Springer-Lehrbuch

Jürgen Kremer

Einführung in die Diskrete Finanzmathematik

Mit 37 Abbildungen

Springer

Prof. Dr. Jürgen Kremer
Fachhochschule Koblenz
RheinAhrCampus Remagen
Südallee 2
53424 Remagen, Deutschland
e-mail: kremer@rheinahrcampus.de

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 91B02, 91B24, 91B26, 91B28

ISBN-10 3-540-25394-7 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-25394-5 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media

springer.de

Satz: Datenerstellung durch den Autor unter Verwendung eines Springer TEX-Makropakets
Herstellung: LE-TEX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig
Umschlaggestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier 44/3142YL - 5 4 3 2 1 0

Für Silke, Alexander
und für meine Eltern

Vorwort

Das Buch bietet eine Einführung in verschiedene grundlegende Konzepte, Modelle und Methoden der diskreten Finanzmathematik.

Der Text wendet sich in erster Linie an finanz- und wirtschaftsmathematisch orientierte Studenten und Absolventen von Fachhochschulen und Universitäten. Der gewählte Zugang setzt zwar Kenntnisse einiger Grundlagen der linearen Algebra und der Analysis des Grundstudiums voraus, da der Text aber einem Selbststudium zugänglich sein soll, werden viele dieser Ergebnisse in einem eigenen Kapitel mit vollständigen Beweisen dargestellt.

Es gibt mittlerweile eine große Vielzahl hervorragender Darstellungen der Finanzmathematik. In aller Regel konzentrieren sich diese auf die Finanzmathematik in stetiger Zeit und setzen häufig gute Kenntnisse der stochastischen Analysis voraus, die selbst wiederum die Maß- und Martingaltheorie verwendet.

In diesem Buch beschränken wir uns dagegen auf endliche Wahrscheinlichkeitsräume und auf endlich viele Zeitpunkte. Dies bietet folgende Vorteile:

- Der gewählte Rahmen erlaubt es, das zur Behandlung notwendige Rüstzeug auf die Mathematik des Grundstudiums zu begrenzen. Die Inhalte des Buches können damit sowohl in Diplom- als auch in Bachelor-Studiengängen mit finanz- oder wirtschaftsmathematischen Schwerpunkten vermittelt werden.
- Die diskrete Finanzmathematik bietet ein reichhaltiges Repertoire an interessanten Anwendungsbeispielen für Sätze und Zusammenhänge aus der Linearen Algebra, der Analysis und der Wahrscheinlichkeitstheorie.
- Die Theorie der Ein- und Mehr-Perioden-Modelle läßt sich im vorgegebenen diskreten Rahmen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen entwickeln.
- Der gewählte diskrete Rahmen ist trotz seiner Beschränkung auf endliche Zustandsräume und auf endlich viele Zeitpunkte reichhaltig, und es lassen sich bereits die wichtigsten Eigenschaften auch der allgemeinen zeitstetigen Modelle klar erkennen.

- Die im Buch vorgestellten Ein- und Mehr-Perioden-Modelle führen unmittelbar auf die fundamentalen und allgegenwärtigen Baumverfahren zur numerischen Bewertung von Derivaten.
- Die Bewertung von Standard-Optionen, deren zugrunde liegende Aktien während der Laufzeit Dividenden auszahlen, läßt sich auf natürliche Weise in den gegebenen Kontext einbetten und wird ausführlich dargestellt.
- Die Black-Scholes-Formeln werden auf zwei unterschiedlichen Wegen hergleitet: einmal über einen Grenzprozeß aus den Mehr-Perioden-Modellen und zum anderen mit Methoden der diskreten stochastischen Analysis, die analog zur Vorgehensweise in der stetigen Finanzmathematik sind.
- Grundlegende Konzepte der Maß- und Martingaltheorie sowie der stochastischen Analysis lassen sich mit vergleichsweise geringem mathematischen Aufwand einführen. Die Relevanz der eingeführten Begriffsbildungen, wie Meßbarkeit, Filtrationen, Stopzeiten, bedingte Erwartung, Martingale und stochastische Integrale, kann damit im Rahmen der Behandlung der Ein- und Mehr-Perioden-Modelle sehr gut erläutert und veranschaulicht werden.
- Auf diese Weise läßt sich ein gutes intuitives Verständnis für diese fortgeschrittenen Begriffsbildungen vermitteln, was die Einarbeitung in die stetige stochastische Analysis vorbereiten und erheblich erleichtern mag.

Ein Schwerpunkt des Textes besteht in einer einheitlichen Darstellung der Bewertung zustandsabhängiger Auszahlungsprofile in allgemeinen Ein- und Mehr-Perioden-Modellen auf der Basis der Trennungssätze. Der Zugang ist zunächst strikt algebraisch und erfordert weder Wahrscheinlichkeitsmaße noch Martingale.

