

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

11

Jean-Pierre Serre

Algèbre Locale Multiplicités

Cours au Collège de France, 1957–1958
rédigé par Pierre Gabriel
Troisième édition



Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Author

Jean-Pierre Serre
Collège de France
Chaire d'Algèbre et Géométrie
11, place Marcelin Berthelot
F-75231 Paris Cedex 05

3rd Edition 1975

2nd Corrected Printing 1997

Mathematics Subject Classifications (1970): 13-02, 13C15, 13D05, 13H05,
13H10, 13H15, 14O15

ISBN 3-540-07028-1 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ISBN 0-387-07028-1 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Library of Congress Cataloging in Publication Data

Serre, Jean-Pierre.

Algèbre locale, multiplicités.

(Lecture notes in mathematics ; 11)

Bibliography: p.

1. Geometry, Algebraic. 2. Rings (Algebra)

3. Modules (Algebra) I. Title. II. Series:

Lecture notes in mathematics (Berlin) ; 11.

QA3.L28 no. 11, 1975 [QA564] 510'.8s [516'.35] 75-359

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is only permitted under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its version of June 24, 1985, and a copyright fee must always be paid. Violations fall under the prosecution act of the German Copyright Law.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1975

Printed in Germany

Printing and binding: AZ Druck und Datentechnik GmbH, Kempten

2146/3140-5432

SPIN 11361473

PRÉFACE DE LA SECONDE ÉDITION

Cette édition diffère de la première par les points suivants:

Un certain nombre de passages ont été récrits, notamment le § A du chap. II, le chap. III, le § B du chap. IV, et le § C du chap. V.

Ont été ajoutés: une Introduction, deux Appendices, et une Bibliographie.

Le travail de dactylographie a été fait par les soins de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Je lui en suis très reconnaissant.

PRÉFACE DE LA TROISIÈME ÉDITION

Cette édition diffère de la précédente par:

- a) la correction d'erreurs typographiques,
- b) la suppression du chap. I, remplacé par un bref résumé, avec renvois à l'Algèbre Commutative de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Chapitre I. IDÉAUX PREMIERS ET LOCALISATION

1. Notations et définitions	1
2. Lemme de Nakayama	1
3. Localisation	2
4. Anneaux et modules noethériens	2
5. Spectre	3
6. Le cas noethérien	4
7. Idéaux premiers associés	4

Chapitre II. OUTILS ET SORTES

A) Filtrations et graduations	8
1. Anneaux et modules filtrés	8
2. Topologie définie par une filtration	9
3. Complétion des modules filtrés	10
4. Anneaux et modules gradués	11
5. Où tout redevient noethérien; filtrations q -adiques	15
6. Modules différentiels filtrés	20
B) Polynômes de Hilbert-Samuel	26
1. Rappel sur les polynômes à valeurs entières	26
2. Fonctions additives sur les catégories de modules	27
3. Le polynôme caractéristique de Hilbert	29
4. Les invariants de Hilbert-Samuel	32

Chapitre III. THÉORIE DE LA DIMENSION

A) Dimension des extensions entières	38
1. Définitions	38
2. Le premier théorème de Cohen-Seidenberg	39
3. Le second théorème de Cohen-Seidenberg	41
B) Dimension dans les anneaux noethériens	43
1. Dimension d'un module	43
2. Le cas semi-local noethérien	44
3. Systèmes de paramètres	47
C) Anneaux normaux	48
1. Caractérisation des anneaux normaux	48
2. Propriétés des anneaux normaux	51
3. Fermeture intégrale	53
D) Anneaux de polynômes	54
1. Dimension de l'anneau $A[X_1, \dots, X_n]$	54
2. Le lemme de normalisation	57
3. Applications. I. Dimension dans les algèbres de polynômes	59
4. Applications. II. Fermeture intégrale d'une algèbre de type fini	62
5. Applications. III. Dimension d'une intersection dans l'espace affine	64

