

Springer

Berlin

Heidelberg

New York

Hongkong

London

Mailand

Paris

Tokio



Grundwissen Mathematik

Ebbinghaus et al.: Zahlen

Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie

Hämmerlin[†]/Hoffmann: Numerische Mathematik

Koecher[†]: Lineare Algebra und analytische Geometrie

Leutbecher: Zahlentheorie

Remmert/Schumacher: Funktionentheorie 1

Remmert: Funktionentheorie 2

Walter: Analysis 1

Walter: Analysis 2

Herausgeber der Grundwissen-Bände im Springer-Lehrbuch-
Programm sind: F. Hirzebruch, H. Kraft, K. Lamotke,
R. Remmert, W. Walter

Wolfgang Walter

Analysis 1

Siebente Auflage

Mit 145 Abbildungen



Springer

Wolfgang Walter
Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut I
76128 Karlsruhe, Deutschland
e-mail: wolfgang.walter@math.uni-karlsruhe.de

Mathematics Subject Classification (2000): 26-01, 26-03, 26Axx, 34A30

Dieser Band erschien bis zur 2. Auflage (1990) als Band 3 der Reihe *Grundwissen Mathematik*

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

ISBN 3-540-20388-5 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 3-540-41984-5 6. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer-Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media GmbH

springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1985, 1990, 1992, 1997, 1999, 2001, 2004
Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg
Druck- und Bindearbeiten: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem Papier 44/3111 – 5 4 3 2 1 SPIN: 11660668

Vorwort zur 7. Auflage

In der Neuauflage wurden keine wesentlichen Änderungen vorgenommen. Einige Druckfehler wurden beseitigt und auch kleine Korrekturen im Text angebracht. Herrn Professor Alexander Ostermann und seinen Studenten der Universität Innsbruck danke ich für eine Reihe entsprechender Hinweise.

Karlsruhe, im November 2003

Wolfgang Walter

Vorwort zur 6. Auflage

In der Neuauflage sind keine größeren Änderungen vorgenommen worden. Der Text wurde durch zwei Einschübe bereichert. Im Abschnitt 11.20 werden einige Funktionen mit interessanten Eigenschaften untersucht, die ein vertieftes Verständnis über Extrema von Funktionen und die zugehörigen Kriterien vermittelt.

Der Abschnitt 12.27 ist der Gronwallschen Ungleichung gewidmet; sie wird heute in zahlreichen Gebieten der Analysis als wertvolle Hilfe benutzt. Daran schließen sich in 12.28–29 einige verwandte Integral-Ungleichungen an. Die Darstellung soll auch deutlich machen, daß wir heute einen sehr einfachen Zugang zu diesen Ungleichungen haben und – was erstaunen mag – daß Gronwalls Schranke nicht optimal ist.

Verschiedene neue Aufgaben, teilweise mit Lösungen, erweitern das Übungsmaterial.

Für die Hilfe bei der Vorbereitung der Neuauflage gilt Frau H. Schreiber und Frau M. Ewald mein bester Dank, ebenso dem Verlag für die gute Zusammenarbeit und das bereitwillige Eingehen auf meine Wünsche.

Karlsruhe, im Juni 2001

Wolfgang Walter

Vorwort zur 4. Auflage

Größere Änderungen wurden in der Neuauflage nicht vorgenommen. Hinweise aus dem Leserkreis, für die sich der Autor bedankt, haben die Zahl der noch unentdeckten Druckfehler weiter verringert und auch sonst zu Verbesserungen geführt.

Das letzte Thema von §12 „Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes“ wurde durch mehrere Übungsaufgaben vertieft; insbesondere wurde der Satz von Zygmund aufgenommen. Der hier gebotene Zugang zu wesentlichen Sätzen der Analysis besticht durch Kürze und Einfachheit und ist auch heute noch nicht allgemein bekannt, wie die entsprechende Literatur zeigt. Er geht wohl auf Zygmund zurück und findet sich in dem Buch *Theory of the Integral* von S. Saks (2nd ed., Warszawa 1937, p. 203). Seine Grundidee läßt sich bis auf L. Scheeffer (*Acta math.* 5 (1884/1885)) zurückverfolgen.

