Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

487

Hans Martin Reimann
Thomas Rychener

Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1975

Authors
Prof. Hans Martin Reimann
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bern
3000 Bern/Schweiz

Prof. Thomas Rychener
Mathematisches Institut
Universität Bern
3000 Bern/Schweiz

Library of Congress Cataloging in Publication Data

Reimann, Hans M 1941-
Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation.

(Lecture notes in mathematics ; 487)
Bibliography: p.
Includes index.
1. Functions. 2. Duality theory (Mathematics)
3. Quasiconformal mappings. 4. Potential, Theory of. I. Rychener, Thomas, 1947- joint author. II. Title. III. Series: Lecture notes in mathematics (Berlin) ; 487.
QA3.L28 no. 487 [QA331] 510'.8s [515] 75-25930

AMS Subject Classifications (1970): 26A33, 26A69, 30A60, 30A78, 31B15, 31B20, 44A25, 50D45

ISBN 3-540-07404-X Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-07404-X Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

Printed in Germany
Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

EINLEITUNG

Der vorliegende Band entstand aus einem Seminar über Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation (BMO), das wir im ersten Halbjahr 1974 in Zürich hielten. Die Darstellung gibt einen Einblick in die Theorie der BMO-Funktionen unter den folgenden drei Hauptgesichtspunkten:

- Transformationsverhalten von BMO (Kapitel I und V)
- Der Satz von Gehring und die A_p-Bedingung von Muckenhoupt (Kapitel II und III)
- Der Dualitätssatz von Fefferman und fraktionelle Integration (Kapitel IV und VI)

Die hierzu verwendeten Techniken sind dementsprechend verschiedener Art. Während für den Satz von Fefferman und seine vielfältigen Folgerungen harmonische Funktionen im oberen Halbraum verwendet werden, kommen für die Untersuchung über das Transformationsverhalten vor allem geometrische Ueberlegungen zum Zug. Das fundamentale Ergebnis von John-Nirenberg bildet die methodische Grundlage für die Kapitel II und III.

Die vorliegende Darstellung ist nicht vollständig. So wurde der Zusammenhang von BMO mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und der Martingaletheorie nicht berücksichtigt. (Zur Theorie der Differentialgleichungen ist man auf die Originalarbeiten angewiesen [20], [24], [25], [44], zur Martingaletheorie konsultiere man Garsia's Buch[13].) Die Interpolationstheorie wurde nur am Rande erwähnt (Kapitel V, VI).

Die Definition der BMO-Funktionen wird im ersten Kapitel diskutiert. Einige elementare Methoden werden entwickelt, die gestatten, die Invarianz des Raumes BMO unter Möbiustransformationen und unter der stereographischen Projektion nachzuweisen. Mit Ausnahme des Hilfssatzes I handelt es sich dabei um neue Resultate.

Die Sätze von John-Nirenberg [21] und Gehring[14] werden einander im zweiten Kapitel gegenübergestellt. Das gemeinsame der Beweistechnik wird dem aufmerksamen Leser nicht entgehen. In diesem Zusammenhang sollten auch die Sätze von Muckenhoupt aus dem dritten Kapitel gesehen werden.

Bei der Charakterisierung von BMO als Dualraum des Hardy-Raumes H^1 folgen wir weitgehend der Darstellung aus der Arbeit von Fefferman und Stein [11] . Ein weiteres Kapitel ist der Invarianz von BMO unter quasikonformen Abbildung gewidmet [32] .

In einem letzten Kapitel werden Riesz-Potentiale betrachtet. Dabei vermittelt der Raum BMO zwischen den L^p- beziehungsweise H^p- Räumen und den Räumen der Hölderstetigen Funktionen modulo Polynome. Obwohl dieser Aspekt in dieser oder jener Form bereits behandelt wurde ([22] und [31]), werden hier die Riesz-Potentiale von einem neuen Gesichtspunkt aus betrachtet.

Wir fühlen uns den Teilnehmern des Zürcher Seminars gegenüber zu besonderem Dank für ihre Aufmerksamkeit verpflichtet. Zudem möchten wir an dieser Stelle Frau G. Zbinden für das sorgfältige Tippen des Manuskripts unseren besonderen Dank aussprechen.

Bern im Herbst 1974

HM Reimann

Th Rychener

INHALTSVERZEICHNIS