Springer-Lehrbuch

Springer
Berlin
Heidelberg
New York
Hongkong
London
Mailand
Paris
Tokio

Grundwissen Mathematik

Ebbinghaus et al.: Zahlen
Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie
Hämmerlin†/Hoffmann: Numerische Mathematik
Koecher†: Lineare Algebra und analytische Geometrie
Leutbecher: Zahlentheorie
Remmert/Schumacher: Funktionentheorie 1
Remmert: Funktionentheorie 2
Walter: Analysis 1
Walter: Analysis 2

Herausgeber der Grundwissen-Bände im Springer-Lehrbuch-Programm sind: F. Hirzebruch, H. Kraft, K. Lamotke, R. Remmert, W. Walter

Wolfgang Walter

Analysis 1

Siebente Auflage

Mit 145 Abbildungen

Springer

Wolfgang Walter
Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut I
76128 Karlsruhe, Deutschland
e-mail: wolfgang.walter@math.uni-karlsruhe.de

Mathematics Subject Classification (2000): 26-01, 26-03, 26Axx, 34A30

Dieser Band erschien bis zur 2. Auflage (1990) als Band 3 der Reihe *Grundwissen Mathematik*

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 3-540-20388-5 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 3-540-41984-5 6. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Springer-Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media GmbH

springer.de

Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg
Druck- und Bindearbeiten: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem Papier 44/3111 – 5 4 3 2 1 SPIN: 11660668

Vorwort zur 7. Auflage

In der Neuauflage wurden keine wesentlichen Änderungen vorgenommen. Einige Druckfehler wurden beseitigt und auch kleine Korrekturen im Text angebracht. Herrn Professor Alexander Ostermann und seinen Studenten der Universität Innsbruck danke ich für eine Reihe entsprechender Hinweise.

Karlsruhe, im November 2003 Wolfgang Walter

Vorwort zur 6. Auflage

In der Neuauflage sind keine größeren Änderungen vorgenommen worden. Der Text wurde durch zwei Einschübe bereichert. Im Abschnitt 11.20 werden einige Funktionen mit interessanten Eigenschaften untersucht, die ein vertieftes Verständnis über Extrema von Funktionen und die zugehörigen Kriterien vermittelt.

Der Abschnitt 12.27 ist der Gronwallschen Ungleichung gewidmet; sie wird heute in zahlreichen Gebieten der Analysis als wertvolle Hilfe benutzt. Daran schließen sich in 12.28–29 einige verwandte Integral-Ungleichungen an. Die Darstellung soll auch deutlich machen, daß wir heute einen sehr einfachen Zugang zu diesen Ungleichungen haben und – was erstaunen mag – daß Gronwalls Schranke nicht optimal ist.

Verschiedene neue Aufgaben, teilweise mit Lösungen, erweitern das Übungsmaterial.

Für die Hilfe bei der Vorbereitung der Neuauflage gilt Frau H. Schreiber und Frau M. Ewald mein bester Dank, ebenso dem Verlag für die gute Zusammenarbeit und das bereitwillige Eingehen auf meine Wünsche.

Karlsruhe, im Juni 2001 Wolfgang Walter

Vorwort zur 4. Auflage

Größere Änderungen wurden in der Neuauflage nicht vorgenommen. Hinweise aus dem Leserkreis, für die sich der Autor bedankt, haben die Zahl der noch unentdeckten Druckfehler weiter verringert und auch sonst zu Verbesserungen geführt.

Das letzte Thema von §12 „Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes“ wurde durch mehrere Übungsaufgaben vertieft; insbesondere wurde der Satz von Zygmund aufgenommen. Der hier gebotene Zugang zu wesentlichen Sätzen der Analysis besticht durch Kürze und Einfachheit und ist auch heute noch nicht allgemein bekannt, wie die entsprechende Literatur zeigt. Er geht wohl auf Zygmund zurück und findet sich in dem Buch *Theory of the Integral* von S. Saks (2nd ed., Warszawa 1937, p. 203). Seine Grundidee läßt sich bis auf L. Scheeffer (Acta math. 5 (1884/1885)) zurückverfolgen.

Karlsruhe, im November 1996 Wolfgang Walter

Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Buch ist der erste Band eines zweibändigen Werkes über Analysis und behandelt die Funktionen einer reellen Veränderlichen. In der komplexen Analysis beschränkt es sich im wesentlichen auf Potenzreihen. Es enthält insbesondere den Stoff, welcher üblicherweise im ersten Semester einer einführenden Analysis-Vorlesung für Mathematiker, Physiker und Informatiker geboten wird, und geht an einigen Stellen darüber hinaus. Das Buch wendet sich an Studenten, denen es sich als ein hilfreicher Begleiter der Vorlesung und eine Quelle zur Vertiefung des Gegenstandes anbietet, an die im Beruf stehenden Mathematiker, besonders an die Lehrer an weiterführenden Schulen, und schließlich an alle, die etwas über die Analysis und ihre Bedeutung im größeren naturwissenschaftlichen und kulturellen Zusammenhang erfahren möchten.