Karlsruhe, im November 1996

Wolfgang Walter

Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Buch ist der erste Band eines zweibändigen Werkes über Analysis und behandelt die Funktionen einer reellen Veränderlichen. In der komplexen Analysis beschränkt es sich im wesentlichen auf Potenzreihen. Es enthält insbesondere den Stoff, welcher üblicherweise im ersten Semester einer einführenden Analysis-Vorlesung für Mathematiker, Physiker und Informatiker geboten wird, und geht an einigen Stellen darüber hinaus. Das Buch wendet sich an Studenten, denen es sich als ein hilfreicher Begleiter der Vorlesung und eine Quelle zur Vertiefung des Gegenstandes anbietet, an die im Beruf stehenden Mathematiker, besonders an die Lehrer an weiterführenden Schulen, und schließlich an alle, die etwas über die Analysis und ihre Bedeutung im größeren naturwissenschaftlichen und kulturellen Zusammenhang erfahren möchten.

Damit sind wir bei einem wesentlichen Anliegen der Lehrbuchreihe „Grundwissen Mathematik“, dem historischen Bezug. Die mathematischen Begriffe und Inhalte der Analysis sind nicht vom Himmel der reinen Erkenntnis gefallen, und kein Denker im Elfenbeinturm hat sie eronnen. Die europäische Geistesgeschichte beginnt dort, wo Natur nicht mehr als rätselhaftes, von unheimlichen höheren Mächten gesteuertes Geschehen, sondern als rational erklärbar verstanden wird: bei den jonischen Philosophen des 6. vorchristlichen Jahrhunderts. Die Analysis ist entstanden in der Verfolgung dieses Zieles, die Welt rational zu durchdringen und ihre Gesetzmäßigkeiten zu finden. Ihre Geschichte ist ein Stück Kulturgeschichte.

Jedem einzelnen Paragraphen ist ein Prolog vorangestellt, in welchem die historische Entwicklung und gelegentlich auch die Lebensumstände der Hauptdarsteller dargelegt werden. Die Grundbegriffe reelle Zahl, Funktion, Grenzwert und Stetigkeit, Ableitung und Integral treten uns im heutigen Unterricht in der Form eines Axiomensystems oder einer abstrakten Definition entgegen, welche wenig über Sinn, Zweck und Bedeutung verrät. All diese Begriffe sind im Ansatz bereits in der Antike vorhanden, und sei es auch nur in der Form der Nichtbewältigung (wie bei der reellen Zahl). Sie waren das unentbehrliche Handwerkszeug für die Entdeckung der Naturgesetze und wurden dabei unter bewußter Aufgabe der „griechischen Strenge“ geschaffen, um schließlich im 19. Jahrhundert wieder auf ein sicheres Fundament gestellt zu werden. Die Schilderung dieses historischen Prozesses stößt auf eine wohlbekannte Schwierigkeit: Die methodisch bedingte Anordnung einer heutigen Vorlesung ist völlig verschieden von der historischen Evolution des Gegenstandes. Wenn diese nicht in einen Anhang verbannt, sondern parallel zum Text dargestellt wird, so

war dafür vor allem der Gesichtspunkt maßgebend, daß nur in der Nähe zum Gegenstand eine lebendige, durch konkrete Aufgaben und Beispiele illustrierte Beschreibung gedeiht. Verweise und gelegentliche Überschneidungen waren dabei nicht ganz zu vermeiden.

Die sachlichen und methodischen Prinzipien, denen der Autor hier Gestalt geben wollte, seien kurz erläutert. Das Fundament, auf dem wir das Gebäude der Analysis errichten, ist ein Axiomensystem für die reellen Zahlen. Das Vollständigkeitsaxiom erscheint in der Form der Existenz des Supremums einer beschränkten Menge. Im Teil A (Grundlagen) werden die Überlegungen, welche zur Existenz von Wurzeln führen, sogleich für Lipschitz-Funktionen durchgeführt. So ergibt sich ohne Mehrarbeit (und ohne ε und δ) ein erster Satz über die Umkehrfunktion. Die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel, hier kurz AGM-Ungleichung genannt, wird an mehreren Stellen mit Vorteil benutzt. Die Themen Stetigkeit und Grenzwert werden im Teil B vor der Differential- und Integralrechnung behandelt, und in diesem Teil werden auch die elementaren Funktionen eingeführt. Hier folgen wir also einer „kontinentalen“, auf Euler (Introductio) und Cauchy (Cours d'Analyse) zurückgehenden Tradition, während englischsprachige Lehrbücher des ‚Calculus‘ die Differentialrechnung nach vorne ziehen. Eine bewußte Betonung der Ordnungsstruktur (sie ist schon beim Vollständigkeitsaxiom angedeutet) kommt u.a. bei den zentralen Existenzsätzen, dem Zwischenwertsatz und dem Satz von Bolzano-Weierstraß und ihren Beweisen zum Ausdruck: Eine beschränkte Folge hat einen größten (und einen kleinsten) Häufungspunkt, und eine stetige, das Vorzeichen wechselnde Funktion hat eine erste Nullstelle. Das Halbierungsverfahren als Beweisprinzip erscheint erst im 2. Band.

