Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

225

Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch

Springer-Verlag

Berlin · Heidelberg · New York 1971

AMS Subject Classifications (1970): 14-02, 14 C 15, 14 F 15, 14 K 30, 18 E 30

ISBN 3-540-05647-5 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-05647-5 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1971. Library of Congress Catalog Card Number 73-178287. Printed in Germany.

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS MARIE

1966-67

THEORIE DES INTERSECTIONS ET THEOREME DE RIEMANN-ROCH

(SGA 6)

un Séminaire dirigé par

P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE

avec la collaboration de

D. FERRAND, J.P. JOUANOLOU, O. JUSSILA,
S. KLEIMAN, M. RAYNAUD, J.P. SERRE

PREFACE

La présente édition du Séminaire de Géométrie Algébrique 6 reproduit à peu de chose près la première édition, distribuée par l'I.H.E.S. sous forme d'cxposés multigraphiés. Les corrections effectuées portent essentiellement sur des fautes d'impression, sauf dans les exposés I et III, où de légères modifications ont été apportées par L. Illusie à quelques énoncés incorrects dans la version primitive. D'autre part, des notes ont été rajoutées en bas de page, en particulier dans l'exposé XIV par A. Grothendieck, afin de signaler des progrès récents dans des questions encore ouvertes lors du Séminaire. Signalons enfin que l'exposé XI, de D. Ferrand, concernant la théorie du déterminant pour les complexes parfaits, n'a pas été régigé, et ne sera donc pas publié ; pour éviter des erreurs de référence, nous avons gardé telle quelle la numérotation des exposés suivants.

Juin 1971

INTRODUCTION

Le but du présent Séminaire est de développer une théorie globale des intersections, et une formule de Riemann-Roch, pour des schémas quelconques. Le lecteur trouvera une description du programme du Séminaire dans l'exposé O. La possibilité en principe d'une démonstration d'une formule de Riemann-Roch pour les schémas réguliers généraux, suivant les lignes du rapport bien connu de Borel-Serre en 1958, était claire dès ce moment, du moins pour un morphisme projectif. L'extension au cas général est moins évidente ; le programme dans lequel elle s'insère (et partiellement réalisé dans notre séminaire) remonte à 1960. Comme c'était également le cas pour la théorie de dualité des faisceaux cohérents (cf. R. Hartshorne, Residues and Duality, Lecture Notes in Mathematics n° 20, Springer), un outil essentiel pour formuler une théorie satisfaisante est la théorie des catégories dérivées de Verdier, dont la connaissance est indispensable pour la compréhension du Séminaire. A part cette théorie, l'étude du Séminaire n'exige guère qu'une connaissance générale des fondements de la Géométrie Algébrique, tels qu'ils sont exposés dans EGA, chapitres I,II,III ; nous n'aurons en plus que des références occasionnelles à faire à EGA IV, pour certains faits concernant les morphismes plats ou lisses, qui pour l'essentiel figurent également dans les premiers exposés de SGA 1. Enfin, pour développer certains résultats avec toute la généralité souhaitable pour les applications, nous faisons usage parfois de la notion de site annelé et de topos annelé, pour laquelle nous renvoyons à SGA 4, exposés I à IV. Le lecteur qui ignorerait le langage des sites et topos pourra remplacer partout lesdits objets par des espaces topologiques ordinaires, les objets du topos étant alors remplacés par des ouverts de ces espaces; mais nous lui conseillons néanmoins, de préférence, de s'assimiler le langage des topos, qui fournit un principe d'unification extrêment commode.

La notion fondamentale pour la théorie présentée ici est celle de complexe de Modules parfait, et ses diverses variantes, développées dans les exposés I,II,III . Il semble clair que ces notions, importantes également dans d'autres contextes en Géométrie Algébrique (notamment pour les formules de type Lefschetz-Verdier en cohomologie à coéfficients discrets (SGA 5) ou cohérents), auront aussi leur rôle à jouer en dehors de la Géométrie Algèbrique, notamment pour la formulation d'une variante analytique complexe du théorème de Riemann-Roch présenté ici, ou de variantes convenables du théorème de l'index d'Atiyah-Singer. Quelques indications dans ce sens seront données dans Exp. II. Malheureusement, il manque encore à l'heure actuelle un énoncé, même heuristique, qui engloberait ces deux théorèmes (dont le premier pour l'instant reste conjectural). Il manque apparemment une idée nouvelle, comme il en manque aussi en Géométrie Algèbrique pour parvenir à une démonstration du théorème de Riemann-Roch en dehors d'hypothèses projectives (cf. Exp. XIV, n° 2).

Nous n'aurons à faire nul usage dans ce séminaire de la théorie locale des intersections, exposée dans J.P. Serre, Algèbre Locale.Multiplicités (Lectures Notes in Mathematics n° 11, Springer), et nous contenterons simplement de signaler ici que ce cours de Serre a eu une inflence évidente sur la genèse de la théorie en 1957. Nous n'utiliserons pas non plus la théorie de l'anneau de Chow développée dans Séminaire Chevalley 1958, exposés 2 et 3 (Ecole Normale Supérieure). Cette théorie est liée de façon essentielle à des hypothèses de non singularité, alors que le but de notre séminaire est au contraire de développer une théorie des intersections sur les schémas généraux (et même les topos localement annelés généraux) voir à ce sujet les commentaires dans Exp. XIV n°4 et n°8, donnant les relations entre notre théorie et celle de l'anneau de Chow, et posant la question d'une généralisation de cette dernière. Nous pouvons dire que le Séminaire présente une théorie des intersections cohérente et se suffisant à elle même, mais nullement exhaustive des différents points de vue utiles (voire indispensables) en théorie des intersections, et qu'il convient par suite de le compléter par les exposés cites de Serre et de Chevalley.