Damit sind wir bei einem wesentlichen Anliegen der Lehrbuchreihe „Grundwissen Mathematik", dem historischen Bezug. Die mathematischen Begriffe und Inhalte der Analysis sind nicht vom Himmel der reinen Erkenntnis gefallen, und kein Denker im Elfenbeinturm hat sie ersonnen. Die europäische Geistesgeschichte beginnt dort, wo Natur nicht mehr als rätselhaftes, von unheimlichen höheren Mächten gesteuertes Geschehen, sondern als rational erklärbar verstanden wird: bei den jonischen Philosophen des 6. vorchristlichen Jahrhunderts. Die Analysis ist entstanden in der Verfolgung dieses Zieles, die Welt rational zu durchdringen und ihre Gesetzmäßigkeiten zu finden. Ihre Geschichte ist ein Stück Kulturgeschichte.

Jedem einzelnen Paragraphen ist ein Prolog vorangestellt, in welchem die historische Entwicklung und gelegentlich auch die Lebensumstände der Hauptdarsteller dargelegt werden. Die Grundbegriffe reelle Zahl, Funktion, Grenzwert und Stetigkeit, Ableitung und Integral treten uns im heutigen Unterricht in der Form eines Axiomensystems oder einer abstrakten Definition entgegen, welche wenig über Sinn, Zweck und Bedeutung verrät. All diese Begriffe sind im Ansatz bereits in der Antike vorhanden, und sei es auch nur in der Form der Nichtbewältigung (wie bei der reellen Zahl). Sie waren das unentbehrliche Handwerkszeug für die Entdeckung der Naturgesetze und wurden dabei unter bewußter Aufgabe der „griechischen Strenge" geschaffen, um schließlich im 19. Jahrhundert wieder auf ein sicheres Fundament gestellt zu werden. Die Schilderung dieses historischen Prozesses stößt auf eine wohlbekannte Schwierigkeit: Die methodisch bedingte Anordnung einer heutigen Vorlesung ist völlig verschieden von der historischen Evolution des Gegenstandes. Wenn diese nicht in einen Anhang verbannt, sondern parallel zum Text dargestellt wird, so war dafür vor allem der Gesichtspunkt maßgebend, daß nur in der Nähe zum Gegenstand eine lebendige, durch konkrete Aufgaben und Beispiele illustrierte Beschreibung gedeiht. Verweise und gelegentliche Überschneidungen waren dabei nicht ganz zu vermeiden.

Die sachlichen und methodischen Prinzipien, denen der Autor hier Gestalt geben wollte, seien kurz erläutert. Das Fundament, auf dem wir das Gebäude der Analysis errichten, ist ein Axiomensystem für die reellen Zahlen. Das Vollständigkeitsaxiom erscheint in der Form der Existenz des Supremums einer beschränkten Menge. Im Teil A (Grundlagen) werden die Überlegungen, welche zur Existenz von Wurzeln führen, sogleich für Lipschitz-Funktionen durchgeführt. So ergibt sich ohne Mehrarbeit (und ohne ε und δ) ein erster Satz über die Umkehrfunktion. Die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel, hier kurz AGM-Ungleichung genannt, wird an mehreren Stellen mit Vorteil benutzt. Die Themen Stetigkeit und Grenzwert werden im Teil B vor der Differential- und Integralrechnung behandelt, und in diesem Teil werden auch die elementaren Funktionen eingeführt. Hier folgen wir also einer „kontinentalen", auf Euler (Introductio) und Cauchy (Cours d'Analyse) zurückgehenden Tradition, während englischsprachige Lehrbücher des ‚Calculus' die Differentialrechnung nach vorne ziehen. Eine bewußte Betonung der Ordnungsstruktur (sie ist schon beim Vollständigkeitsaxiom angedeutet) kommt u.a. bei den zentralen Existenzsätzen, dem Zwischenwertsatz und dem Satz von Bolzano-Weierstraß und ihren Beweisen zum Ausdruck: Eine beschränkte Folge hat einen größten (und einen kleinsten) Häufungspunkt, und eine stetige, das Vorzeichen wechselnde Funktion hat eine erste Nullstelle. Das Halbierungsverfahren als Beweisprinzip erscheint erst im 2. Band.