Im Teil C schließlich wird die Differential- und Integralrechnung dargestellt. Wir beginnen mit dem Integral. Man kann jedoch bei der Erarbeitung des Stoffes ohne weiteres die Reihenfolge umkehren, also die Abschnitte 10.1 bis 10.11 über die Ableitung vorziehen und nach dem Integral (§9) beim Hauptsatz weitermachen. Die hier gewählte Anordnung hat der Autor seit vielen Jahren im Hörsaal erprobt. Sie übt auf den Dozenten einen gelinden Druck aus, den zentralen Begriff des Integrals eingehend und mit Beispielen zu behandeln; der Hauptsatz ist ja noch nicht in Sicht! Daß wir beim altbewährten Riemann-Integral geblieben sind, hat vor allem zwei Gründe. Das Integral mißt eine Größe, welche elementarer Messung nicht zugänglich ist. Die Einschließung von beiden Seiten, welche dem Riemann-Integral zugrundeliegt, bringt diesen Aspekt in unübertroffener Klarheit und Anschaulichkeit zum Ausdruck. Das gilt im besonderen für die durch Integrale gemessenen geometrischen und physikalischen Größen. Zum zweiten wurde in den letzten Jahren ein einfacher, direkter Zugang zum Lebesgue- und Perron-Integral gefunden, der auf Riemannschen Summen basiert und im zweiten Band dargestellt werden soll. Am Schluß dieses Teiles wird der allgemeine Mittelwertsatz mit einer einfachen, noch wenig bekannten Methode bewiesen. Ob sie dereinst den Satz von Rolle verdrängen wird, wird sich erweisen (hier hat sie es nicht getan).

Ein Verweis auf Satz 6.7 (Corollar 6.7) bezieht sich auf den Satz (das Corollar) im Abschnitt 6.7, welcher sich in §6 befindet. Die Aufgabe 7 im Aufgabenteil von §6 wird als Aufgabe 6.7, innerhalb von §6 als Aufgabe 7 zitiert.

Ein Verweis auf Abschnitt II.8.1 bezieht sich auf den Abschnitt 8.1 im zweiten Band.

Das Herausbergremium hat das Entstehen des Werkes kritisch begleitet, und insbesondere Herr Lamotke hat durch nützliche Vorschläge zu seiner Verbesserung beigetragen. Herr Dr. A. Voigt hat fast alle Bilder mit sicherem Blick für das Wesentliche gezeichnet; das Programmieren des Tuschezeichners besorgte Herr cand. inf. B. Stauß. Die schwierige Aufgabe, aus einer vielfach schwer entzifferbaren Vorlage ein sauberes Manuskript herzustellen, besorgte Frau I. Jendrasik mit großer Sachkenntnis und Zuverlässigkeit. Die Herren Dr. R. Redlinger und Dr. A. Voigt haben Korrekturen gelesen und dabei manche wertvolle Anregung gegeben. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt. Nicht zuletzt gilt mein Dank dem Springer-Verlag. Er hat dem Autor alle Unterstützung gewährt und ist auf seine Wünsche zuvorkommend eingegangen.

Für Anregungen aus dem Leserkreis werde ich immer dankbar sein.

