

Alt
Lineare Funktionalanalysis

Hans Wilhelm Alt

Lineare Funktionalanalysis

Eine anwendungsorientierte Einführung

Fünfte, überarbeitete Auflage
Mit 19 Abbildungen

 Springer

Prof. Dr. Hans Wilhelm Alt
Institut für Angewandte Mathematik
Abteilung für Funktionalanalysis
und Numerische Mathematik
Universität Bonn
Wegelerstraße 6
53115 Bonn, Deutschland
E-mail: alt@iam.uni-bonn.de

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 46-01, 35-01, 28-01

ISBN-10 3-540-34186-2 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-34186-4 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN 3-540-43947-1 4. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funktionalisierung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media

springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1985, 1992, 1999, 2002, 2006

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Text und Abbildungen wurden mit größter Sorgfalt erarbeitet. Verlag und Autor können jedoch für eventuell verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen.

Umschlaggestaltung: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Herstellung: LE-TeX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig

Satz: Datenerstellung durch den Autor unter Verwendung eines Springer TeX-Makropaketes

Gedruckt auf säurefreiem Papier

175/3100YL - 5 4 3 2 1 0

Vorwort zur fünften Auflage

Diese Ausgabe ist eine vollständig überarbeitete Version der vierten Auflage. Die wesentlichen Inhalte des Buches sind hierbei unverändert geblieben und auch die Reihenfolge der Darstellung bleibt dieselbe. Im Einzelnen wurden jedoch unzählige Änderungen vorgenommen mit dem Ziel, den Stoff des Buches dem Leser besser zugänglich zu machen.

Inbesondere wurden Beweise zum Teil umformuliert und durch zusätzliche Erläuterungen ergänzt. Aussagen über Distributionen wurden ausführlicher ausgearbeitet. Weiter wurden zusätzliche Querverweise innerhalb des Buches eingefügt. Durch eine bessere inhaltliche Strukturierung hat sich dabei die Nummerierung in einigen Abschnitten verändert.

Die Quelldateien, die von der ersten Auflage an vollständig auf $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ basierten, wurden in $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ umgeschrieben. Durch die sich dadurch ergebenden Gestaltungsmöglichkeiten erscheint das Buch in einem neuen einheitlichen Layout. Die jetzt vorhandene Durchnummerierung von Gleichungen hat sich auf die Darstellung von Beweisen positiv ausgewirkt. Auch wurden bei den Bezeichnungen einige systematische Veränderungen vorgenommen. So werden die Räume linearer Operatoren mit \mathcal{L} bezeichnet, um sie von den L^p -Räumen zu unterscheiden, und die zu einer Funktion f gehörende Distribution wird mehr suggestiv mit $[f]$ bezeichnet.

Was die Abbildungen betrifft, wurden die Originalgraphiken eingescannt und zur besseren Lesbarkeit mit $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Zeichen beschriftet.

Bedanken möchte ich mich bei Herbert Arndt, Uwe Fermum, Dag Lukassen, Peter Philip und vielen anderen, die mich auf Fehler in der vierten Auflage hingewiesen haben.

Meckenheim, Juni 2006

H. W. Alt

Vorwort zur vierten Auflage

Diese Ausgabe ist eine teilweise überarbeitete Version der dritten Auflage, wobei im Detail sehr viele Korrekturen und Erläuterungen vorgenommen wurden. Weiter wurden einige neue Beweise eingefügt, unter anderem beim allgemeinen Lebesgue'schen Konvergenzatz, der Maßerweiterung und der Partition der Eins, sowie die letzte Übungsaufgabe im zweiten Abschnitt.

Auch schien es sinnvoll, die Verzeichnisse zu überarbeiten. Darüberhinaus mussten Sprachanpassungen vorgenommen werden und die $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Files für ein einheitliches Layout vollständig editiert werden. Da ich inzwischen über gute $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Kenntnisse verfüge, habe ich alle Änderungen selbst vorgenommen, was den Vorteil einer unmittelbaren Kontrolle hatte.

Die Abbildungen sind unverändert. Sie waren von mir für die erste Auflage mit mathematischen Formeln auf einem Z80-Computer produziert und dann vom Springer Verlag graphisch aufbereitet worden. Sie hätten daher komplett neu erstellt werden müssen, was einer weiteren Auflage vorbehalten sein möge. Ich bitte daher einige inzwischen entstandene Inkonsistenzen in den Notationen zwischen Text und Abbildungen zu entschuldigen.

