

# Das Unendliche

Rudolf Taschner

# ■ **Das Unendliche**

Mathematiker ringen um einen Begriff

Zweite, verbesserte Auflage  
mit 53 Abbildungen

 Springer

Professor Rudolf Taschner  
Institut für Analysis  
und Scientific Computing  
Technische Universität Wien  
Wiedner Hauptstraße 8–10  
A 1040 Wien  
E-mail: [rudolf.taschner@tuwien.ac.at](mailto:rudolf.taschner@tuwien.ac.at)

math.space  
MuseumsQuartier  
Museumsplatz 1  
A 1070 Wien

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek  
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen  
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 3-540-25797-7 2. Auflage Springer Berlin Heidelberg New York  
ISBN 3-540-59093-5 1. Auflage Springer Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media  
[springer.de](http://springer.de)

© Springer Berlin Heidelberg 1995, 2006  
Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: design & production GmbH  
Herstellung: Helmut Petri  
Druck: Strauss Offsetdruck

SPIN 11423300 Gedruckt auf säurefreiem Papier – 42/3153 – 5 4 3 2 1 0

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Vorwort</b> .....	VII
<b>1 Pythagoras und das Unendliche im Pentagramm</b> .....	1
<b>2 Euklid und die Unendlichkeit der Primzahlen</b> .....	17
<b>3 Archimedes und die unendliche Erschöpfung</b> .....	33
<b>4 Newton und die Unendlichkeit in der Bewegung</b> .....	49
<b>5 Cantor und die unendlichen Dezimalzahlen</b> .....	67
<b>6 Hilbert und die unendliche Gewissheit</b> .....	75
<b>7 Brouwer und die unendliche Freiheit</b> .....	97
<b>Anhang</b> .....	111

# Vorwort

---

»Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.«

Kein Theologe, kein Philosoph, sondern ein Mathematiker, David Hilbert, hat dies geschrieben. Theologen predigen das Unendliche als Eigenschaft Gottes und der Ewigkeit, aber unseren Erkenntnisdrang vermögen sie damit nicht zu stillen. Philosophen ergehen sich in phantastischen Spekulationen über das Unendliche, aber Definitives ist von ihnen nicht zu erfahren. Die *Mathematik* hingegen beansprucht, die wahre *Wissenschaft vom Unendlichen* zu sein, und alles, was wir darüber wissen können, verdanken wir dem Gedankenreichtum der Mathematiker.

Dieses Buch will von ihrem Bemühen um das Unendliche berichten.

Es ist kein Buch über die Geschichte der Mathematik, obwohl aus dem Leben mancher Mathematiker erzählt wird, um den abstrakten Gegenstand in einen lebendigen Bezug zu stellen. Manche bedeutende Forscher wie Euler oder Gauß werden aber bloß erwähnt, viele wie Fermat oder Riemann nicht einmal zitiert. Das Buch erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit, es will allein Aspekte der Mathematik aufzeigen, die mir im Zusammenhang mit dem Unendlichen am wesentlichsten scheinen.

Es ist aber auch kein Mathematiklehrbuch, obwohl in jedem Kapitel zumindest von einem epochalen Resultat der Mathematik die Rede ist. Mathematiklehrbücher sind in ihrem Aufbau nüchterner, in

ihrem Stil straffer, Extempores in Philosophie, Psychologie, Musik, Literatur, wie sie hier anzutreffen sind, sind in strengen Lehrbüchern verpönt.

Dieses Buch ist für mathematische Laien geschrieben, welche die Faszination des Unendlichen berührt und die wissen möchten, was die Mathematiker darüber zu erzählen haben. Die Leser dürfen sich nicht vor einigen einfachen Rechnungen fürchten, die ihnen während der Lektüre begegnen. Mehr als die Kenntnis des Bruchrechnens wird nicht erwartet. Ich habe mich bemüht, alle mathematischen Sachverhalte so klar und einfach wie möglich zu präsentieren. Die beigelegten Skizzen bedeuten eine zusätzliche Verständnishilfe, denn bekanntlich sagt ein Bild mehr als tausend Worte. Nur das Lesen des Anhangs erfordert zuweilen ein etwas tieferes Wissen um den Umgang mit Formeln und Gleichungen, das jedoch nie über die übliche Schulmathematik hinausgeht. Der Anhang ist nämlich für jene besonders interessierten Leserinnen und Leser\* gedacht, die alles genauer wissen wollen; auf ihn wird mit hochgestellten Zahlen verwiesen. Für das Verständnis des Haupttextes ist das Lesen des Anhangs an keiner Stelle erforderlich.

Manchmal werden die kleinen griechischen Buchstaben  $\alpha$  für Alpha,  $\beta$  für Beta,  $\gamma$  für Gamma,  $\varphi$  für Phi,  $\pi$  für Pi und  $\psi$  für Psi verwendet. Einerseits bezeichnet man seit jeher so die Winkel im Dreieck und andererseits verwenden wir diese Zeichen für die *unendlichen Dezimalzahlen*, die sich nach und nach als die eigentlichen Helden unserer Geschichte über das Unendliche entpuppen.

Für ihre Unterstützung und ihren Zuspruch beim Abfassen des Textes bin ich meiner Frau Bianca von Herzen dankbar. Karl Riesenhuber danke ich für seine Korrekturen und Verbesserungsvorschläge. Der Springer-Verlag hat sich auch bei der Herausgabe dieses kleinen Werkes in Professionalität und Zuvorkommenheit ausgezeichnet.

Das Buch hat seinen Zweck mehr als erfüllt, wenn die Leser nach der Lektüre noch mehr über die angeschnittenen Themen erfahren möchten. Interessieren sie sich für die Mathematik in all ihren Facet-

\* Wenn im Folgenden von »Mathematikern«, »Denkern«, »Philosophen« u.ä. die Rede ist, soll stets das grammatikalische, nie das natürliche Geschlecht gelesen werden: so wie z.B. Hermann Weyl eine philosophische Kapazität (weiblich) und ein mathematisches Genie (sächlich) war.

ten, für das »Mathematisieren« und für die Verbindung der Mathematik zu anderen Wissenschaften, kann man ihnen nur das einzigartige Buch »Erfahrung Mathematik« von Philip Davis und Reuben Hersh ans Herz legen, das im Verlag Birkhäuser erschienen ist. Die philosophisch Interessierten finden in Hermann Weyls glänzend verfasster »Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft« aus dem Verlag Oldenbourg eine Fülle von Anregungen. Sind die Leser bestrebt, mehr über den Bezug der Zahlenwelt zur »Wirklichkeit« zu erfahren, verweise ich sie auf mein im Vieweg-Verlag erschienenenes Buch »Der Zahlen gigantische Schatten«.

Rudolf Taschner