Karlsruhe, im Juli 1985

Wolfgang Walter

Inhaltsverzeichnis

A. Grundlagen

§ 1. Reelle Zahlen	1
1.1 Mengen	4
1.2 Funktionen	5
1.3 Körperaxiome	6
1.4 Anordnungsaxiome	7
1.5 Obere und untere Schranken, größtes und kleinstes Element, Supremum und Infimum	9
1.6 Das Vollständigkeitsaxiom	10
1.7 Vorzeichen und Absolutbetrag	10
1.8 Die Menge $\overline{\mathbb{R}}$	11
1.9 Intervalle und Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen ..	12
1.10 Bemerkungen zur Axiomatik	13
1.11 Bemerkungen zur Logik und Beweistechnik	14
Aufgaben	15
§ 2. Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	17
2.1 Definition der natürlichen Zahlen	18
2.2 Beweis durch vollständige Induktion	18
2.3 Einige Eigenschaften von \mathbb{N}	19
2.4 Die archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen	20
2.5 Ganze und rationale Zahlen	21
2.6 Endliche Mengen	21
2.7 Folge, Kartesisches Produkt und n -Tupel	22
2.8 Rekursive Definition	22
2.9 Abzählbare Mengen	23
2.10 Nichtabzählbare Mengen	24
2.11 Definition des Summen- und des Produktzeichens	25
2.12 Einige einfache Tatsachen	27
2.13 Bernoullische Ungleichung	28
2.14 Die Binomialformel	28
2.15 Zahlendarstellung in Positionssystemen	31
2.16 Kombinatorische Aufgaben	32
2.17 Die Fibonacci-Zahlen	33
Aufgaben	34

§ 3. Polynome und Wurzeln	37
3.1 Das Rechnen mit Funktionen. Funktionenraum und Funktionen- algebra	39
3.2 Polynome	39
3.3 Das Interpolationspolynom	42
3.4 Monotone Funktionen	43
3.5 Die Lipschitz-Bedingung	44
3.6 Die n -te Wurzel. Definition und Satz	46
3.7 Arithmetisches und geometrisches Mittel	47
3.8 Potenzen mit rationalen Exponenten	48
Aufgaben	50

B. Grenzwert und Stetigkeit

§ 4. Zahlenfolgen	52
4.1 Reelle Zahlenfolgen	58
4.2 Nullfolgen	58
4.3 Konvergente Folgen	60
4.4 Rechenregeln	62
4.5 Teilfolge, Umordnung einer Folge	64
4.6 Divergente Folgen	64
4.7 Konvergenzkriterien für monotone Folgen	65
4.8 Die Exponentialfunktion. Definition und Satz	66
4.9 Der Logarithmus	67
4.10 Iterationsverfahren. Berechnung von Wurzeln	69
4.11 Das arithmetisch-geometrische Mittel von Gauß	70
4.12 Häufungswerte von Folgen	71
4.13 Satz von Bolzano-Weierstraß für Folgen	72
4.14 Konvergenzkriterium von Cauchy	72
4.15 Oberer und unterer Limes beschränkter Folgen	73
4.16 Folgen in \mathbb{R}	74
Aufgaben	76
§ 5. Unendliche Reihen	78
5.1 Definitionen und einfache Eigenschaften	86
5.2 Satz	88
5.3 Satz	89
5.4 Einige Reihensummen	89
5.5 Reihen mit positiven Gliedern	92
5.6 Alternierende Reihen	93
5.7 Das Konvergenzkriterium von Cauchy	94
5.8 Absolute Konvergenz	94
5.9 Kriterium für absolute Konvergenz	95
5.10 Verdichtungssatz von Cauchy	97
5.11 Umordnung von unendlichen Reihen	98
5.12 Reihen mit beliebigen Indexmengen	99