Chapitre IV. DIMENSION ET CODIMENSION HOMOLOGIQUES

A) Le complexe de l'algèbre extérieure (Koszul)	67
1. Le cas simple	67
2. Acyclicité et propriétés fonctorielles du complexe de l'algèbre extérieure	69
3. La suite spectrale associée au complexe de l'algèbre extérieure	74
4. La codimension homologique d'un module sur un anneau semi-local	78

VI

B) Modules de Cohen-Macaulay	83
1. Définition des modules de Cohen-Macaulay	83
2. Diverses caractérisations des modules de Cohen-Macaulay.	85
3. Variété d'un module de Cohen-Macaulay.	88
4. Idéaux premiers et complétion.	91
C) Dimension homologique des modules noethériens.	93
1. La dimension homologique d'un module	93
2. Le cas noethérien.	95
3. Le cas local	99
D) Les anneaux réguliers.	101
1. Propriétés et caractérisations des anneaux locaux réguliers.	101
2. Propriétés de permanence des anneaux locaux réguliers.	106
3. Délocalisation	108
4. Un critère de normalité.	110
<u>Appendice I. RÉSOLUTIONS MINIMALES.</u>	<u>112</u>
1. Définition des résolutions minimales.	112
2. Application.	114
3. Cas du complexe de l'algèbre extérieure.	116
<u>Appendice II. POSITIVITÉ DES CARACTÉRISTIQUES D'EULER-POINCARÉ SUPÉRIEURES.</u>	<u>119</u>
<u>Chapitre V. LES MULTIPLICITÉS</u>	
A) La multiplicité d'un module	124
1. Le groupe des cycles d'un anneau	124
2. La multiplicité d'un module.	125
B) La multiplicité d'intersection de deux modules.	127
1. La réduction à la diagonale.	127
2. Produits tensoriels complétés.	129
3. Anneaux réguliers d'égale caractéristique.	135
4. Conjectures.	137
5. Anneaux réguliers d'inégale caractéristique (cas non ramifié)	138
6. Anneaux réguliers quelconques.	141
C) Raccord avec la géométrie algébrique.	144
1. Formule des Tor.	144
2. Cycles sur une variété affine non singulière	145
3. Premières formules	146
4. Démonstration du théorème 1.	149
5. Rationalité des intersections.	149
6. Images directes.	150
7. Images réciproques	151
8. Extensions de la théorie des intersections	154
 Bibliographie	 157

INTRODUCTION

Les multiplicités d'intersections de la géométrie algébrique sont égales à certaines "caractéristiques d'Euler-Poincaré" formées au moyen des foncteurs Tor de Cartan-Eilenberg. Le but essentiel de ce cours est d'établir ce résultat, et de l'appliquer à la démonstration des formules fondamentales de la théorie des intersections.

Il a fallu d'abord rappeler quelques résultats d'algèbre locale : décomposition primaire, théorèmes de Cohen-Seidenberg, normalisation des anneaux de polynômes, dimension (au sens de Krull), polynômes caractéristiques (au sens de Hilbert-Samuel).

L'homologie apparaît ensuite, lorsque l'on considère la multiplicité $e_{\underline{q}}(E, r)$ d'un idéal de définition $\underline{q} = (x_1, \dots, x_r)$ d'un anneau local noethérien A par rapport à un A -module E de type fini. Cette multiplicité est définie comme le coefficient de $n^r/r!$ dans le polynôme caractéristique $\ell_A(E/\underline{q}^n E)$ [on note $\ell_A(F)$ la longueur d'un A -module F]. On démontre alors la formule suivante, qui joue un rôle essentiel dans la suite :

$$(*) \quad e_{\underline{q}}(E, r) = \sum_{i=0}^{i=r} (-1)^i \ell_A(H_i(E, \underline{x}))$$

où les $H_i(E, \underline{x})$ désignent les modules d'homologie du complexe de l'algèbre extérieure construit sur E au moyen des x_i .

Ce complexe peut d'ailleurs être utilisé dans d'autres questions d'algèbre locale, par exemple pour étudier la codimension homologique des modules sur un anneau local, les modules de Cohen-Macaulay (ceux dont la dimension de Krull

VIII

coïncide avec la codimension homologique), et aussi pour montrer que les anneaux locaux réguliers sont les seuls anneaux locaux dont la dimension homologique soit finie.