Nous avons joint au séminaire (en Appendice à Exp. O) le rapport Grothendieck de 1957 "classes de Faisceaux et théorème de Riemann-Roch", qui avait servi de base au séminaire de Borel et Serre à Princeton la même année, ainsi qu'à leur article déjà cité. Ce rapport esquisse deux démonstrations du théorème de Riemann-Roch pour les variétés quasi-projectives non singulières, dont la première, valable pour le moment seulement en caractéristique nulle, mais donnant en revanche un résultat un peu plus précis dans le cas d'une immersion, ne figure pas encore dans la littérature (sans exclure le travail de Borel-Serre ni le présent séminaire). La lecture de ce rapport ne présuppose bien entendu celle d'aucun autre exposé du séminaire, et peut même servir d'introduction à l'étude de ce dernier au même titre que l'exposé O, surtout pour un lecteur qui ne serait pas encore familier avec Borel-Serre. La démonstration à laquelle nous venons de faire allusion s'applique d'ailleurs essentiellement telle quelle au cas d'un morphisme projectif d'espaces analytiques complexes, et s'appliquera sans doute également en caractéristique quelconque, une fois résolu le problème des opérations "puissances extérieures" dans la catégorie dérivée (cf. Exp. XIV, n°s 1,2,3). C'est l'absence d'une étude de cette question qui constitue sans doute la lacune la plus sérieuse dans ce Séminaire, dans l'optique même où nous nous y sommes placés.

On remarquera l'absence, dans la table des matières du présent Séminaire, de deux des participants mentionnés sur la page de garde. L'un, J.P. Jouanolou, avait pris une part active à l'élaboration technique de la première partie du séminaire, mais avait été empêché de prendre part aux exposés oraux ; on lui doit notamment l'assertion d'indépendance linéaire contenue dans l'important énoncé VI 1.1. donnant la structure de l'anneau $K^{\cdot}$ des classes de Modules localement libres sur un fibré projectif (qui n'était prouvé auparavant que lorsqu'on supposait que le schéma de base admet un Module inversible ample). L'autre, J.P. Serre, avait fait deux exposés oraux, logiquement indépendants du reste du Séminaire, et qu'il a par suite préféré publier sous forme d'article séparé (cf. J.P. Serre, Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés à paraître dans Publications Mathématiques, n° 34).

Comme dans les autres parties du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, les sigles SGA 1 à SGA 6 renvoient aux différentes parties dudit Séminaire, le chiffre romain suivant ce sigle indiquant le n° de l'exposé, et les chiffres arabes qui le suivent correspondant à la numérotation intérieure de l'exposé en question; pour les références intérieures au présent Séminaire, on omet le sigle SGA 6, en utilisant des références style I 4.9 (signifiant: exposé I, énoncé 4.9). Le sigle EGA réfère aux Eléments de Géométrie Algébrique de J. Dieudonné et A. Grothendieck.

TABLE DES MATIERES

EXPOSE O

Esquisse d'un Programme pour une Théorie des Intersections sur les Schémas Généraux
par A. Grothendieck 1

Classes de Faisceaux et Théorème de Riemann-Roch
par A. Grothendieck 20

EXPOSE I

Généralités sur les Conditions de Finitude dans les Catégories Dérivées
par L. Illusie 78

EXPOSE II

Existence de Résolutions Globales
par L. Illusie 160

EXPOSE III

Conditions de Finitude Relatives
par L. Illusie 222

EXPOSE IV

Groupes de Grothendieck des Topos Annelés
par L. Illusie 274

EXPOSE V

Généralités sur les λ-Anneaux
par P. Berthelot 297

EXPOSE VI

Le K' d'un Fibre Projectif: Calculs et Conséquences
par P. Berthelot 365

EXPOSE VII

Immersions Régulières et Calcul du K˙ d'un Schéma Eclaté
par P. Berthelot 416

EXPOSE VIII

Le Théorème de Riemann-Roch
par P. Berthelot 466

EXPOSE IX

Quelques Calculs de Groupes K.
par P. Berthelot 498

EXPOSE X

Formalisme des Intersections sur les Schémas Algébriques Propres
par O. Jussila
Avec un Appendice par A. Grothendieck
Spécialisation en Théorie des Intersections 519

EXPOSE XI - Non rédigé

EXPOSE XII

Un Théorème de Représentabilité Relative sur le Foncteur de Picard
par M. Raynaud (rédigé par S. Kleiman) 595

EXPOSE XIII

Les Théorèmes de Finitude pour le Foncteur de Picard
par S. Kleiman 616

EXPOSE XIV

Problèmes Ouverts en Théorie des Intersections
par A. Grothendieck 667

Index Terminologique 691

Index des Notations 696