Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

159

R. Ansorge · R. Hass

Lehrstuhl für numerische Mathematik der Universität Hamburg

Konvergenz von Differenzenverfahren für lineare und nichtlineare Anfangs-wertaufgaben

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1970

 Library of Congress Catalog Card Number 77-139733. Printed in Germany.
Title No. 3316

Offsetdruck: Julius Beltz, Weinheim/Bergstr.

V O R W O R T

Im Jahre 1956 gaben die Herren Lax und Richtmyer [26] eine Theorie an, die unter Benutzung funktionalanalytischer Hilfsmittel die Struktur des Konvergenzverhaltens von Differenzapproximationen für eine große Klasse linearer Anfangswertaufgaben mit partiellen Differentialgleichungen vollständig und typunabhängig aufklärte.

Ebenfalls im Jahre 1956 erschien die Arbeit von Herrn Dahlquist [15], die für gewöhnliche (nicht notwendig lineare) Differentialgleichungen erster Ordnung weitestgehende Aufklärung der Konvergenzeigenschaften zugehöriger Differenzapproximationen erbrachte.

Beide Theorien sind inzwischen auch im Rahmen von Lehrbüchern in großer Ausführlichkeit und mit zahlreichen wichtigen Ergänzungen dargestellt worden (vgl. z.B. [31],[20]). Das Buch der Herren Richtmyer und Morton enthält in seinem zweiten Teil überdies eine nahezu lückenlose Beschreibung der (bis ca. 1965) auch zu Differenzapproximationen spezieller Typen nichtlinearer Anfangswertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen vorliegenden Ergebnisse. Offen mußte dabei jedoch die Frage bleiben (und sie ist es zu einem beträchtlichen Teil noch heute), inwieweit sich auch größere Klassen dieser Probleme einer der Lax-Richtmyer-Theorie ähnlichen (also insbesondere einer typunabhängigen) Behandlung unterwerfen lassen.

Einige Möglichkeiten wiederzugeben, mit denen diese Lücke verringert werden kann, war Ziel und Inhalt einer Vorlesung, die der ältere der beiden Verfasser des vorliegenden Buches im Wintersemester 1969/70 an der Universität Hamburg hielt. Eine vom jüngeren Autor erstellte Ausarbeitung der Vorlesung bildete die Grundlage der nachfolgenden Darstellung, die sich weitgehend den Formulierungen innerhalb der Lax-Richtmyer-Theorie anschließt. Dabei werden insbesondere die strukturell bedingten Schwierigkeiten beleuchtet, die sich beim Übergang zu nichtlinearen Problemen auftun. Sie lassen es notwendig erscheinen, Einschränkungen der Konvergenzeigenschaften approximierender Verfahren hinzunehmen. Der in diesem Zusammenhang erst im nichtlinearen Bereich so recht hervortretenden Bedeutung der Existenz verallgemeinerter Lösungen der gegebenen Anfangswertaufgabe wird deshalb größere Aufmerksamkeit geschenkt.

Die Theorie der linearen Aufgaben wird nur insoweit einschließlich einiger funktionalanalytischer Hilfsmittel wiederum dargestellt, als es zur Geschlossenheit der Vorlesung und zur Hervorhebung der Strukturunterschiede gegenüber nichtlinearen Problemen notwendig erschien.

Die eingestreuten Beispiele sollten den Hörern die der Zielsetzung nach notwendig ein wenig abstrakten Untersuchungen lediglich verdeutlichen. Sie sind deshalb bewußt sehr einfach gehalten. In diesem Sinne ist auch der (weitgehend aus [31] übernommene) Abschnitt 4.5 lediglich als Beispiel zu werten.

Im übrigen weist das Buch Mängel auf, die einer mehr exemplarischen Vorlesung häufig anhaften: Vollständigkeit konnte von vornherein nicht angestrebt werden; dafür wurde manches, was dem Kundigen knapper darstellbar erscheint, im Interesse der Hörer breiter ausgeführt.

Ihrem verehrten Kollegen, bzw. Lehrer, Herrn Lothar Collatz, danken die Autoren für das Interesse, das er der zusammenfassenden Publikation mancher der hier wiedergegebenen Ergebnisse seit längerer Zeit entgegenbrachte.

Für die sorgfältige Herstellung der Druckvorlage sagen wir Frau Wilma Bergmann herzlichen Dank.

Hamburg, im April 1970

Rainer Ansorge
Reiner Hass

INHALTSVERZEICHNIS

BEZEICHNUNGEN

AWA	:	Anfangswertaufgabe(n)
ARWA	:	Anfangsrandwertaufgabe(n)
DGL	:	Differentialgleichung(en)
$C^p(B)$	:	Raum der auf B p-mal stetig-differenzierbaren Funktionen
$C^p_\omega(B)$	:	Raum der auf B p-mal stetig-differenzierbaren und in jeder Variablen ω-periodischen Funktionen
$L^p(B)$	:	Raum der zur p-ten Potenz über B summierbaren Funktionen
$L^p_\omega(B)$	:	Raum der zur p-ten Potenz über B summierbaren und in jeder Variablen ω-periodischen Funktionen
$\mathbb{N}$	:	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	:	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{Z}$	:	Menge der ganzen Zahlen