

Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

139

Albert Badrikian

Université de Clermont, Clermont-Ferrand/France

Séminaire sur les
Fonctions Aléatoires Linéaires
et les Mesures Cylindriques



Springer-Verlag

Berlin · Heidelberg · New York 1970

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1970. Library of Congress Catalog Card Number 73-124068 Printed in Germany. Title No. 3295.

PREFACE

Le lecteur (s'il y en a !) trouvera ici un exposé relativement détaillé et avec des démonstrations à peu près complètes des résultats fondamentaux sur les mesures cylindriques et les fonctions aléatoires linéaires.

Cet exposé a un caractère "propédeutique" : nous y avons mis une grande partie des résultats que l'on a à utiliser lorsque l'on continue l'étude de telles questions et que l'on en vient aux applications (ce sera l'objet des séminaires suivants).

Tout le monde aura reconnu ici l'influence des idées de Laurent SCHWARTZ (même lorsqu'il n'est pas cité nommément). Toutefois, le contenu de ce texte diffère de celui du livre de L. SCHWARTZ (à paraître au Tata Institute) en ce qu'il considère d'autres mesures que les mesures de Radon ; et pour ces dernières on ne les prend que sur un espace complètement régulier. Et nous nous sommes placés d'emblée dans un cadre probabiliste. Naturellement on y perd en unité (mais pas trop en clarté, nous l'espérons) mais cela permet d'avoir plus d'applications.

Pour la genèse de ce texte, indiquons qu'il a été conçu à l'origine pour former à Clermont-Ferrand un groupe de travail sur cette question, en partant d'un niveau élémentaire (ce qui explique certaines longueurs). L. SCHMETTERER qui a assisté à un certain nombre de séances du séminaire nous a encouragé (sinon poussé) à le publier aux "Lectures Notes in Mathematics". L'auteur le remercie donc chaleureusement.

Nous remercions également les auditeurs qui ont rédigé des exposés.

Enfin, Simone CHEVET, dont le nom n'apparaît pas au cours du texte, a relu certaines parties du manuscrit et nous a aidé à corriger les épreuves, ce dont l'auteur lui est très reconnaissant.

Madame COURAGEOT qui a tapé le manuscrit a également droit à notre gratitude.

Enfin, nous remercions les éditions SPRINGER-VERLAG pour "l'hospitalité" qu'elle nous a accordé dans ses "Lectures Notes".

Clermont-Ferrand, Décembre 1969

TABLE DES MATIERES

<u>Exposé n° 1.- Processus stochastiques linéaires et mesures cylindriques ..</u>	1
1 . Notations et rappels	1
2 . Mesures sur un espace vectoriel de dimension finie et processus stochastiques linéaires	5
3 . Processus stochastiques linéaires et mesures cylindriques (cas général)	7
4 . Conditions de continuité pour les processus stochastiques linéaires	12
<u>Exposé n° 2.- Transformées de Fourier des mesures cylindriques</u>	16
1 . Opérations sur les mesures cylindriques	16
2 . Transformée de Fourier d'une mesure	18
3 . Propriété de continuité d'un processus stochastique linéaire et de la transformée de Fourier de la mesure cylindrique correspondante	21
4 . Interprétation géométrique de la continuité des processus stochastiques linéaires	25
5 . Applications à certaines suites de variables aléatoires	30
6 . Applications aux processus stochastiques	32
7 . Résultats complémentaires sur les images d'une mesure cylindrique par une application continue	33
<u>Exposé n° 3.- Le théorème de Bochner</u>	37
1 . Le dual algébrique d'un espace vectoriel comme limite projective	37
2 . Le théorème de Bochner	39
3 . Compléments du théorème de Bochner	42

<u>Exposé n° 4.- Intégration sur un espace complètement régulier</u>	48
1 . Quelques propriétés des mesures de Radon sur un espace localement compact	48
2 . Mesures positives sur un espace complètement régulier	50
3 . Une propriété des mesures boréliennes de Radon	54
4 . Mesures signées sur un espace complètement régulier	55
5 . Mesures sur un espace complètement régulier et mesures sur un espace compact	62
 <u>Exposé n° 5.- Convergence des mesures</u>	68
1 . Conditions nécessaires et suffisantes de convergence	68
2 . Compacité étroite	75
3 . Le théorème de PROKHOROFF	78
 <u>Exposé n° 6.- Opération sur les mesures de RADON</u>	83
1 . Applications Lusin-mesurables	83
2 . Image d'une mesure de Radon par une application Lusin-mesurable	85
3 . Mesure de Radon induite	89
4 . Produit tensoriel de deux mesures de Radon	92
 <u>Exposé n° 7.- Limites projectives de mesures de RADON</u>	95
1 . Définitions et problème	95
2 . Existence de la limite projective dans le cas des espaces compacts	97
3 . Le théorème de PROKHOROFF	106
4 . Applications aux mesures cylindriques	108
 <u>Exposé n° 8.- Espaces polonais, lusiniens, sousliniens et radoniens</u>	112
1 . Espaces polonais	112
2 . Espaces lusiniens - Espaces sousliniens	113
3 . Cribleage et cribleage strict	117

4 . Exemples d'espaces lusiniens	125
5 . Espaces radoniens	129
6 . Complément au théorème de PROKHOROFF	135
7 . Un dernier résultat sur les espaces sousliniens	138
<u>Exposé n° 9.- Topologies équivalentes</u>	140
1 . Variation de l'espace des mesures de Radon	140
2 . Topologies équivalentes	142
3 . Topologies équivalentes sur un e.l.c. métrisable	143
4 . Démonstration du théorème de Dunford-Pettis	147
<u>Exposé n° 10.- Théorèmes de type Bochner et P. Levy</u>	152
1 . Opérateurs d'Hilbert-Schmidt entre Hilbert	152
2 . Opérateurs d'Hilbert-Schmidt d'un e.l.c. dans un Hilbert	156
3 . Topologie d'Hilbert-Schmidt associée à une topologie localement convexe	164
4 . Condition de Prokhoroff et topologie d'Hilbert-Schmidt	168
Applications	178
<u>Exposé n° 11.- Mesures cylindriques gaussiennes</u>	180
1 . Définitions fondamentales	180
2 . Intégration par rapport à une mesure de Radon gaussienne	184
3 . La mesure de Wiener	190
<u>Exposé n° 12.- Applications radonifiantes</u>	196
1 . Compléments relatifs aux fonctions aléatoires linéaires	196
2 . Applications décomposables	199
3 . Applications universellement décomposables	203
4 . Applications p-radonifiantes	216
Bibliographie	220