Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

78

Horst Herrlich

II. Mathematisches Institut der Freien Universität Berlin

Topologische Reflexionen und Coreflexionen

1968

Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York

Library of Congress Catalog Card Number 68-59062. Printed in Germany. Title No. 3684

VORWORT

Im Wintersemester 1967/68 hielt ich an der Freien Universität Berlin eine zweistündige Vorlesung, die von Herrn D. Poguntke ausgearbeitet und von mir unter Berücksichtigung zahlreicher Bemerkungen der Herren H. Schubert, H. Lenzing und des Referenten dieser Arbeit ergänzt und überarbeitet wurde. Allen genannten Herren sei für Ihre Hilfe herzlich gedankt.

Ziel der Vorlesung war, am Beispiel der Reflexionen zu zeigen, wie sich mengentheoretische Topologie (von einigen bereits als tot abgeschrieben) und Kategorientheorie (von anderen als inhaltslos abgelehnt) wechselseitig befruchten können.

Historische Anmerkungen

(1) Die Konstruktion, mit der ČECH [18] 1937 einen vollständig regulären Raum in einen kompakten T_2-Raum einbettete, kann als Ursprung der hier vorgetragenen Ideen angesehen werden. In Analogie zur Theorie der kompakten T_2-Räume und der Kompaktifizierungen vollständig regulärer Räume wurde von HEWITT [49] 1948 eine Theorie der reellkompakten Räume entwickelt und insbesondere von SHIROTA [91,92] und KATĚTOV [65] weiter ausgebaut. Analoge Betrachtungen stellte BANASCHEWSKI [5] 1955 für nulldimensionale kompakte T_2-Räume an. Die Ähnlichkeiten zwischen den genannten Theorien führten MROWKA [78] gemeinsam mit ENGELKING [23] 1958 zur Begründung einer Theorie der E-regulären und E-kompakten Räume, die er seitdem zum Teil mit seinen Schülern (BLEFKO [11], SHORE u.a.) laufend fortentwickelte [80]. Eine andersartige Verallgemeinerung, die Theorie der k-kompakten Räume, die in [40] begründet und insbesondere von HUŠEK [55,56,57] weiterentwickelt wurde, liefert für unendliche Kardinalzahlen k eine natürliche Hierarchie von Kategorien $\mathfrak{K}_k$, die mit den Kategorien $\mathfrak{K}_{\aleph_0} = \mathfrak{K}$ aller kompakten und $\mathfrak{K}_{\aleph_1} = \mathfrak{R}$ aller reellkompakten Räume T_2-Räume beginnt. Eng verwandt hiermit ist die Theorie der k-ultrakompakten Räume VAN DER SLOTs [93,96]. Eine Verallgemeine-

rung aller dieser Begriffe schließlich, die Theorie der $\mathfrak{E}$-kompakten und $\mathfrak{E}$-regulären Räume [41], stellt das natürliche Bindeglied zwischen diesen topologischen Untersuchungen und kategoriellen Betrachtungen dar.

(2) Daß eine der charakteristischen Eigenschaften der ČECH-STONE-Kompaktifizierung nichts spezifisch Topologisches enthält sondern ein Charakteristikum sehr vieler Konstruktionen aus den verschiedensten mathematischen Gebieten ist, wurde von BOURBAKI [13] und SAMUEL [87] bereits 1948 erkannt ("universelle Abbildungen"). Seit KAN [64] 1958 lassen sich universelle Abbildungsprobleme in der Sprache der Kategorien formulieren. Der von ihm verwandte grundlegende Begriff des adjungierten Funktors ist jedoch für unsere Zwecke zu allgemein. Auch der Satz von FREYD [31] und LAWVERE [72] über die Existenz adjungierter Funktoren und FREYDs speziellere Theorie der reflektiven Unterkategorien helfen uns hier nicht weiter, da FREYDs "Solution-Set-Condition" für die Anwendungen zu unhandlich ist. So scheint es unmöglich, die reflektiven Unterkategorien selbst einer so schönen Kategorie wie der der topologischen Räume $\mathfrak{X}$ befriedigend zu beschreiben. So weiß man z.B. auch nicht, ob der Durchschnitt reflektiver Unterkategorien von $\mathfrak{X}$ wieder reflektiv in $\mathfrak{X}$ ist bzw. ob sich jede Unterkategorie $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{X}$ in eine kleinste $\mathfrak{C}$ umfassende reflektive Unterkategorie von $\mathfrak{X}$ einbetten läßt. Erst in neuerer Zeit hat sich die Erkenntnis durchgesetzt, daß nicht der Begriff der reflektiven Kategorie sondern vielmehr der Begriff der epireflektiven Kategorie den hier behandelten Problemen am besten angepaßt ist. Unter Verwendung von ISBELLs [60] Ergebnissen über Bikategorien gelang es KENNISON [67,70] und mir [43] (z.T. gemeinsam mit VAN DER SLOT [45] und STRECKER [47]) unabhängig voneinander, eine befriedigende Theorie der Epireflexionen zu entwickeln. Die Bedeutung der Epireflexionen wird weiterhin durch folgende Tatsachen unterstrichen:

(a) Fast alle "natürlichen" Beispiele von Reflexionen sind Epireflexionen (siehe § 8).

