Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

11

Jean-Pierre Serre

Algèbre Locale Multiplicités

Cours au Collège de France, 1957–1958
rédigé par Pierre Gabriel
Troisième édition

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Author

Jean-Pierre Serre
Collège de France
Chaire d'Algèbre et Géométrie
11, place Marcelin Berthelot
F-75231 Paris Cedex 05

3rd Edition 1975
2nd Corrected Printing 1997

Mathematics Subject Classifications (1970): 13-02, 13C15, 13D05, 13H05, 13H10, 13H15, 14O15

ISBN 3-540-07028-1 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-07028-1 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Library of Congress Cataloging in Publication Data
Serre, Jean-Pierre.
Algèbre locale, multiplicités.
(Lecture notes in mathematics ; 11)
Bibliography: p.
1. Geometry, Algebraic. 2. Rings (Algebra)
3. Modules (Algebra) I. Title. II. Series:
Lecture notes in mathematics (Berlin) ; 11.
QA3.L28 no. 11, 1975 [QA564] 510'.8s [516'.35] 75-359

Printed in Germany

Printing and binding: AZ Druck und Datentechnik GmbH, Kempten
2146/3140-5432
SPIN 11361473

PRÉFACE DE LA SECONDE ÉDITION

Cette édition diffère de la première par les points suivants:

Un certain nombre de passages ont été récrits, notamment le § A du chap. II, le chap. III, le § B du chap. IV, et le § C du chap. V.

Ont été ajoutés: une Introduction, deux Appendices, et une Bibliographie.

Le travail de dactylographie a été fait par les soins de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Je lui en suis très reconnaissant.

PRÉFACE DE LA TROISIÈME ÉDITION

Cette édition diffère de la précédente par:

a) la correction d'erreurs typographiques,

b) la suppression du chap. I, remplacé par un bref résumé, avec renvois à l'*Algèbre Commutative* de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les multiplicités d'intersections de la géométrie algébrique sont égales à certaines "caractéristiques d'Euler-Poincaré" formées au moyen des foncteurs Tor de Cartan-Eilenberg. Le but essentiel de ce cours est d'établir ce résultat, et de l'appliquer à la démonstration des formules fondamentales de la théorie des intersections.

Il a fallu d'abord rappeler quelques résultats d'algèbre locale : décomposition primaire, théorèmes de Cohen-Seidenberg, normalisation des anneaux de polynômes, dimension (au sens de Krull), polynômes caractéristiques (au sens de Hilbert-Samuel).

L'homologie apparaît ensuite, lorsque l'on considère la multiplicité $e_{\underline{q}}(E,r)$ d'un idéal de définition $\underline{q} = (x_1,\dots,x_r)$ d'un anneau local noethérien A par rapport à un A-module E de type fini. Cette multiplicité est définie comme le coefficient de $n^r/r!$ dans le polynôme caractéristique $\ell_A(E/\underline{q}^nE)$ [on note $\ell_A(F)$ la longueur d'un A-module F] . On démontre alors la formule suivante, qui joue un rôle essentiel dans la suite :

$$(*) \qquad e_{\underline{q}}(E,r) = \sum_{i=0}^{i=r} (-1)^i \, \ell_A(H_i(E,\underline{x}))$$

où les $H_i(E,\underline{x})$ désignent les modules d'homologie du complexe de l'algèbre extérieure construit sur E au moyen des x_i .

Ce complexe peut d'ailleurs être utilisé dans d'autres questions d'algèbre locale, par exemple pour étudier la codimension homologique des modules sur un anneau local, les modules de Cohen-Macaulay (ceux dont la dimension de Krull coïncide avec la codimension homologique), et aussi pour montrer que les anneaux locaux réguliers sont les seuls anneaux locaux dont la dimension homologique soit finie.

Une fois la formule (*) démontrée, on peut aborder l'étude des caractéristiques d'Euler-Poincaré formées au moyen des Tor. Lorsque l'on traduit dans le langage de l'algèbre locale la situation géométrique des intersections, on obtient un anneau local régulier A, de dimension n, et deux A-modules E et F de type fini sur A, dont le produit tensoriel est de longueur finie sur A (cela signifie que les variétés correspondant à E et F ne se coupent qu'au point considéré). On est alors conduit à conjecturer les énoncés suivants :

i) On a $\dim.(E) + \dim.(F) \leqslant n$ ("formule des dimensions").

ii) L'entier $\chi_A(E,F) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(E,F))$ est $\geqslant 0$.

iii) On a $\chi_A(E,F) = 0$ si et seulement si l'inégalité i) est stricte.

La formule (*) montre que ces énoncés sont en tout cas vrais si $F = A/(x_1,\ldots,x_r)$, avec $\dim(F) = n - r$. Grâce à un procédé, utilisant des produits tensoriels complétés, et qui est l'analogue algébrique de la "réduction à la diagonale", on peut en déduire qu'ils sont vrais lorsque A a même caractéristique que son corps des restes, ou bien quand A est non ramifié. A partir de là, on peut, en se servant des théorèmes de structure des anneaux locaux complets, demontrer la formule des dimensions i) dans le cas le plus général. Par contre, je ne suis parvenu, ni à démontrer ii) et iii) sans faire d'hypothèses sur A, ni à en donner des contre-exemples. Il semble qu'il faille aborder la question sous un angle différent, par exemple en définissant directement (par un procédé asymptotique convenable) un entier $\geqslant 0$ dont on montrerait ensuite qu'il est égal à $\chi_A(E,F)$.

Heureusement, le cas d'égale caractéristique est suffisant pour les applications à la géométrie algébrique (et aussi à la géométrie analytique). De façon précise, soit X une variété non singulière, soient V et W deux sous-variétés irréductibles de X , et supposons que $C = V \cap W$ soit une sous-variété irréductible de X , avec :

dim. X + dim. C = dim. V + dim. W (intersection "propre").
Soient A, A_V, A_W les anneaux locaux de X, V et W en C.
Si $i(V.W,C;X)$ désigne la multiplicité d'intersection de V et W en C (au sens de Weil, Chevalley, Samuel), on a la formule :

$$(**) \qquad i(V.W,C;X) = \chi_A(A_V,A_W) \ .$$

Cette formule (la "formule des Tor") se démontre par réduction à la diagonale, en se ramenant à (*) . En fait, il est commode de prendre (**) comme définition des multiplicites. Les propriétés de celles-ci s'obtiennent alors de façon naturelle : la commutativité résulte de celle des Tor ; l'associativité résulte des deux suites spectrales qui expriment l'associativité des Tor ; la formule de projection résulte des deux suites spectrales reliant les images directes d'un faisceau cohérent et les Tor (ces dernières suites spectrales ont d'autres applications intéressantes, mais il n'en a pas été question dans le cours). Chaque fois, on utilise le fait bien connu que les caractéristiques d'Euler-Poincaré restent constantes dans une suite spectrale.

Lorsque l'on définit les intersections au moyen de la formule des Tor, on est conduit à étendre la théorie au delà du cadre strictement "non singulier" de Weil et de Chevalley. Par exemple, si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme d'une variété X dans une variété non singulière Y, on peut faire correspondre à deux cycles x et y de X et de Y un "produit" $x \cdot_f y$ qui correspond au point de vue ensembliste à $x \cap f^{-1}(y)$ (bien entendu, ce produit n'est défini que sous certaines conditions de dimensions). Lorsque f est l'application identique, on trouve le produit ordinaire. Les formules de commutativité, d'associativité, de projection, peuvent s'énoncer et se démontrer pour ce nouveau produit.