Im Teil C schließlich wird die Differential- und Integralrechnung dargestellt. Wir beginnen mit dem Integral. Man kann jedoch bei der Erarbeitung des Stoffes ohne weiteres die Reihenfolge umkehren, also die Abschnitte 10.1 bis 10.11 über die Ableitung vorziehen und nach dem Integral (§ 9) beim Hauptsatz weitermachen. Die hier gewählte Anordnung hat der Autor seit vielen Jahren im Hörsaal erprobt. Sie übt auf den Dozenten einen gelinden Druck aus, den zentralen Begriff des Integrals eingehend und mit Beispielen zu behandeln; der Hauptsatz ist ja noch nicht in Sicht! Daß wir beim altbewährten Riemann-Integral geblieben sind, hat vor allem zwei Gründe. Das Integral mißt eine Größe, welche elementarer Messung nicht zugänglich ist. Die Einschließung von beiden Seiten, welche dem Riemann-Integral zugrundeliegt, bringt diesen Aspekt in unübertroffener Klarheit und Anschaulichkeit zum Ausdruck. Das gilt im besonderen für die durch Integrale gemessenen geometrischen und physikalischen Größen. Zum zweiten wurde in den letzten Jahren ein einfacher, direkter Zugang zum Lebesgue- und Perron-Integral gefunden, der auf Riemannschen Summen basiert und im zweiten Band dargestellt werden soll. Am Schluß dieses Teiles wird der allgemeine Mittelwertsatz mit einer einfachen, noch wenig bekannten Methode bewiesen. Ob sie dereinst den Satz von Rolle verdrängen wird, wird sich erweisen (hier hat sie es nicht getan).

Ein Verweis auf Satz 6.7 (Corollar 6.7) bezieht sich auf den Satz (das Corollar) im Abschnitt 6.7, welcher sich in § 6 befindet. Die Aufgabe 7 im Aufgabenteil von § 6 wird als Aufgabe 6.7, innerhalb von § 6 als Aufgabe 7 zitiert.

Ein Verweis auf Abschnitt II.8.1 bezieht sich auf den Abschnitt 8.1 im zweiten Band.

Das Herausgebergremium hat das Entstehen des Werkes kritisch begleitet, und insbesondere Herr Lamotke hat durch nützliche Vorschläge zu seiner Verbesserung beigetragen. Herr Dr. A. Voigt hat fast alle Bilder mit sicherem Blick für das Wesentliche gezeichnet; das Programmieren des Tuschezeichners besorgte Herr cand. inf. B. Stauß. Die schwierige Aufgabe, aus einer vielfach schwer entzifferbaren Vorlage ein sauberes Manuskript herzustellen, besorgte Frau I. Jendrasik mit großer Sachkenntnis und Zuverlässigkeit. Die Herren Dr. R. Redlinger und Dr. A. Voigt haben Korrekturen gelesen und dabei manche wertvolle Anregung gegeben. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt. Nicht zuletzt gilt mein Dank dem Springer-Verlag. Er hat dem Autor alle Unterstützung gewährt und ist auf seine Wünsche zuvorkommend eingegangen.

Für Anregungen aus dem Leserkreis werde ich immer dankbar sein.

Karlsruhe, im Juli 1985 Wolfgang Walter

Inhaltsverzeichnis

Hinweise für den Leser

Das Buch ist unterteilt in 12 Paragraphen, und die Abschnitte in einem Paragraphen sind durchnumeriert. Ein Hinweis auf Satz 6.7 bezieht sich auf den Satz im Abschnitt 6.7, den man in §6 findet. Das Corollar 6.7 befindet sich im selben Abschnitt.

Jeder Paragraph wird mit einem Aufgabenteil abgeschlossen. Die Aufgabe Nr.7 im Aufgabenteil von §6 wird als Aufgabe 6.7, innerhalb von §6 einfach als Aufgabe 7 zitiert. Lösungen und auch Hinweise zur Lösung von Aufgaben sind in einem Kapitel am Ende des Buches ab S. 375 gesammelt.

Bei der Beschreibung der historischen Entwicklung wird häufig auf die Originalliteratur oder auf entsprechende historische Werke verwiesen. Man findet diese Literatur im Kapitel „Literatur" am Ende des Buches. In eckigen Klammern gesetzte Angaben im Text wie [Cantor III, S. 75] oder Cauchy [1823] weisen auf diese Literatursammlung hin; dabei ist die Jahreszahl das Erscheinungsjahr.

Gelegentlich wird auf den zweiten Band verwiesen. Ein Hinweis auf den Abschnitt II.8.1 bezieht sich auf den Abschnitt 8.1 im zweiten Band.