(b) Jede Reflexion läßt sich als Komposition zweier Epireflexionen darstellen (KENNISON [70],BARON [9]).

(c) Es gibt äußerst "pathologische" topologische Reflexionen (Beispiele wurden von KENNISON [68] und mir [43] gefunden. Interessanterweise benutzten wir unabhängig voneinander gewisse von DE GROOT [35] konstruierte Räume).

Demgemäß hieße der Titel meiner Vorlesung richtiger "Topologische Epireflexionen und (Mono-) Coreflexionen".

(3) Topologische Coreflexionen wurden erst verhältnismäßig spät entdeckt. Zwar benutzt man seit langem "Modifizierungen" der Topologie, die in unserer Sprechweise Coreflexionen darstellen (vergl. insbesondere G. S. YOUNG [108]), aber erst 1963 erkannte und betonte GLEASON [34] in seiner grundlegenden Arbeit über lokal-zusammenhängende "Verfeinerungen" den universellen Charakter dieser Konstruktionen. Seinem Schüler KENNISON [67] gelang es 1965 unter Verwendung der Ergebnisse FREYDs zu zeigen, daß jede (nicht-triviale) coreflektive Unterkategorie von $\mathfrak{T}$ bereits bicoreflektiv ist (daß also topologische Coreflexionen stets eine geeignete Modifikation der Topologie auf festgehaltener Trägermenge bedeuten - ein Grund hierfür ist die Existenz hinreichend vieler Generatoren) und coreflektive Unterkategorien von $\mathfrak{T}$ befriedigend zu charakterisieren. FRANKLIN [29,30] stellte eine gemeinsame Theorie der coreflektiven Unterkategorien aller folgenbestimmten und aller kompakterzeugten T_2-Räume auf. Eine Theorie aller topologischen Coreflexionen wurde gemeinsam von STRECKER und mir [48] entwickelt.

Inhaltsübersicht

C sei eine vollständige, lokal- und colokal-kleine Kategorie.
$\mathfrak{A}$ sei eine volle Unterkategorie von **C**.

I enthält wohlbekannte Ergebnisse (vergl. GILLMAN-JERISON [33]) über VOLLSTÄNDIG REGULÄRE, KOMPAKTE und REELLKOMPAKTE T_2-Räume, die in einer Weise präsentiert werden, daß die am Ende des Kapitels schematisch zusammengefaßten Analogien und Beziehungen zwischen den genannten Raumklassen eine Untersuchung im allgemeineren (lies: kategoriellen) Rahmen geradezu aufdrängen und insbesondere die Definition der epireflektiven Unterkategorien motivieren.

II beleuchtet den kategoriellen Hintergrund.

§ 5 enthält die Definition von LIMITES (insbesondere von PRODUKTEN, KERNEN, PULLBACKS, INVERSEN BILDERN, DURCHSCHNITTEN und TERMINALEN OBJEKTEN) und den wichtigen Satz 5.8.1., der die Beziehungen zwischen den verschiedenen speziellen Limesarten in vollständigen Kategorien besonders klar zum Ausdruck bringt.

§ 6 enthält die Definition von DARSTELLBAREN FUNKTOREN, UNIVERSELLEN ABBILDUNGEN, ADJUNGIERTEN FUNKTOREN, die Sätze 6.4.3., 6.4.4. über die Beziehungen dieser Begriffe zueinander, den wichtigen Existenzsatz für adjungierte Funktoren 6.4.6. und zahlreiche Beispiele (6.3.2. und 6.4.7.). Der nur an Reflexionen interessierte Leser kann sich darauf beschränken, die Definition der universellen Abbildungen und adjungierten Funktoren nachzulesen. Insbesondere werden wir die Existenz von Reflektoren in 10.2.2. auch ohne Benutzung von 6.4.6. nachweisen.

§ 7 enthält eine sorgfältige Erörterung des Problems, Unterobjekte bzw. Einbettungen in einer auch für die Anwendungen geeigneten Form zu definieren. Dabei gelangen wir zu dem Ergebnis, daß nicht die Monomorphismen sondern die EXTREMEN MONOMORPHISMEN (Definition 7.1.1.) das Problem optimal lösen.
In 7.2.12. zeigen wir, daß die Klasse aller extremen

Monomorphismen von $\mathbf{C}$ die kleinste Klasse von $\mathbf{C}$-Morphismen ist, die alle Kerne von $\mathbf{C}$ enthält und abgeschlossen bez. Komposition und Durchschnittsbildung ist, und daß sie die einzige Klasse $\mathfrak{M}$ von $\mathbf{C}$-Morphismen ist, die abgeschlossen ist bez. Komposition mit Isomorphismen und für die jeder $\mathbf{C}$-Morphismus f bis auf Isomorphie eindeutig in der Form $f = m \cdot e$ mit e epi und $m \in \mathfrak{M}$ darstellbar ist. Dieser FAKTORISIERUNGSSATZ, eine natürliche Verallgemeinerung des aus der Gruppentheorie bekannten Homomorphiesatzes, stellt sich bei der Untersuchung und Charakterisierung epireflektiver Unterkategorien als äußerst wesentlich heraus.

III ist der Kern der Vorlesung und enthält die Hauptergebnisse über epireflektive Unterkategorien.

§ 8 enthält die grundlegenden Definitionen, eine Fülle von Beispielen und eine Begründung dafür, daß wir uns auf die Untersuchung voller Unterkategorien beschränken.

§ 9 enthält eine Untersuchung der Beziehungen zwischen Limites und (epi) reflektiven Unterkategorien. Hervorzuheben ist insbesondere der Satz 9.3.2., der besagt, daß jede epireflektive Unterkategorie von von $\mathbf{C}$ stark abgeschlossen bez. Bildung von Limites in $\mathbf{C}$, was besagt, daß mit (A_i) auch $\prod A_i$ zu $\mathfrak{a}$ gehört und daß aus $K \xrightarrow{k} A = \ker\left(A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X\right)$ und $A \in |\mathfrak{a}|$ stets $K \in |\mathfrak{a}|$ folgt.
(Die vorliegenden Untersuchungen stellen nicht nur eine Anwendung der Theorie der Kategorien dar. Sie haben gleichzeitig zu neuen kategoriellen Begriffsbildungen geführt. Hier ist insbesondere der Begriff der BEZ. LIMITES STARK ABGESCHLOSSENEN UNTERKATEGORIEN hervorzuheben. Er spielt bei der Charakterisierung epireflektiver Unterkategorien neben dem Begriff der extremen Unterobjekte die entscheidende Rolle).

§ 10 Die Ergebnisse der §§ 7 und 9 gestatten nun eine mühelose Herleitung des CHARAKTERISIERUNGSSATZES 10.2.1.: Äquivalent sind:

(1) $\mathfrak{a}$ ist epireflektiv in $\mathbf{C}$.

(2) $\mathfrak{a}$ ist stark abgeschlossen bez. Bildung von Limites in $\mathbf{C}$.

(3) $\mathfrak{a}$ ist abgeschlossen bez. Bildung von Produkten und stark abgeschlossen bez. Bildung von Kernen in $\mathbf{C}$.

(4) $\mathfrak{a}$ ist abgeschlossen bez. Bildung von Produkten und extremen Unterobjekten in $\mathbf{C}$.

Von einer ähnlichen Charakterisierung reflektiver Unterkategorien sind wir weit entfernt.

§ 11 Aus dem Charakterisierungssatz folgt unmittelbar, daß zu jedem $\mathfrak{a}$ eine kleinste $\mathfrak{a}$ umfassende epireflektive Unterkategorie $\mathfrak{B}$ von $\mathbf{C}$ existiert. Die Objekte von $\mathfrak{B}$ werden in 11.2.3. u.a. als extreme Unterobjekte von Produkten von Objekten in $\mathfrak{a}$ charakterisiert. Der Satz 11.2.2., der besagt, daß jeder $\mathfrak{a}$-FORTSETZBARE (Definition 11.2.1.) Epimorphismus bereits $\mathfrak{B}$-FORTSETZBAR ist, stellt eine natürliche Verallgemeinerung von Sätzen über die Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen (1.3.2., 2.3.2., 3.3.1.) dar.
Analoge Sätze für reflektive Unterkategorien sind nicht bekannt.

§ 12 enthält den Beweis der Tatsache, daß sich jeder Reflektor als Komposition zweier Epireflektoren darstellen läßt.

