

# Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

Series: Institut de Mathématique, Faculté  
des Sciences d'Orsay. Adviser: J.P. Kahane

169

---

Michel Raynaud

Université de Paris, Orsay/France

Anneaux Locaux Henséliens

---



Springer-Verlag

Berlin · Heidelberg · New York 1970

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1970. Library of Congress Catalog Card Number 70-140564. Printed in Germany. Title No. 1956

Offsetdruck: Julius Beltz, Weinheim/Bergstr.

Table des matières.

Introduction.

Chapitres I	Notion d'anneau local hensélien.....	1
II	Formalisme des morphismes nets et étales - Exemples .....	13
III	Etude des algèbres nettes.....	21
IV	Morphismes quasi-finis. Main theorem de Zariski.....	39
V	Structure locale des algèbres nettes et étales. Critère Jacobien.....	51
VI	Exemples d'algèbres étales.....	66
VII	Propriétés de permanence - Exemples d'anneaux henséliens.....	72
VIII	Hensélisation.....	80
IX	Anneaux unibranches et géométriquement unibranches.....	97
X	Action d'un groupe fini sur un anneau.....	103
XI	Couples henséliens.....	112
	Bibliographie.....	129

## Introduction.

Ce livre contient la matière d'un cours de troisième cycle donné à la Faculté d'Orsay en 1969. Il a pour but d'exposer les propriétés élémentaires des anneaux locaux henséliens. On sait que ces anneaux ont pris récemment une importance considérable en géométrie algébrique grâce à la considération de la "topologie étale" sur les schémas. C'est pourquoi, une grande partie de ces notes est consacrée à l'étude des algèbres étales.

On suppose le lecteur familiarisé avec les techniques usuelles de l'algèbre commutative : localisation, platitude, propriétés des entiers. Bref, il est bon de connaître les chapitres I, II et V de l'algèbre commutative de N. Bourbaki. La majeure partie du livre est rédigée en termes d'anneaux et d'idéaux ; toutefois, certains énoncés sont formulés et démontrés dans le langage plus géométrique des schémas. Le lecteur pourra consulter [3] (chap.I) pour les notions de base de cette théorie.

Dans le dernier chapitre, qui est un peu moins élémentaire, nous reprenons, dans le cadre des algèbres étales, la notion de couple hensélien introduite par Nagata et Lafon [4].

Est-ce la peine de dire que de nombreuses notions et démonstrations que l'on trouvera dans ce livre sont directement inspirées des "Éléments de géométrie algébrique" de A. Grothendieck et J. Dieudonné ? Je voudrais également remercier N. Bourbaki qui m'a donné accès à des notes sur son ouvrage en préparation sur les algèbres étales, Daniel Perrin qui a mené à bien une première rédaction de ce cours et Mademoiselle Boulanger qui a assuré la frappe du manus-

Quelques notations.

Tous les anneaux considérés sont commutatifs. Si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier d'un anneau  $A$ , on note  $k(\mathfrak{p})$  le corps des fractions de l'anneau intègre  $A/\mathfrak{p}$  égal encore au corps résiduel de l'anneau local  $A_{\mathfrak{p}}$ , localisé de  $A$  en  $\mathfrak{p}$ . Si  $A$  est un anneau local, on note aussi  $k_A$  le corps résiduel de  $A$ .

Soient  $A$  un anneau,  $B$  une  $A$ -algèbre,  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $A$ . On appelle fibre de  $B$  au-dessus de  $\mathfrak{p}$ , la  $k(\mathfrak{p})$ -algèbre  $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ .