Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Series: Scuola Normale Superiore, Pisa
Adviser: E. Vesentini

735

Bernard Aupetit

Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1979

Author

Prof. Dr. Bernard Aupetit
Département de Mathématiques
Université Laval
Québec G1K 7P4
Canada

AMS Subject Classifications (1970): Primary: 46Hxx, 46Jxx, 46Kxx
Secondary: 31Axx, 46Lxx, 43A20, 47-XX

ISBN 3-540-09531-4 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-09531-4 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Aupetit, Bernard:
Propriétés spectrales des algèbres de Banach /
Bernard Aupetit. – Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1979.
(Lecture notes in mathematics ; Vol. 735)
ISBN 3-540-09531-4 (Berlin, Heidelberg, New York)
ISBN 0-387-09531-4 (New York, Heidelberg, Berlin)

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

A la mémoire de mon père

Marcel AUPETIT (1903-1964),

humble travailleur. Avec toute

ma reconnaissance et toute mon

admiration.

TABLE DES MATIERES

Alors que ce livre était terminé, quelques remarques concernant les pages 2,15,20,21,35 ont été ajoutées. On les trouvera après la bibliographie.

INTRODUCTION

Cet ouvrage est une synthèse de tous les résultats obtenus jusqu'à maintenant sur les propriétés du spectre des éléments d'une algèbre de Banach. Bien qu'une grande partie de ce travail soit constituée par nos résultats personnels publiés dans diverses revues [12 à 27], nous avons voulu présenter au lecteur ayant une connaissance des textes classiques de la théorie des algèbres de Banach [45,85, 156,177,231], mais non au courant des développements récents de ce domaine, un tout qui se tienne et qui soit aisément lisible. Aussi nous n'avons pas hésité à introduire, malgré l'embonpoint qui en résulte, tous les anciens résultats et exemples nécessaires à la compréhension, ainsi que les nouvelles présentations de vieux théorèmes, qui se distinguent par leur simplicité (voir chapitre 4). Afin d'aider le lecteur, dans l'appendice I, nous avons rappelé les remarquables théorèmes de N. Jacobson, B.E. Johnson et I. Kaplansky, et, dans l'appendice II, les propriétés des fonctions sous-harmoniques et de la capacité qui sont souvent peu connues par les analystes modernes.

Historiquement les premières études des propriétés du spectre sont liées aux opérateurs intégraux - au début du siècle avec H. Weyl, R. Courant, F. Rellich. Dans la direction des opérateurs sur un espace de Hilbert ou des opérateurs différentiels, la théorie a été depuis très développée (voir par exemple [135] et l'article de T. Kato *Scattering theory and perturbation of continuous spectra* dans les Actes du Congrès international des mathématiciens de 1970, tome I, pp. 135-140). Mais dans la direction générale des opérateurs sur un espace de Banach quelconque, le problème des propriétés spectrales a été peu étudié. C'est J.D. Newburgh qui, en 1951, a obtenu les premiers résultats et depuis personne n'a semblé vouloir les améliorer.

A l'origine nos recherches sur ces questions avaient commencé sur deux sujets qui semblaient peu voisins: la généralisation des résultats de J.D.

Newburgh sur la continuité du spectre et la généralisation du théorème de R.A. Hirschfeld et W. Żelazko sur la caractérisation des algèbres commutatives. Les méthodes du premier, bien que calculatoires, étaient purement élémentaires, celles du second avaient nécessité l'introduction des fonctions sous-harmoniques. Cependant, par la suite, ces deux études se rejoignirent de façon surprenante, puis là-dessus vient se greffer notre travail sur la caractérisation des algèbres de dimension finie, où les résultats les plus profonds de la théorie du potentiel classique étaient utilisés. C'est tout cela qui nous donna l'idée d'écrire un texte où l'*utilisation des fonctions sous-harmoniques donnerait des résultats intéressants dans la théorie des opérateurs*, voie nouvelle qui jusqu'à présent n'avait été exploitée que de façon très rudimentaire par E. Vesentini. Nous sommes maintenant convaincus que la théorie du potentiel a un rôle important à jouer dans l'analyse fonctionnelle et nous pensons que les résultats qui suivent n'en sont que les prémices. Pour persuader ceux qui en doutent il suffit de savoir que la méthode développée dans le chapitre 3 a permis, selon une remarque de J. Wermer, de fortement améliorer le théorème d'E. Bishop sur la structure analytique du spectre des algèbres de fonctions donc, en particulier, de simplifier les démonstrations de G. Stolzenberg, H. Alexander et J.-E. Björk sur l'approximation polynomiale dans $\mathbb{C}^n$.