5.13	Großer Umordnungssatz	100
5.14	Doppelreihen	101
5.15	Multiplikation von Reihen	102
5.16	Bedingte und unbedingte Konvergenz	104
5.17	Riemannscher Umordnungssatz	105
5.18	Dezimalbrüche und g -adische Entwicklung	105
	Aufgaben	107
§ 6.	Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	109
6.1	Grenzwert und Stetigkeit	114
6.2	Einseitiger Limes, einseitige Stetigkeit	116
6.3	Folgenkriterium	117
6.4	Das Konvergenzkriterium von Cauchy	118
6.5	Rechenregeln	119
6.6	Satz	119
6.7	Zusammengesetzte Funktionen (Komposition)	120
6.8	Stetigkeit auf einem kompakten Intervall. Maximum und Minimum einer Funktion	120
6.9	Gleichmäßige Stetigkeit	121
6.10	Zwischenwertsatz	123
6.11	Satz über die Umkehrfunktion	124
6.12	Limes für $x \rightarrow \pm\infty$	125
6.13	Uneigentliche Grenzwerte	126
6.14	Konvergenzkriterium für monotone Funktionen	127
6.15	Sprungstelle und Schwankung	127
6.16	Stetigkeitsmodul	128
6.17	Stetige Fortsetzung	128
	Aufgaben	129
§ 7.	Potenzreihen. Elementar-transzendente Funktionen	131
7.1	Gleichmäßige Konvergenz	139
7.2	Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz	140
7.3	Satz	140
7.4	Gleichmäßige Konvergenz von Reihen	141
7.5	Das Weierstraßsche Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz	142
7.6	Potenzreihen	142
7.7	Satz	144
7.8	Multiplikation von Potenzreihen	144
7.9	Die Exponentialreihe	145
7.10	Identitätssatz für Potenzreihen	147
7.11	Die logarithmische Reihe	147
7.12	Der Grenzwertsatz von Abel	149
7.13	Einsetzen von Potenzreihen	150
7.14	Division von Potenzreihen	151
7.15	Berechnung von Potenzreihen, Koeffizientenvergleich	151

7.16	Sinus und Cosinus	152
7.17	Die Arcusfunktionen (zyklometrische Funktionen)	156
7.18	Die Hyperbelfunktionen	158
7.19	Die Areafunktionen	159
7.20	Potenzreihen für Tangens und Cotangens	160
7.21	Nochmals Potenzsummen	162
	Aufgaben	163
§ 8.	Komplexe Zahlen und Funktionen	166
8.1	Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen	166
8.2	Polarkoordinaten	168
8.3	Wurzeln und Einheitswurzeln	169
8.4	Polynome	170
8.5	Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen	171
	Komplexe Analysis	174
8.6	Umgebungen	174
8.7	Konvergenz von Folgen und Reihen	174
8.8	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen	176
8.9	Potenzreihen	176
8.10	Entwicklung um einen neuen Mittelpunkt	177
8.11	Die Exponentialfunktion im Komplexen	178
8.12	Die Partialbruchzerlegung des Cotangens	181
8.13	Die Riemannsche Zetafunktion	183
	Aufgaben	184
 C. Differential- und Integralrechnung		
§ 9.	Das Riemannsche Integral	187
9.1	Zerlegung, Ober- und Untersumme	197
9.2	Hilfssatz	198
9.3	Oberes und unteres Integral. Das Riemann-Integral	199
9.4	Satz	199
9.5	Integrabilitätskriterium von Riemann	201
9.6	Satz über Integrierbarkeit	201
9.7	Die Riemannsche Definition des Integrals	202
9.8	Komplexwertige Funktionen	205
9.9	Satz über die Linearität des Integrals	205
9.10	Einige Eigenschaften des Integrals	206
9.11	Satz	207
9.12	Dreiecksungleichung für Integrale	207
9.13	Mittelwertsatz der Integralrechnung	208
9.14	Satz über gliedweise Integration	209
9.15	Integrale über Teilintervalle	211
9.16	Das Integral als Funktion der oberen Grenze	212
9.17	Die Bestimmung von Summen durch Integrale	213
9.18	Die Berechnung von π	215
	Aufgaben	218

