Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

164

J. P. Ferrier
Institut Elie Cartan, Nancy/France

Séminaire sur les Algèbres Complètes

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1970

 Library of Congress Catalog Card Number 72-139949. Printed in Germany.
Title No. 1951

Offsetdruck: Julius Beltz, Weinheim/Bergstr.

INTRODUCTION

Le but poursuivi par le présent séminaire est l'application de la théorie spectrale des algèbres complètes à l'approximation des fonctions holomorphes dans des ouverts de $\mathbb{C}^n$, dont la croissance est tempérée. L'outil essentiel dans cette question est le calcul symbolique de L. WAELBROECK ([4] , [5]) ; aussi, les quatre premiers paragraphes sont-ils consacrés d'une part à l'exposition de la terminologie sur les structures qui interviennent dans ce calcul et d'autre part à la construction de ce dernier ; leur contenu est inspiré du mémoire de L. WAELBROECK et on a seulement adopté un point de vue moins général, en se plaçant délibérément dans le cas commutatif, ce qui est justifié par les simplifications entraînées et les applications en vue ; on a insisté, d'un autre côté, sur des difficultés de la théorie qui interviennent dans les questions envisagées. Les quatre autres paragraphes sont consacrés à l'application de la théorie spectrale à l'approximation ; on y élabore des outils qui permettront d'utiliser le calcul symbolique. On a voulu, dans cette partie, que le séminaire ait un caractère d'initiation et on y expose essentiellement le cas d'une variable ; les idées sont les mêmes dans le cas de plusieurs variables, mais l'extension à ce cas, assez compliquée et qui utilise notamment les majorations de L. HÖRMANDER pour l'opérateur $\bar{\partial}$, sera rédigée ailleurs.

Il est facile d'expliquer les relations entre le calcul symbolique et l'approximation en partant de l'exemple des algèbres de Banach. On sait que dans ce cas, si f est une fonction analytique au voisinage du spectre de l'élément central a , on définit $f(a)$ en substituant a à z dans la formule de Cauchy, c'est-à-dire par :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-a}\, ds$$

pour un contour γ convenable entourant le spectre ; on sait aussi comment l'on peut en déduire que pour tout compact polynomialement convexe K de $\mathbb{C}$ et toute fonction holomorphe f au voisinage de K , f est limite uniforme sur K de polynômes, en construisant $f(z)$ dans l'adhérence $P(K)$ dans $\mathcal{C}(K)$ des polynômes. Si l'on remplace maintenant K par un ensemble ouvert borné S de $\mathbb{C}$, pour toute sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach des fonctions bornées sur S , le spectre de z contient $\bar{S}$ et on ne peut y définir $f(z)$ que pour f holomorphe au voisinage de $\bar{S}$, ce qui est décevant. Si l'on veut que le spectre de z puisse être S , il faut d'abord autoriser les fonctions $z \mapsto (z-s)^{-1}$ lorsque s est un point frontière, et permettre ainsi une croissance au bord de S . On quitte alors irrémédiablement le cadre des algèbres normées ; on pourrait, certes, penser aux algèbres topologiques, mais il se trouve que les structures à bornés sont mieux adaptées.

Le paragraphe 1 a pour objet de rappeler les notions d'ensemble, d'espace et d'algèbre à bornés, introduites par L. WAELBROECK dans son mémoire [4] . On s'est inspiré plus précisément de l'exposition de C. HOUZEL [3] , en n'insistant cependant pas sur les limites projectives et inductives générales et en ne parlant que des exemples qui interviennent en théorie spectrale. On y précise, en revanche, les notions d'adhérence et de fermeture, qui, comme on le sait, ne coïncident pas nécessairement dans les espaces à bornés.

Le paragraphe 2 introduit, pour préciser la notion de croissance au bord, les fonctions δ-tempérées de L. WAELBROECK, où δ est une fonction positive, lipschitzienne sur $\mathbb{C}^n$ telle que la fonction $|z|\delta$ soit bornée : ce sont les fonctions f sur l'ouvert $\delta > 0$ telles qu'il existe un entier N tel que la fonction $\delta^N f$ soit bornée. On compare avec la définition donnée par L. HORMANDER [2] . On régularise la fonction δ par un procédé de convolution.

Le spectre de WAELBROECK d'éléments $a_1, \dots, a_n$ d'une algèbre complète commutative à unité est défini au paragraphe 3 ; on se place d'abord dans le cas d'un seul élément a et on définit, comme dans [6] , les ensembles spectraux, qui sont les parties de $\mathbb{C}$ sur le complémentaire desquelles $(a-s)^{-1}$ est défini et borné ; on introduit ensuite les fonctions spectrales, comme dans [4] , et on régularise les coefficients.