Motiviert durch das Diskontieren deterministischer Zahlungsströme wird die im Text entwickelte Preisfindung mit Hilfe von Zustandsprozessen als verallgemeinertes Diskontieren zukünftiger zustandsabhängiger Zahlungsströme interpretiert. Die Formulierung der Bewertung als Erwartungswert wird durch diese Interpretation motiviert, aber nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch gedeutet. So kann der Preis einer zustandsabhängigen Auszahlung $c \in \mathbb{R}^K$ in einem arbitragefreien Ein-Perioden-Modell durch $c_0 = \langle \psi, c \rangle$ oder durch $c_0 = d\mathbf{E}^Q\left[c\right]$ dargestellt werden, wobei ψ einen Zustandsvektor und d einen Diskontfaktor bezeichnet. Wir interpretieren c_0 jedoch nicht als abdiskontierten Erwartungswert von c in einer durch das Wahrscheinlichkeitsmaß Q definierten risikoneutralen Welt, sondern wir sagen, daß der zum Zeitpunkt 1 fließende zustandsabhängige Zahlungsstrom c durch $c_0 = \langle \psi, c \rangle = d\mathbf{E}^Q\left[c\right]$ auf den Zeitpunkt 0 transformiert oder abdiskontiert wird. Dabei hat die Darstellung $d\mathbf{E}^Q\left[c\right]$ die Eigenschaft, daß für deterministische Auszahlungen, also für $c = const$, gerade $c_0 = dc$, also die klassische Bewertungsformel, erhalten wird.

Ein weiterer Schwerpunkt ist die Untersuchung des Mean-Variance-Optimierungsproblems der Portfoliotheorie auf der Grundlage arbitragefreier Ein-

Perioden-Modelle. Insbesondere wird der enge Bezug dieses Problems zum Capital Asset Pricing Model (CAPM) hervorgehoben.

In einem eigenen Kapitel wird das Konzept des Value at Risk zur Bewertung von Marktrisiken dargestellt. Hier wird ein rekursives Verfahren zur Bestimmung der Sensitivitäten vorgestellt, das für eine objektorientierte Implementierung der Risikomessung verwendet werden kann.

Schließlich werden wichtige Begriffsbildungen und Zusammenhänge der stochastischen Analysis im vorliegenden diskreten Kontext eingeführt und auf die Bewertung von Derivaten in Binomialbaum-Modellen angewendet. Die Vorgehensweise ist analog zur Bewertung von Optionen innerhalb der stetigen Finanzmathematik, läßt sich in den diskreten Modellen aber mit erheblich geringerem technischen Aufwand erläutern.

Im Text werden Code-Fragmente für die Implementierung von Binomialbaum-Verfahren und Black-Scholes-Formeln auch unter Berücksichtigung von Dividendenzahlungen angegeben, die leicht implementiert werden können. Eine vollständige Anwendung mit graphischer Oberfläche, von der aus diese Bewertungsverfahren aufgerufen werden, können einschließlich aller Quelltexte von der Homepage des Autors heruntergeladen werden[1].

Ich möchte an dieser Stelle meinen wissenschaftlichen Lehrern danken, von denen ich sowohl persönlich als auch fachlich sehr viel gelernt habe und denen ich viel verdanke.

Insbesondere bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Dietmar Arlt, der während meines Studiums in Bonn sein umfassendes Wissen mit ansteckender Begeisterung und hohem persönlichen Einsatz vermittelte.

Weiter danke ich Herrn Prof. Dr. Alfred K. Louis, der sich stets mit großem Engagement für seine Mitarbeiter einsetzte, in dessen Arbeitsgruppe an der Technischen Universität Berlin eine Vielfalt interessanter Themen vertreten war und in der eine ausgezeichnete persönliche und fachliche Atmosphäre herrschte.

Schließlich danke ich Herrn Prof. Dr. Hans Föllmer, der mir als damaligem Mitarbeiter der Bankgesellschaft Berlin die Möglichkeit gab, seine Vorlesungen und Seminare an der Humboldt-Universität Berlin zu besuchen.

Ein Dank gilt meinen Studenten und unserem Assistenten Christian Kierdorf, deren Fragen, Korrekturen und Kommentare an vielen Stellen zu Verbesserungen des Manuskriptes führten. Meinem Kollegen, Herrn Prof. Dr. Claus Neidhardt, danke ich für seine Unterstützung und für manche fachliche Diskussion.

Meiner Frau Silke danke ich für das Korrekturlesen und meinem Sohn Alexander für die Erstellung der schönen Abbildungen.

Daun *Jürgen Kremer*
Juli 2005

[1] www.rheinahrcampus.de/~kremer

Inhaltsverzeichnis