§ 10. Differentiation	221
10.1 Differenzenquotient und Ableitung	240
10.2 Einseitige Differenzierbarkeit	242
10.3 Einfache Tatsachen	243
10.4 Das Differential	245
10.5 Rechenregeln für die Ableitung	246
10.6 Die Kettenregel	247
10.7 Ableitung der Umkehrfunktion	248
10.8 Zusammenfassung	249
10.9 Höhere Ableitungen, die Klassen C^k	251
10.10 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	254
10.11 Regel von de l'Hospital	256
10.12 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	259
10.13 Satz über gliedweise Differentiation	261
10.14 Taylor-Reihe und Taylor-Polynom	262
10.15 Satz von Taylor	263
10.16 Die Taylorsche Entwicklung von Funktionen	265
10.17 Satz von S. Bernstein (1914)	267
10.18 Das Gegenbeispiel von Cauchy	267
Aufgaben	268
§ 11. Anwendungen	273
11.1 Die Stammfunktion oder das unbestimmte Integral	273
11.2 Die Technik des Integrierens	274
11.3 Partielle Integration	275
11.4 Die Substitutionsregel	277
11.5 Die Integration der rationalen Funktionen	278
11.6 Satz	280
11.7 Vorläufiges zum Inhaltsproblem	282
11.8 Die Fläche ebener Bereiche als Integral	283
11.9 Darstellung in Polarkoordinaten	284
11.10 Das Volumen von Rotationskörpern	286
11.11 Schwerpunkte	290
11.12 Trägheitsmomente	293
11.13 Mechanische Arbeit	295
11.14 Numerische Integration	296
11.15 Hinreichende Kriterien für Maxima und Minima	300
11.16 Kriterien für Wendepunkte	300
11.17 Konvexe und konkave Funktionen	301
11.18 Die Jensensche Ungleichung für konvexe Funktionen	301
11.19 Mehr über konvexe Funktionen	303
11.20 Kurvendiskussion	304
11.21 Mittelwerte mit einer beliebigen Funktion	307
11.22 Satz über die Mittel r -ter Ordnung	308
11.23 Höldersche Ungleichung	309
11.24 Minkowskische Ungleichung	310

11.25 Eine Ungleichung von Redheffer	311
11.26 Kontrahierende Abbildungen. Das Kontraktionsprinzip	312
11.27 Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung	317
Aufgaben	320
§ 12. Ergänzungen	323
Uneigentliche Integrale	323
12.1 Unbeschränkter Integrationsbereich	323
12.2 Rechenregeln	324
12.3 Das Konvergenzkriterium von Cauchy	325
12.4 Absolute Konvergenz, Majorantenkriterium	325
12.5 Unendliche Reihen und uneigentliche Integrale	326
12.6 Grenzübergang unter dem Integralzeichen	327
12.7 Unbeschränkter Integrand	328
12.8 Die Gammafunktion	330
Einfache Differentialgleichungen	333
12.9 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	334
12.10 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	336
12.11 Der harmonische Oszillator	339
12.12 Reibungskräfte	341
12.13 Gedämpfte Schwingung	342
12.14 Resonanz	344
Die Eulersche Summenformel	346
12.15 Bernoullische Polynome	346
12.16 Eulersche Summenformel	347
12.17 Die Eulersche Konstante	349
12.18 Produktdarstellung des Sinus	350
12.19 Wallissches Produkt	351
12.20 Die Stirlingsche Formel	351
Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Dini-Derivierte	353
12.21 Satz	355
12.22 Limes superior und Limes inferior	356
12.23 Die vier Dini-Derivierten	357
12.24 Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung	358
12.25 Satz	359
12.26 Eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion	359
12.27 Das Lemma von Gronwall	361
12.28 Ungleichungen vom Faltungstyp	364
12.29 Nichtlineare Integral-Gleichungen	366
Lösungen und Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben	374
Literatur	383
Bezeichnungen und Grundformeln	386
Namen- und Sachverzeichnis	387

Hinweise für den Leser

Das Buch ist unterteilt in 12 Paragraphen, und die Abschnitte in einem Paragraphen sind durchnummeriert. Ein Hinweis auf Satz 6.7 bezieht sich auf den Satz im Abschnitt 6.7, den man in §6 findet. Das Corollar 6.7 befindet sich im selben Abschnitt.

Jeder Paragraph wird mit einem Aufgabenteil abgeschlossen. Die Aufgabe Nr.7 im Aufgabenteil von §6 wird als Aufgabe 6.7, innerhalb von §6 einfach als Aufgabe 7 zitiert. Lösungen und auch Hinweise zur Lösung von Aufgaben sind in einem Kapitel am Ende des Buches ab S. 375 gesammelt.

Bei der Beschreibung der historischen Entwicklung wird häufig auf die Originalliteratur oder auf entsprechende historische Werke verwiesen. Man findet diese Literatur im Kapitel „Literatur“ am Ende des Buches. In eckigen Klammern gesetzte Angaben im Text wie [Cantor III, S. 75] oder Cauchy [1823] weisen auf diese Literatursammlung hin; dabei ist die Jahreszahl das Erscheinungsjahr.

Gelegentlich wird auf den zweiten Band verwiesen. Ein Hinweis auf den Abschnitt II.8.1 bezieht sich auf den Abschnitt 8.1 im zweiten Band.