur le Professeur F. Jongmans pour ses encouragements et pour l'intérêt qu'il a toujours porté à nos recherches.

Nos remerciements vont également aux personnes qui ont participé à ce séminaire et qui, par leur critique constructive, nous ont apporté une aide précieuse.

Enfin nous tenons à remercier Mesdames Naa et Streel qui se sont chargées de la dactylographie du manuscrit à ses divers stades.

Liège, juillet 1974.

Jacques Bair

René Fourneau

GUIDE POUR LE LECTEUR

Il n'est nul besoin, pour prendre connaissance d'un chapitre particulier, de lire in extenso les chapitres précédents. Ce guide est destiné à permettre au lecteur de suivre le chemin le plus direct conduisant à une partie donnée du texte.

Première partie : opérateurs algébriques fondamentaux

Cette première partie est consacrée à l'étude des opérateurs d'internat, d'atténance, d'enveloppe algébrique, de marge et de fermeture algébrique. Ces opérateurs utilisés de façon épisodique par bon nombre d'auteurs, dont Klee, Köthe, Nikodym et Valentine, sont apparentés à certains opérateurs topologiques. A l'exemple de F. Jongmans, nous avons adopté une terminologie voisine de celle de G. Köthe, ce qui nous fait appeler "algébriques" des opérateurs qui sont liés à la structure \mathbb{R} -vectorielle (plus particulièrement à la structure de corps ordonné archimédien complet de \mathbb{R}), mais auxquels le qualificatif "géométriques" conviendrait peut-être mieux.

Les connaissances requises pour la lecture de cette partie se réduisent aux éléments de l'algèbre linéaire réelle.

Les chapitres I.1, I.3, I.4, I.5 et I.6 constituent le tronc de ce séminaire, leur lecture (ainsi que celle de I.2 où des exemples illustrent les notions introduites) est essentielle pour la compréhension de n'importe quel chapitre ultérieur. Les autres chapitres sont moins fondamentaux.

Deuxième partie : itérés transfinis des opérateurs algébriques

Les problèmes rencontrés dans l'étude de la fermeture algébrique ont conduit à considérer les itérés transfinis des opérateurs fondamentaux.

La lecture de ce chapitre nécessite la connaissance des nombres ordinaux (voir Kamke [1], Hewitt-Stromberg [1] ou Nolle [1]) et des chapitres I.8, I.10 et I.11, en plus du tronc commun.

Troisième partie : applications

La première application (chapitre III.1) que nous envisageons est l'étude des partitions convexes d'un espace vectoriel. Ces partitions sont liées à la séparation de plusieurs ensembles convexes. Le seul tronc commun suffit pour aborder le chapitre.

Le (très long) chapitre suivant expose la théorie des espaces vectoriels ordonnés en s'inspirant de la présentation de G. Jameson [1]. Ici, les opérateurs algébriques se révèlent extrêmement précieux (cf. par exemple le théorème III.2.2.3 et le sous-chapitre III.2.3) et même mieux adaptés que les opérateurs topologiques dans un espace vectoriel topologique ordonné.

Chemin faisant, le lecteur rencontrera une preuve géométrique nouvelle du théorème de Choquet-Kendall et une propriété remarquable des simplexes de Choquet algébriquement fermés non algébriquement bornés dues aux auteurs de cet ouvrage (cf. Bair-Fourneau [1] et [2]).

La lecture de ce chapitre requiert la connaissance du tronçon commun et de III.1.1. De plus, le sous-chapitre III.2.5 est, pour l'essentiel, indépendant du reste de ce chapitre.

Le chapitre III.3 présente une initiation à la programmation mathématique dans un espace vectoriel; le lecteur, au courant des chapitres de base, lira ce passage sans difficulté.

Les liens entre les notions géométriques de facette et de classe de Klee et leurs rapports surprenants avec les parties de Gleason relatives à une algèbre de fonctions sont montrés en III.4. Seul le paragraphe III.4.4 exige quelques connaissances spéciales, à savoir des éléments de la théorie des espaces normés.

Quatrième partie : considérations sur la nature de l'espace

Cette partie débute par des caractérisations de la dimension d'un espace vectoriel réel en termes d'opérateurs fondamentaux. La seconde partie est nécessaire pour la lecture de ce chapitre.

Les chapitres suivants jettent les bases d'une étude semblable à celle faite dans la première partie lorsque le corps de base n'est plus le corps des réels.

Cinquième partie : propriétés topologiques

On détermine ici les rapports entre les opérateurs algébriques et les opérateurs associés à une topologie non nécessairement vectorielle, et on introduit deux topologies liées aux opérateurs algébriques. Toute la première partie est nécessaire pour aborder celle-ci, de même que certains résultats du chapitre II.1.