Bedanken möchte ich mich bei Etienne Emmrich und Ansgar Grüne, die mir Fehler in der dritten Auflage mitgeteilt haben. Besonders wertvoll waren die vielen Hinweise von Herrn Dr. Herbert Arndt, die auf seiner Lehrerfahrung mit diesem Buch beruhten und zum Teil die Meinung von Studenten ausdrückten.

Ich hoffe, all dies kommt dem Leser zugute. Dankbar bin ich weiterhin jedem, der Fehler aufspürt, auch einfache Tippfehler, oder mir Verbesserungsvorschläge, seien es auch nicht detaillierte, zukommen lässt (e-mail: willi@iam.uni-bonn.de).

Meckenheim, Mai 2002

H. W. Alt

Vorwort zur dritten Auflage

Dieses Buch ist eine völlig überarbeitete Version der 2. Auflage, wobei der Stoffumfang und das Ziel des Buches unverändert geblieben sind: Sowohl der abstrakten algebraischen Seite der Funktionalanalysis als auch den Eigenschaften von Funktionenräumen und deren Anwendungen wird gebührend Raum gegeben, wobei die Leser in den einzelnen Abschnitten möglichst effektiv zu den zentralen Sätzen und Beweisen geführt werden sollen. Darüber hinaus sollen die erlernten abstrakten Begriffe möglichst schnell auf konkrete Situationen angewendet werden.

Um die Benutzung als Lehrbuch zu verbessern, sind einige Abschnitte in der Darstellung umgestellt oder neu gestaltet sowie einige Themen etwas ausführlicher dargestellt worden. Außerdem ist mehr Wert auf motivierende und erläuternde Zwischentexte gelegt worden.

Besonders danken möchte ich Herrn Thomas Canarius und Frau Sandra Wieland für ihre Verbesserungs- und Ergänzungsvorschläge, die aus Platzgründen jedoch nur zum Teil berücksichtigt werden konnten. Trotz der vielen Zeit und Bemühungen, die in diese Neuauflage eingeflossen sind, kann ich nicht ausschließen, daß dennoch Fehler übersehen wurden. Ich bin daher jedem dankbar, der mich auf Fehler aufmerksam macht oder Verbesserungsvorschläge mitteilt (e-mail: willi@iam.uni-bonn.de), so wie ich Herrn Krzysztof Chelminski für den Hinweis auf einen Fehler bzgl. der L^1 -Folgenkompaktheit danke.

Diese Auflage wäre nicht zustande gekommen ohne tatkräftige Mithilfe. Ich bedanke mich bei Herrn Michael Luckey, der die $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Makros an die Vorgaben des Verlages angeglichen hat und sämtliche Probleme bzgl. der $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Sprache und des $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Systems gelöst hat. Frau Sandra Wieland danke ich für das Durcharbeiten des Buches und das geduldige Korrekturlesen. Ganz herzlicher Dank gilt Frau Doris Theisen, die äußerst zuverlässig und mit großem Engagement die $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Files überarbeitet hat, wobei insgesamt fast die Hälfte der Texte neu geschrieben werden mußte.

Dem Springer Verlag danke ich für die jahrelange kooperative Zusammenarbeit.

Bonn, Januar 1999

H. W. Alt

Vorwort zur zweiten Auflage

Ich möchte mich bei all denen bedanken, die mich auf Fehler in der ersten Auflage aufmerksam gemacht haben. Neben derartigen Korrekturen ist der Anfang des Buches neu geschrieben worden. Besonderen Dank möchte ich Herrn Thomas Widmer aussprechen, der die $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Files überarbeitet und die automatischen Verzeichnisse erstellt hat.

Bonn, September 1991

H. W. Alt

Vorwort zur ersten Auflage

Oft besucht der Algebrix
im sechsten Stock den Analyx,
und staunend über dessen Tricks
verbringt er Stunden höchsten Glücks.

Ulrich Warnecke

Das Buch ist entstanden aus einer einsemestrigen Kursusvorlesung, die ich im WS 80/81 an der Universität Bochum und im WS 83/84 an der Universität Bonn für Studenten ab 5. Semester gehalten habe. Das Ziel war, einen Grundkanon zu vermitteln und dabei in den einzelnen Abschnitten möglichst schnell auf die zentralen Aussagen zuzusteuern. Dabei habe ich versucht, sowohl die algebraische als auch die analytische Seite der Funktionalanalysis mit gleichem Gewicht zu behandeln.

Bis auf einige Umstellungen und hinzugefügte Aussagen stimmt der Inhalt dieses Buches mit dem in der Vorlesung dargestellten Stoff überein.

Voraussetzung für die Lektüre des Buches ist eine Anfängerausbildung in Linearer Algebra und Analysis. Wegen der unterschiedlichen Vorkenntnisse der Studenten ist ein Anhang über das Lebesgue-Integral eingefügt. Die Anhänge 4 und 8 beweisen Aussagen, die in der Vorlesung nur formuliert worden waren. Der Anhang A6 dient zur Vertiefung des Studiums der Sobolev-Räume. Viele der während der Vorlesung gestellten Übungen sind mit Lösungen in das Buch aufgenommen worden, andere als Übungen hinzugenommene Aussagen sind als Ergänzung zum Grundstoff gedacht. Ich glaube daher, daß sich dieses Buch als Grundlage und ebenso als Begleit-
lektüre zu Vorlesungen über lineare Funktionalanalysis eignet, aber auch als Ergänzungsliteratur zu anderen Vorlesungen.

Besonders zu danken habe ich Eberhard Bänsch und Jürgen Dennert, die durch unzählige Hinweise und Verbesserungsvorschläge zur endgültigen Version des Buches beigetragen haben.

Schließlich wäre das Buch nicht entstanden ohne die Arbeit von Angelika Schofer, die das Manuskript mit dem \TeX -System gesetzt hat und der das Buch seine äußere Gestaltung verdankt.

Bonn, Juli 1985

H. W. Alt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
0 Strukturen	9
0.1 Skalarprodukt	9
0.3 Orthogonalität	11
0.4 Norm	12
0.6 Metrik	15
0.8 Beispiele von Metriken	15
0.9 Kugeln und Abstand von Mengen	17
0.10 Offene und abgeschlossene Mengen	18
0.11 Topologie	19
0.12 Vergleich von Topologien	20
0.13 Vergleich von Normen	20
0.15 Konvergenz und Stetigkeit	21
0.16 Konvergenz in metrischen Räumen	23
0.18 Vollständigkeit	25
0.19 Banachräume und Hilberträume	26
0.20 Folgenräume	26
0.21 Vervollständigung	28
U0 Übungen	30
U0.6 Vollständigkeit des Euklidischen Raumes	33
U0.7 Nichtvollständiger Funktionenraum	33
U0.9 Hausdorff-Abstand von Mengen	34
1 Funktionenräume	37
1.1 Beschränkte Funktionen	37
1.2 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen	38
1.3 Stetige Funktionen	39
1.4 Träger einer Funktion	41
1.5 Differenzierbare Funktionen	41
1.6 Hölderstetige Funktionen	43
1.8 Maße	45
1.10 Messbare Funktionen	47
1.13 Lebesgue-Räume	49

1.16	Hölder-Ungleichung	51
1.17	Majorantenkriterium in L^p	54
1.18	Minkowski-Ungleichung	54
1.19	Satz von Fischer-Riesz	55
1.21	Vitali-Konvergenzsatz	56
1.23	Allgemeiner Lebesgue-Konvergenzsatz	59
1.25	Sobolev-Räume	62
U1	Übungen	66
U1.3	Standard Testfunktion	66
U1.4	L^p -Norm für $p \rightarrow \infty$	66
U1.6	Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	67
A1	Lebesgue-Integral	71
A1.3	Elementares Lebesgue-Maß	72
A1.4	Äußeres Maß	73
A1.5	Treppenfunktionen	74
A1.6	Elementares Integral	74
A1.8	Lebesgue-integrierbare Funktionen	78
A1.10	Axiome des Lebesgue-Integrals	79
A1.14	Integrierbare Mengen	84
A1.15	Maßerweiterung	86
A1.18	Satz von Egorov	90
A1.19	Majorantenkriterium	90
A1.20	Lemma von Fatou	92
A1.21	Konvergenzsatz von Lebesgue	93
2	Teilmengen von Funktionenräumen	95
2.1	Konvexe Mengen	95
2.2	Projektionssatz	96
2.4	Fast orthogonales Element	99
2.5	Kompaktheit	100
2.11	Satz von Arzelà-Ascoli (Kompaktheit in C^0)	105
2.12	Faltung	107
2.13	Dirac-Folge	109
2.15	Satz von Riesz (Kompaktheit in L^p)	112
2.17	Beispiele separabler Räume	115
2.18	Abschneidefunktion	117
2.19	Partition der Eins	117
2.21	Fundamentallema der Variationsrechnung	121
2.22	Lokale Approximation von Sobolev-Funktionen	121
2.24	Produktregel für Sobolev-Funktionen	123
2.25	Kettenregel für Sobolev-Funktionen	124
U2	Übungen	126
U2.4	Strikt konvexe Räume	127
U2.5	Trennungssatz im \mathbb{R}^n	128
U2.6	Konvexe Funktionen	129

U2.7	Charakterisierung konvexer Funktionen	130
U2.8	Stützebenen	131
U2.9	Jensen'sche Ungleichung	132
U2.11	Raum L^p für $p < 1$	133
U2.13	Kompakte Mengen in ℓ^2	134
U2.15	Vergleich der Hölderräume	136
U2.16	Kompaktheit bzgl. Hausdorff-Metrik	136
U2.18	Stetige Fortsetzung	137
U2.19	Satz von Dini	138
U2.20	Nichtapproximierbarkeit in $C^{0,\alpha}$	138
U2.21	Kompakte Mengen in L^p	139
3	Lineare Operatoren	141
3.2	Lineare Operatoren	141
3.7	Neumann-Reihe	146
3.8	Satz über invertierbare Operatoren	147
3.9	Analytische Funktionen von Operatoren	147
3.10	Beispiele (Exponentialfunktion)	147
3.12	Lineare Differentialoperatoren	149
3.13	Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren	149
3.15	Distributionen (Der Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$)	151
3.18	Topologie auf $C_0^\infty(\Omega)$	155
3.19	Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$	156
U3	Übungen	159
U3.3	Eindeutige Fortsetzung linearer Abbildungen	159
U3.4	Limes linearer Abbildungen	160
4	Lineare Funktionale	163
4.1	Riesz'scher Darstellungssatz	163
4.2	Satz von Lax-Milgram	164
4.4	Elliptische Randwertprobleme	167
4.5	Schwache Randwertprobleme	169
4.6	Existenzsatz für Neumann-Problem	170
4.7	Poincaré-Ungleichung	171
4.8	Existenzsatz für Dirichlet-Problem	171
4.10	Variationsmaß	172
4.11	Satz von Radon-Nikodym	173
4.12	Dualraum von L^p für $p < \infty$	175
4.14	Satz von Hahn-Banach	179
4.15	Satz von Hahn-Banach für lineare Funktionale	181
4.19	Räume additiver Maße	184
4.20	Räume regulärer Maße	185
4.22	Satz von Riesz-Radon	186
4.24	Funktionen beschränkter Variation	190
U4	Übungen	193

U4.1	Duale Norm auf \mathbb{R}^n	193
U4.2	Dualraum des Kreuzprodukts	193
U4.3	Integralgleichung	193
U4.5	Dualraum von $C^m(I)$	195
U4.6	Dualraum von c_0 und c	197
U4.8	Positive Funktionale auf C_0^0	199
U4.9	Funktionen mit beschränkter Variation	200
U4.10	Darstellung von $C^0([a, b])'$	202
A4	Aussagen aus der Maßtheorie	204
A4.1	Jordan-Zerlegung	204
A4.2	Hahn-Zerlegung	205
A4.5	Lemma von Alexandrov	209
A4.7	Satz von Lusin	210
A4.8	Produktmaß	211
A4.10	Satz von Fubini	214
5	Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	217
5.1	Baire'scher Kategoriensatz	217
5.2	Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	217
5.3	Satz von Banach-Steinhaus	218
5.7	Satz von der offenen Abbildung	220
5.8	Satz von der inversen Abbildung	221
5.9	Satz vom abgeschlossenen Graphen	221
U5	Übungen	222
U5.2	Punktweise Konvergenz in $\mathcal{L}(X; Y)$	222
U5.4	Sesquilinearformen	223
6	Schwache Konvergenz	225
6.1	Schwache Konvergenz	225
6.2	Einbettung in den Bidualraum	226
6.7	Schwache Topologie	231
6.8	Reflexivität	232
6.12	Trennungssatz	237
6.14	Lemma von Mazur	239
6.16	Allgemeine Poincaré-Ungleichung	240
6.17	Elliptisches Minimumproblem	241
U6	Übungen	248
U6.4	Schwache Konvergenz in C^0	249
U6.7	Schwache Konvergenz oszillierender Funktionen	252
U6.8	Variationsungleichung	253
A6	Eigenschaften von Sobolev-Funktionen	256
A6.1	Rellich'scher Einbettungssatz in $H_0^{m,p}(\Omega)$	256
A6.2	Lipschitz-Rand	257
A6.3	Lokalisierung	259
A6.4	Rellich'scher Einbettungssatz in $H^{m,p}(\Omega)$	259