Dans le paragraphe 4, on construit le calcul symbolique, qui, pour une fonction spectrale δ pour les éléments $a_1, \dots, a_n$, est un morphisme de l'algèbre $\mathcal{O}(\delta)$ des fonctions holomorphes δ-tempérées dans l'algèbre, qui envoie unité sur unité et respectivement $z_1, \dots, z_n$ sur $a_1, \dots, a_n$. On s'est contenté de donner les idées essentielles, renvoyant le lecteur au mémoire de L. WAELBROECK [4] pour le détail de certains calculs. C'est dans ce paragraphe que le fait d'avoir supposé l'algèbre commutative apporte une grande simplification. En revanche, on a conservé la donnée d'un idéal complet, en vue d'applications ultérieures.

Au paragraphe 5, on applique ce qui précède à l'étude de la densité, dans une algèbre $\mathcal{O}(\delta)$ de fonctions holomorphes δ-tempérées sur un ouvert de $\mathbb{C}$, d'une sous-algèbre et notamment une algèbre $\mathcal{O}(\delta')$ où $\delta' \geq \delta$. On résoud ce problème avec une hypothèse de convexité de la fonction δ relativement à la sous-algèbre. On introduit, pour cela, B étant un disque borné de $\mathcal{O}(\delta)$ et s un point de $\mathbb{C}$, la distance $\delta_B(s)$, dans l'espace normé E_B jaugé par B, de la fonction 1 à l'idéal de la sous-algèbre engendré par $z-s$, et on montre que pour un disque borné B convenable, la fonction δ_B est spectrale pour z dans l'adhérence de la sous-algèbre.

Au paragraphe 6, on compare le spectre d'un élément a d'une algèbre A au spectre de a dans une sous-algèbre A' contenant a . On s'intéresse d'abord aux ensembles spectraux, pour lesquels on donne un énoncé général, en s'appuyant sur les résultats du paragraphe précédent. L'outil utilisé ici est la distance $\rho_B(s)$ dans E_B de l'élément $(a-s)^{-1}$ à la sous-algèbre. On donne des exemples d'ensembles spectraux qui le restent par diminution de l'algèbre. La situation est plus compliquée que dans le cas des algèbres de Banach car le spectre n'est plus compact, ni même borné, et la caractérisation n'est plus seulement topologique. On applique les énoncés obtenus à l'approximation des fonctions holomorphes tempérées. On rencontre une difficulté lorsqu'on veut alors itérer des résultats d'approximation, du fait que l'adhérence n'est pas nécessairement fermée ; on doit alors introduire des systèmes inductifs d'espaces à bornés, qui sont appelés ind-espaces.

Le paragraphe 7 concerne une extension des espaces classiques de Hardy ; si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, on définit, pour $p > 0$, un espace à bornés complet $H_p(\Omega)$, qui est l'espace des fonctions holomorphes f sur Ω telles que $|f|^p$ soit majorée par une fonction surharmonique positive, et une algèbre $H_{log}(\Omega)$. Ces espaces ont une structure trop fine pour les applications à l'approximation et on y étudie la topologie bornivore non localement convexe. En particulier, l'algèbre topologique non localement convexe $H_{log}(\Omega)$ joue un rôle important en théorie spectrale.

Le paragraphe 8 étudie l'approximation des fonctions holomorphes intégrables sur un ouvert borné S de $\mathbb{C}$. Bien qu'il ne s'agisse pas d'une structure d'algèbre, on utilise des techniques qui sont inspirées par la théorie spectrale des algèbres ; il s'agit d'une régularisation des coefficients différente de celle de L. WAELBROECK. On s'intéresse à l'approximation rationnelle et, à l'aide des résultats du paragraphe précédent, à l'approximation polynômiale dans des exemples où il y a ambiguité, en particulier lorsque $\complement S$ est connexe sans que $\complement \bar{S}$ le soit.

Ce séminaire a été tenu à NANCY au cours des deux premiers trimestres de l'année universitaire 1969-1970. Les paragraphes 1 à 4 ont été respectivement exposés par J.-L. REMY (Généralités sur les structures à bornés), C. WROBEL (Fonctions tempérées), B. ANDRÉ (Le spectre de WAELBROECK) et J.-P. LAVIGNE (Le calcul symbolique). Les paragraphes 5 (Fonctions spectrales pour z dans une sous-algèbre de $\mathcal{O}(\delta)$) et 6 (Ensembles spectraux d'une sous-algèbre) sont dûs à l'auteur. Le paragraphe 7 (Une extension des espaces de Hardy appliquée à l'approximation) est un travail de Mme D. MOREL et le paragraphe 8 (Approximation des fonctions holomorphes intégrables sur un ouvert borné de $\mathbb{C}$) un travail de B. ANDRÉ.

Je tiens à remercier l'Institut Elie CARTAN dans le cadre duquel j'ai pu rédiger ce séminaire et Madame S. GÉRARD pour le travail admirable qu'elle a accompli en frappant cette rédaction.

J.-P. FERRIER

TABLE DES MATIÈRES

*

* *