Une fois la formule (*) démontrée, on peut aborder l'étude des caractéristiques d'Euler-Poincaré formées au moyen des Tor. Lorsque l'on traduit dans le langage de l'algèbre locale la situation géométrique des intersections, on obtient un anneau local régulier A , de dimension n , et deux A -modules E et F de type fini sur A , dont le produit tensoriel est de longueur finie sur A (cela signifie que les variétés correspondant à E et F ne se coupent qu'au point considéré). On est alors conduit à conjecturer les énoncés suivants :

i) On a $\dim(E) + \dim(F) \leq n$ ("formule des dimensions"),

ii) L'entier $\chi_A(E, F) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \ell_A(\text{Tor}_i^A(E, F))$ est ≥ 0 .

iii) On a $\chi_A(E, F) = 0$ si et seulement si l'inégalité i) est stricte.

La formule (*) montre que ces énoncés sont en tout cas vrais si $F = A/(x_1, \dots, x_r)$, avec $\dim(F) = n - r$. Grâce à un procédé, utilisant des produits tensoriels complétés, et qui est l'analogue algébrique de la "réduction à la diagonale", on peut en déduire qu'ils sont vrais lorsque A a même caractéristique que son corps des restes, ou bien quand A est non ramifié. A partir de là, on peut, en se servant des théorèmes de structure des anneaux locaux complets, démontrer la formule des dimensions i) dans le cas le plus général. Par contre, je ne suis parvenu, ni à démontrer ii) et iii) sans faire d'hypothèses sur A , ni à en donner

IX

des contre-exemples. Il semble qu'il faille aborder la question sous un angle différent, par exemple en définissant directement (par un procédé asymptotique convenable) un entier ≥ 0 dont on montrerait ensuite qu'il est égal à $\chi_A(E, F)$.

Heureusement, le cas d'égalité caractéristique est suffisant pour les applications à la géométrie algébrique (et aussi à la géométrie analytique). De façon précise, soit X une variété non singulière, soient V et W deux sous-variétés irréductibles de X , et supposons que $C = V \cap W$ soit une sous-variété irréductible de X , avec :

$$\dim. X + \dim. C = \dim. V + \dim. W \quad (\text{intersection "propre"}).$$

Soient A, A_V, A_W les anneaux locaux de X, V et W en C .

Si $i(V, W, C; X)$ désigne la multiplicité d'intersection de V et W en C (au sens de Weil, Chevalley, Samuel), on a la formule :

$$(**) \quad i(V, W, C; X) = \chi_A(A_V, A_W) .$$

Cette formule (la "formule des Tor") se démontre par réduction à la diagonale, en se ramenant à (*). En fait, il est commode de prendre (**) comme définition des multiplicités. Les propriétés de celles-ci s'obtiennent alors de façon naturelle : la commutativité résulte de celle des Tor ; l'associativité résulte des deux suites spectrales qui expriment l'associativité des Tor ; la formule de projection résulte des deux suites spectrales reliant les images directes d'un faisceau cohérent et les Tor (ces dernières suites spectrales ont d'autres applications intéressantes, mais il n'en a pas été question dans le cours). Chaque fois, on utilise le fait bien connu que les caractéristiques d'Euler-Poincaré restent constantes dans une suite spectrale.

Lorsque l'on définit les intersections au moyen de la formule des Tor, on est conduit à étendre la théorie au delà du cadre strictement "non singulier" de Weil et de Chevalley. Par exemple, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme d'une variété X dans une variété non singulière Y , on peut faire correspondre à deux cycles x et y de X et de Y un "produit" $x \cdot_f y$ qui correspond au point de vue ensembliste à $x \cap f^{-1}(y)$ (bien entendu, ce produit n'est défini que sous certaines conditions de dimensions). Lorsque f est l'application identique, on trouve le produit ordinaire. Les formules de commutativité, d'associativité, de projection, peuvent s'énoncer et se démontrer pour ce nouveau produit.