Même si les contenus des chapitres sont commentés au début de chacun d'eux, peut-être est-il bon d'expliquer ici rapidement ce qu'ils englobent.

Le chapitre 1 contient toutes les nouvelles propriétés de sous-harmonicité du spectre, en particulier le théorème de variation holomorphe des points isolés du spectre et le théorème de pseudo-continuité qui permet d'avoir des renseignements sur le spectre d'un élément limite d'éléments de spectre connu, même si la fonction spectre est discontinue. Nous y incorporons également de très nombreuses applications et de récents exemples de discontinuité spectrale.

Le chapitre 2 améliore de façon définitive toutes les caractérisations des algèbres de Banach commutatives en en donnant une purement spectrale (à savoir l'uniforme continuité de la fonction spectre), de cette propriété algébrique. Il contient un contre-exemple à une conjecture de R.A. Hirschfeld et W. Żelazko et quelques généralisations du théorème de H. Behncke et A.S. Nemirovskiǐ sur la commutativité des algèbres de groupes.

Dans le chapitre 3 le résultat fondamental est celui sur la *rareté* des opérateurs de spectre fini sur un arc analytique. Comme corollaires on obtient des caractérisations purement spectrales et locales des algèbres réelles et des algèbres involutives de dimension finie. Les importants travaux de B.A. Barnes sur les algèbres modulaires annihilatrices y sont fortement améliorés. On y trouve également des applications de diverses sortes pour les algèbres de Banach (en particulier la résolution d'un cas particulier de la conjecture de Pełczyński) et les algèbres de fonctions, notamment les généralisations des théorèmes de structure analytique de E. Bishop et R. Basener.

Le chapitre 4 ne sert surtout que pour rappeler les propriétés nouvelles, dues à J.W.M. Ford, S. Shirali et V. Pták, des algèbres symétriques, les très belles caractérisations données récemment des algèbres stellaires et les résultats les plus nouveaux sur la symétrie de $L^1(G)$. En particulier on y développe la remarquable méthode analytique de L.A. Harris qui permet de démontrer non spatialement le théorème de Russo-Dye et de prouver, sans utiliser l'image numérique, le théorème de Vidav-Palmer. Notre contribution personnelle s'y réduit à la généralisation du théorème de Russo-Dye dans certains cas où l'involution n'est pas continue.

Le chapitre 5 utilise ce qui précède pour prouver l'uniforme continuité de la fonction spectre sur l'ensemble des éléments normaux des algèbres stellaires, des algèbres symétriques (donc de certaines algèbres de groupes), des algèbres involutives à rayon spectral sous-multiplicatif sur l'ensemble des éléments normaux. Les techniques utilisées sont très simples, mais les résultats obtenus sont entièrement nouveaux.

Dans tout ce travail nous ne nous sommes pas intéressés à l'extension de ces résultats à des catégories d'algèbres plus générales, par exemple à certaines algèbres topologiques ou bornologiques, ou bien aux algèbres de Banach-Jordan, où subsiste cependant une grosse difficulté liée au radical qui n'est pas l'intersection des noyaux des représentations irréductibles (voir [152,163]). Cependant nous sommes certains qu'un bon nombre d'entre eux s'y généralisent sans difficulté, par exemple dans le cas des algèbres de Banach alternatives.

Pour conclure, disons que plusieurs des conséquences obtenues dans cet ouvrage paraîtront peut-être quelque peu artificielles au lecteur peu familier avec le domaine, mais, à notre avis, ce qui les sauve c'est, d'une part l'étonnante harmonie qui se dégage de leurs énoncés, d'autre part l'utilisation assez surprenante de méthodes aussi belles que celles de la théorie des fonctions analytiques et de la théorie du potentiel dans leurs démonstrations.

Aussi nous souhaitons que cette contribution à la toujours aussi vivante théorie inventée par I.M. Gelfand en 1939 n'aura pas été vaine.

****

Bien sûr de nombreuses personnes contribuèrent directement ou indirectement à ce texte, par leurs lettres, leurs conversations, leurs travaux non publiés qu'ils nous envoyèrent, les remarques qu'ils firent sur le brouillon de ce livre. La liste de ces collègues est longue aussi il nous est impossible de la donner *in extenso*, mais que ceux-ci sachent que nous les remercions très sincèrement de leur aide précieuse.