A6.5	Randintegral	261
A6.6	Spursatz	265
A6.8	Schwacher Gauß'scher Satz	267
A6.12	Fortsetzungssatz für Sobolev-Funktionen	272
A6.13	Einbettungssatz auf den Rand	272
A6.14	Schwache Folgenkompaktheit in $L^1(\mu)$	273
A6.15	Satz von Vitali-Hahn-Saks	279
7	Endlich-dimensionale Approximation	281
7.3	Schauder-Basis	284
7.4	Duale Basis	285
7.6	Bessel'sche Ungleichung	288
7.7	Orthonormalbasis	288
7.10	Weierstraß'scher Approximationssatz	292
7.13	Lineare Projektionen	295
7.14	Stetige Projektionen	296
7.15	Satz vom abgeschlossenen Komplement	297
7.21	Stückweise konstante Approximation	301
7.22	Stetige stückweise lineare Approximation	305
7.23	Ritz-Galerkin-Approximation	307
7.25	Céa-Lemma	308
U7	Übungen	310
U7.1	Hamelbasis	310
U7.2	Unstetige lineare Abbildungen	310
U7.8	Projektoren in $L^2(\cdot - \pi, \pi[\cdot)$	312
8	Kompakte Operatoren	315
8.1	Kompakte Operatoren	315
8.6	Einbettungssatz in Hölder-Räumen	321
8.7	Sobolev-Zahl	323
8.8	Satz von Sobolev	325
8.9	Einbettungssatz in Sobolev-Räumen	328
8.11	Satz von Morrey	331
8.13	Einbettungssatz von Sobolev-Räumen in Hölder-Räume	333
8.14	Inverser Laplace-Operator	335
8.15	Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren	336
8.16	Schur-Integraloperatoren	338
8.17	Fundamentallösung des Laplace-Operators	342
8.18	Singuläre Integraloperatoren	343
8.19	Hölder-Korn-Lichtenstein-Ungleichung	344
8.20	Calderon-Zygmund-Ungleichung	346
U8	Übungen	348
U8.2	Ehring-Lemma	348
U8.8	Sobolev-Räume auf \mathbb{R}^n	351
U8.9	Einbettungssatz im \mathbb{R}^n	352

U8.10	Poincaré-Ungleichungen	353
U8.13	Nukleare Operatoren	354
U8.15	Dimensionsabschätzung für Eigenräume	354
A8	Calderon-Zygmund-Ungleichung	357
9	Spektrum kompakter Operatoren	369
9.6	Fredholm-Operatoren	372
9.9	Spektralsatz für kompakte Operatoren	377
9.11	Fredholm-Alternative	381
9.12	Endlich-dimensionaler Fall	381
9.13	Jordan-Normalform	381
9.14	Reeller Fall	382
10	Selbstadjungierte Operatoren	385
10.1	Adjungierter Operator	385
10.2	Hilbertraum-Adjungierte	385
10.4	Annihilator	386
10.6	Satz von Schauder	387
10.8	Satz von Fredholm	389
10.9	Normale Operatoren	389
10.12	Spektralsatz für kompakte normale Operatoren	391
10.14	Eigenwertproblem als Variationsproblem	393
10.15	Selbstadjungierter Integraloperator	395
10.16	Eigenwertproblem für den Laplace-Operator	396
U10	Übungen	403
U10.1	Adjungierte Abbildung auf C^0	403
A10	L^2 -Regularitätstheorie	408
A10.2	Satz von Friedrichs	409
	Literaturverzeichnis	415
	Symbolverzeichnis	417
	Sachverzeichnis	421