



Jürgen Kremer

---

# Einführung in die Diskrete Finanzmathematik

Mit 37 Abbildungen

 Springer

Prof. Dr. Jürgen Kremer  
Fachhochschule Koblenz  
RheinAhrCampus Remagen  
Südallee 2  
53424 Remagen, Deutschland  
e-mail: kremer@rheinahrcampus.de

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

---

Mathematics Subject Classification (2000): 91B02, 91B24, 91B26, 91B28

---

ISBN-10 3-540-25394-7 Springer Berlin Heidelberg New York

ISBN-13 978-3-540-25394-5 Springer Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media

[springer.de](http://springer.de)

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Datenerstellung durch den Autor unter Verwendung eines Springer T<sub>E</sub>X-Makropakets

Herstellung: LE-T<sub>E</sub>X Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig

Umschlaggestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier 44/3142YL - 5 4 3 2 1 0

Für Silke, Alexander  
und für meine Eltern

---

## Vorwort

Das Buch bietet eine Einführung in verschiedene grundlegende Konzepte, Modelle und Methoden der diskreten Finanzmathematik.

Der Text wendet sich in erster Linie an finanz- und wirtschaftsmathematisch orientierte Studenten und Absolventen von Fachhochschulen und Universitäten. Der gewählte Zugang setzt zwar Kenntnisse einiger Grundlagen der linearen Algebra und der Analysis des Grundstudiums voraus, da der Text aber einem Selbststudium zugänglich sein soll, werden viele dieser Ergebnisse in einem eigenen Kapitel mit vollständigen Beweisen dargestellt.

Es gibt mittlerweile eine große Vielzahl hervorragender Darstellungen der Finanzmathematik. In aller Regel konzentrieren sich diese auf die Finanzmathematik in stetiger Zeit und setzen häufig gute Kenntnisse der stochastischen Analysis voraus, die selbst wiederum die Maß- und Martingaltheorie verwendet.

In diesem Buch beschränken wir uns dagegen auf endliche Wahrscheinlichkeitsräume und auf endlich viele Zeitpunkte. Dies bietet folgende Vorteile:

- Der gewählte Rahmen erlaubt es, das zur Behandlung notwendige Rüstzeug auf die Mathematik des Grundstudiums zu begrenzen. Die Inhalte des Buches können damit sowohl in Diplom- als auch in Bachelor-Studiengängen mit finanz- oder wirtschaftsmathematischen Schwerpunkten vermittelt werden.
- Die diskrete Finanzmathematik bietet ein reichhaltiges Repertoire an interessanten Anwendungsbeispielen für Sätze und Zusammenhänge aus der Linearen Algebra, der Analysis und der Wahrscheinlichkeitstheorie.
- Die Theorie der Ein- und Mehr-Perioden-Modelle läßt sich im vorgegebenen diskreten Rahmen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen entwickeln.
- Der gewählte diskrete Rahmen ist trotz seiner Beschränkung auf endliche Zustandsräume und auf endlich viele Zeitpunkte reichhaltig, und es lassen sich bereits die wichtigsten Eigenschaften auch der allgemeinen zeitstetigen Modelle klar erkennen.

- Die im Buch vorgestellten Ein- und Mehr-Perioden-Modelle führen unmittelbar auf die fundamentalen und allgegenwärtigen Baumverfahren zur numerischen Bewertung von Derivaten.
- Die Bewertung von Standard-Optionen, deren zugrunde liegende Aktien während der Laufzeit Dividenden auszahlen, läßt sich auf natürliche Weise in den gegebenen Kontext einbetten und wird ausführlich dargestellt.
- Die Black-Scholes-Formeln werden auf zwei unterschiedlichen Wegen hergeleitet: einmal über einen Grenzprozeß aus den Mehr-Perioden-Modellen und zum anderen mit Methoden der diskreten stochastischen Analysis, die analog zur Vorgehensweise in der stetigen Finanzmathematik sind.
- Grundlegende Konzepte der Maß- und Martingaltheorie sowie der stochastischen Analysis lassen sich mit vergleichsweise geringem mathematischen Aufwand einführen. Die Relevanz der eingeführten Begriffsbildungen, wie Meßbarkeit, Filtrationen, Stopzeiten, bedingte Erwartung, Martingale und stochastische Integrale, kann damit im Rahmen der Behandlung der Ein- und Mehr-Perioden-Modelle sehr gut erläutert und veranschaulicht werden.
- Auf diese Weise läßt sich ein gutes intuitives Verständnis für diese fortgeschrittenen Begriffsbildungen vermitteln, was die Einarbeitung in die stetige stochastische Analysis vorbereiten und erheblich erleichtern mag.

Ein Schwerpunkt des Textes besteht in einer einheitlichen Darstellung der Bewertung zustandsabhängiger Auszahlungsprofile in allgemeinen Ein- und Mehr-Perioden-Modellen auf der Basis der Trennungssätze. Der Zugang ist zunächst strikt algebraisch und erfordert weder Wahrscheinlichkeitsmaße noch Martingale.