Tout spécialement nous exprimons notre reconnaissance à John Wermer et Jean-Pierre Kahane pour leurs encouragements, à Vlastimil Pták pour son invitation dans la merveilleuse ville de Prague et à Wiesław Żelazko pour son hospitalité généreuse lors du semestre de théorie spectrale organisé au Centre international de mathématiques Stefan Banach de Varsovie, de septembre à décembre 1977. Nous remercions aussi Edoardo Vesentini de nous avoir invité pendant ce mois de mai à la Scuola Normale Superiore de Pise et de nous avoir encouragé à publier ce travail dans les Lectures Notes in Mathematics de Springer-Verlag. Enfin nous rendons grâce au Conseil National de Recherches du Canada, au Ministère de l'Education de la Province de Québec et à l'Université Laval de Québec pour leurs multiples aides pécuniaires qui nous ont permis un grand nombre de rencontres et de voyages sans lesquels cet ouvrage n'aurait jamais vu le jour.

Québec, fin mai 1978.

NOTATIONS ET MODE D'EMPLOI

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers positifs ou nuls
$\mathbb{Z}$	anneau des entiers positifs, négatifs, ou nuls
$\mathbb{R}$	corps des nombres réels
$\mathbb{C}$	corps des nombres complexes
$\mathbb{K}$	corps des quaternions
A	à moins de précision contraire, c'est une algèbre de Banach complexe
$\tilde{A}$	c'est A si elle a une unité, sinon c'est l'algèbre avec unité construite à partir de A
$\Vert\ \Vert$	norme complète de l'algèbre
Rad A	radical de Jacobson de A
$S(A)$	ensemble des éléments non inversibles de A
$X(A)$	ensemble des caractères de A si A est commutative
Sp x	spectre de x , quand il sera nécessaire de préciser par rapport à la sous-algèbre B on écrira $\mathrm{Sp}_B\ x$
$\sigma(x)$	spectre plein de x (voir chapitre 1, § 2)
$\rho(x)$	rayon spectral, quand il sera nécessaire de préciser par rapport à la sous-algèbre B on écrira $\rho_B(x)$
$\delta(x)$	diamètre spectral de x , quand il sera nécessaire de préciser par rapport à la sous-algèbre B on écrira $\delta_B(x)$
$\delta_n(x)$	n-ième diamètre spectral de x (voir chapitre 1, § 2)
$c(x)$	capacité spectrale de x
c^+, c^-	capacité extérieure, capacité intérieure

$d(z,K)$	distance de z à un compact K de $\mathbb{C}$
$\# E$	cardinal de E
∂E	frontière de E
$B(z,r)$	boule ouverte de centre z et de rayon r
$\overline{B}(z,r)$	boule fermée de centre z et de rayon r
Δ	distance de Hausdorff pour les compacts de $\mathbb{C}$, sauf dans l'appendice II où cela signifie le laplacien
$[x,y]$	commutateur de x et y, c'est-à-dire $xy - yx$
$A_{\mathbb{C}}$	complexifiée d'une algèbre réelle (voir chapitre 3)
$M_n(A)$	algèbre de Banach complexe des matrices $n \times n$ sur A
$\mathcal{C}(K)$	algèbre de Banach complexe des fonctions continues qui s'annulent à l'infini sur l'espace localement compact K
$\mathcal{L}(X)$	algèbre de Banach complexe des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Banach complexe X
$\mathcal{LC}(X)$	algèbre de Banach complexe des opérateurs compacts sur l'espace de Banach complexe X
$L^1(G)$	algèbre de Banach complexe, pour la convolution, des fonctions intégrables pour la mesure de Haar à gauche du groupe localement compact G
$\ell^1(S)$	algèbre du semi-groupe discret S
$\ell^2(\mathbb{N})$	espace de Hilbert des suites de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$
$\ell^2(\mathbb{Z})$	espace de Hilbert des suites de carré sommable indéxées par $\mathbb{Z}$
$\ell^p(\mathbb{N})$	espace de Banach des suites de puissance p-ième sommable
c_0	espace de Banach des suites tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$
$co(K)$	enveloppe convexe de K
$h(I)$	ensemble des idéaux primitifs contenant I
$kh(I)$	intersection des idéaux primitifs contenant I
$soc(A)$	socle de l'algèbre de Banach A (voir chapite 3)
$A \hat{\otimes} B$	produit tensoriel projectif des algèbres de Banach A et B

Le chapitre 1 est fondamental pour toute la suite. Les autres chapitres sont relativement indépendants, sauf le cinquième qui dépend en grande partie du 4^e. [ ] renvoie à la bibliographie. MR 44 # 5779 indique le résumé 5779 du tome 44 des Mathematical Reviews. Théorème 1.2.3 signifie le 3^e théorème du § 2 du chapitre 1. Théorème I.5 signifie le 5^e théorème de l'appendice I.