Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

Series: Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Adviser: K. Krickeberg

157

Tammo tom Dieck
Universität des Saarlandes, Saarbrücken

Klaus Heiner Kamps
Universität Konstanz

Dieter Puppe
Universität Heidelberg

Homotopietheorie

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1970

 Library of Congress Catalog Card Number 79-137900 Printed in Germany.
Title No. 3314

Offsetdruck: Julius Beltz, Weinheim/Bergstr.

Vorwort

Diese Ausarbeitung geht zurück auf eine Vorlesung, die ich im Herbst und Winter 1966/67 an der University of Minnesota, Minneapolis, Minn. USA gehalten habe, und deren Ziel es war, die Grundzüge der Homotopietheorie lückenlos ohne Verwendung anderer Teile der algebraischen Topologie (wie z.B. Homologietheorie) aufzubauen und dabei bis zu interessanten Resultaten (wie z.B. den Einhängungssätzen und dem Satz von James über den Schleifenraum einer Einhängung) zu gelangen. Im Wintersemester 1967/68 habe ich an der Universität des Saarlandes, Saarbrücken nochmals über das gleiche Thema gelesen und mich bemüht, die Darstellungsweise zu verbessern. Zwei Hörer dieser Vorlesung haben die vorliegende Ausarbeitung verfaßt: K.H. Kamps die §§ 0-7 und den Anhang, T.tom Dieck die §§ 8-17.

In den §§ 1-9 wird die Theorie der Cofaserungen und Faserungen ausführlich behandelt. Die Ergebnisse und Methoden sind zum größten Teil bekannt, finden sich aber sonst nicht in systematischer Zusammenstellung und scheinen mir grundlegend zu sein.

Der § 10 über die Operation des Fundamentalgruppoids auf den Homotopiemengen wurde von tom Dieck nach eigenen Ideen ausgebaut. (In der Vorlesung kam nur der Fall K = Punktraum vor.)

In den §§ 11-13 werden die Homotopiegruppen im Zusammenhang mit den Funktoren "Einhängung", "Schleifenraum" und den Begriffen "H-Raum", "Co-H-Raum" eingeführt.

§ 14 enthält die Faserfolge, aus der sich die exakten Homotopiesequenzen für Paare und für Faserungen als Korollare ergeben. Dual dazu ist die "Cofaserfolge". Auf ihre Beschreibung haben wir verzichtet, weil sie sich ganz analog entwickeln läßt und weil sie in [19] (unter dem Namen "Abbildungsfolge") eingehend diskutiert wird. (Die Darstellung in [19] ist an einigen Punkten umständlicher als sie heute möglich ist, indem man mit Hilfe der Ergebnisse von §§ 1,2 genau dual zu § 14 vorgeht.)

Die §§ 15-17 bringen den Homotopie-Ausschneidungssatz von Blakers-Massey, Einhängungssätze und eine Verallgemeinerung des Satzes von James über den Schleifenraum einer Einhängung. Dieser Satz wird mit rein homotopietheoretischen Mitteln bewiesen, und man erhält eine echte Homotopieäquivalenz, wo die sonst verwendeten Methoden nur eine schwache Homotopieäquivalenz liefern. Nach Fertigstellung dieses Manuskripts habe ich gemerkt, daß man den in § 17 gegebenen Beweis unter Beibehaltung der Grundideen noch etwas vereinfachen kann [28].

Ursprünglich habe ich den Satz von James zum Beweis der Einhängungssätze herangezogen. Erst später habe ich den hier in § 15 ausgeführten elementaren Beweis des Homotopie-Ausschneidungssatzes gefunden. (Eine wichtige Idee dazu erhielt ich durch eine mündliche Mitteilung von J.M. Boardman.) Er eröffnet einen einfacheren Zugang zu den Einhängungssätzen und damit zu den ersten interessanten Aussagen über die Homotopiegruppen von Sphären (vgl. 16.3) als der Satz von James und als alle anderen uns bekannten Methoden. Daher haben wir entsprechend umgestellt. Geblieben ist von dem früheren Aufbau, daß die Homotopiegruppen erst verhältnismäßig spät erscheinen, obwohl das jetzt nicht mehr nötig wäre. Von den vorhergehenden §§ 1-12 wird für sie nur ein kleiner Teil gebraucht. Für den Satz von James wird die Theorie der §§ 1-12 dagegen entscheidend verwendet (s. insbesondere 17.8 Hilfssatz 14).

Ich danke meinen beiden Mitautoren für die Zusammenarbeit. Herrn Ulrich Mayr danke ich für eine kritische Durchsicht und Frau Marianne Karl für das Schreiben des Manuskripts.

Heidelberg, den 10.5.1970 D. Puppe

Inhalt