§ 13 Eine coreflektive Unterkategorie $\mathfrak{a}$ von $\mathbf{C}$, die einen Generator von $\mathbf{C}$ enthält, ist bereits bicoreflektiv in $\mathbf{C}$ (13.1.1.), d.h. die Coreflexionsmorphismen sind Bimorphismen (d.h. gleichzeitig Mono- und Epimorphismen).
Ist jedes Objekt von $\mathbf{C}$ initial oder Generator, so sind für jedes $\mathfrak{a}$, das nicht nur initiale Objekte von $\mathbf{C}$ enthält, die folgenden Bedingungen äquivalent (13.1.2.):

(1) $\mathfrak{G}$ ist coreflektiv in $\mathbf{C}$.

(2) $\mathfrak{G}$ ist bicoreflektiv in $\mathbf{C}$

(3) $\mathfrak{G}$ ist (stark) abgeschlossen bez. Bildung von Limites in $\mathbf{C}$.

(4) $\mathfrak{G}$ ist (stark) abgeschlossen bez. Bildung von Produkten und Kernen in $\mathbf{C}$.

(5) $\mathfrak{G}$ ist abgeschlossen bez. Bildung von Produkten und extremen Quotienten in $\mathbf{C}$.

§ 14 Ebenso wie mit einer abelschen Gruppe eine Torsionsgruppe und eine torsionsfreie Gruppe in natürlicher Weise verknüpft sind, sind mit jedem kommutativen Ring ein Nilring und ein reduzierter Ring mit jedem punktierten topologischen Raum ein zusammenhängender Raum und ein punktierter Raum (X,x) mit Zusammenhangskomponente $(x) = \{x\}$ verbunden. Diese Beziehungen lassen sich äußerst einfach mit Hilfe der Begriffe konstanter Morphismus, Epireflexion und Monocoreflexion darstellen.

IV enthält die Übersetzung (Wörterbuch § 15) der Ergebnisse von III in die Sprache der Topologie und zahlreiche weitere topologische Beispiele.

Berlin, 1968

H. Herrlich

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

Z E I C H E N E R K L Ä R U N G

Spezielle topologische Räume

$\mathbb{R}$	sei der Raum der reellen Zahlen
$\mathbb{Q}$	sei der Raum der rationalen Zahlen
$\mathbb{I}$	sei der Raum der irrationalen Zahlen
$\mathbb{Z}$	sei der Raum der ganzen Zahlen
$[0,1]$	sei der Raum der reellen Zahlen des Intervalls $[0,1]$
$\mathbb{D}_2$	sei ein zweipunktiger, diskreter Raum

Spezielle Kategorien

$\mathfrak{M}$	sei die Kategorie der Mengen und Abbildungen
$\mathfrak{M}^A$	sei die Kategorie der A-Moduln und A-linearen Abbildungen (dabei sei A ein kommutativer Ring mit Eins)
$\mathfrak{G}$	sei die Kategorie der Gruppen und Homomorphismen
$\mathfrak{T}$	sei die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen
$\mathfrak{H}$	sei die Kategorie der T_2-Räume und stetigen Abbildungen
$\mathfrak{V}$	sei die Kategorie der vollständig regulären Räume und stetigen Abbildungen
$\mathfrak{R}$	sei die Kategorie der reellkompakten Räume und stetigen Abbildungen
$\mathfrak{K}$	sei die Kategorie der kompakten T_2-Räume und stetigen Abbildungen
$\mathfrak{K}_k$	sei die Kategorie der k-kompakten Räume und stetigen Abbildungen
$\mathfrak{O}$	sei die Kategorie der geordneten Mengen und monotonen Abbildungen
$\mathfrak{S}$	sei die Kategorie der Halbgruppen und Homomorphismen
$\mathfrak{M}_p$	sei die Kategorie der punktierten Mengen und punktierten Abbildungen
$\mathfrak{T}_p$	sei die Kategorie der punktierten topologischen Räume und punktierten stetigen Abbildungen

Spezielle Morphismenklassen

$\mathfrak{M}_o$	sei die Klasse aller extremen Monomorphismen einer Kategorie $\mathfrak{C}$
$\mathfrak{E}_o$	sei die Klasse aller extremen Epimorphismen einer Kategorie $\mathfrak{C}$
$\mathfrak{M}$	sei eine bez. Komposition mit Isomorphismen abgeschlossene Klasse von $\mathfrak{C}$-Monomorphismen
$\mathfrak{E}$	sei eine bez. Komposition mit Isomorphismen abgeschlossene Klasse von $\mathfrak{C}$-Epimorphismen
$C(X,Y)$	sei die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y
$C(X)$	sei die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$
$C^*(X)$	sei die Menge aller beschränkten stetigen Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{Z}$ seien beliebige Kategorien

$\mathfrak{E}$ sei volle Unterkategorie von $\mathfrak{H}$

Ab 8.2.3. sind alle UNTERKATEGORIEN voll und isomorphieabgeschlossen