Motiviert durch das Diskontieren deterministischer Zahlungsströme wird die im Text entwickelte Preisfindung mit Hilfe von Zustandsprozessen als verallgemeinertes Diskontieren zukünftiger zustandsabhängiger Zahlungsströme interpretiert. Die Formulierung der Bewertung als Erwartungswert wird durch diese Interpretation motiviert, aber nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch gedeutet. So kann der Preis einer zustandsabhängigen Auszahlung  $c \in \mathbb{R}^K$  in einem arbitragefreien Ein-Perioden-Modell durch  $c_0 = \langle \psi, c \rangle$  oder durch  $c_0 = d\mathbf{E}^Q [c]$  dargestellt werden, wobei  $\psi$  einen Zustandsvektor und  $d$  einen Diskontfaktor bezeichnet. Wir interpretieren  $c_0$  jedoch nicht als abdiskontierten Erwartungswert von  $c$  in einer durch das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  definierten risikoneutralen Welt, sondern wir sagen, daß der zum Zeitpunkt 1 fließende zustandsabhängige Zahlungsstrom  $c$  durch  $c_0 = \langle \psi, c \rangle = d\mathbf{E}^Q [c]$  auf den Zeitpunkt 0 transformiert oder abdiskontiert wird. Dabei hat die Darstellung  $d\mathbf{E}^Q [c]$  die Eigenschaft, daß für deterministische Auszahlungen, also für  $c = \text{const}$ , gerade  $c_0 = dc$ , also die klassische Bewertungsformel, erhalten wird.

Ein weiterer Schwerpunkt ist die Untersuchung des Mean-Variance-Optimierungsproblems der Portfoliotheorie auf der Grundlage arbitragefreier Ein-

Perioden-Modelle. Insbesondere wird der enge Bezug dieses Problems zum Capital Asset Pricing Model (CAPM) hervorgehoben.

In einem eigenen Kapitel wird das Konzept des Value at Risk zur Bewertung von Marktrisiken dargestellt. Hier wird ein rekursives Verfahren zur Bestimmung der Sensitivitäten vorgestellt, das für eine objektorientierte Implementierung der Risikomessung verwendet werden kann.

Schließlich werden wichtige Begriffsbildungen und Zusammenhänge der stochastischen Analysis im vorliegenden diskreten Kontext eingeführt und auf die Bewertung von Derivaten in Binomialbaum-Modellen angewendet. Die Vorgehensweise ist analog zur Bewertung von Optionen innerhalb der stetigen Finanzmathematik, läßt sich in den diskreten Modellen aber mit erheblich geringerem technischen Aufwand erläutern.

Im Text werden Code-Fragmente für die Implementierung von Binomialbaum-Verfahren und Black-Scholes-Formeln auch unter Berücksichtigung von Dividendenzahlungen angegeben, die leicht implementiert werden können. Eine vollständige Anwendung mit graphischer Oberfläche, von der aus diese Bewertungsverfahren aufgerufen werden, können einschließlich aller Quelltexte von der Homepage des Autors heruntergeladen werden<sup>1</sup>.

Ich möchte an dieser Stelle meinen wissenschaftlichen Lehrern danken, von denen ich sowohl persönlich als auch fachlich sehr viel gelernt habe und denen ich viel verdanke.

Insbesondere bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Dietmar Arlt, der während meines Studiums in Bonn sein umfassendes Wissen mit ansteckender Begeisterung und hohem persönlichen Einsatz vermittelte.

Weiter danke ich Herrn Prof. Dr. Alfred K. Louis, der sich stets mit großem Engagement für seine Mitarbeiter einsetzte, in dessen Arbeitsgruppe an der Technischen Universität Berlin eine Vielfalt interessanter Themen vertreten war und in der eine ausgezeichnete persönliche und fachliche Atmosphäre herrschte.

Schließlich danke ich Herrn Prof. Dr. Hans Föllmer, der mir als damaligem Mitarbeiter der Bankgesellschaft Berlin die Möglichkeit gab, seine Vorlesungen und Seminare an der Humboldt-Universität Berlin zu besuchen.

Ein Dank gilt meinen Studenten und unserem Assistenten Christian Kierdorf, deren Fragen, Korrekturen und Kommentare an vielen Stellen zu Verbesserungen des Manuskriptes führten. Meinem Kollegen, Herrn Prof. Dr. Claus Neidhardt, danke ich für seine Unterstützung und für manche fachliche Diskussion.

Meiner Frau Silke danke ich für das Korrekturlesen und meinem Sohn Alexander für die Erstellung der schönen Abbildungen.

Daun  
Juli 2005

*Jürgen Kremer*

---

<sup>1</sup> [www.rheinahrcampus.de/~kremer](http://www.rheinahrcampus.de/~kremer)

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ein-Perioden-Wertpapiermärkte</b>	1
1.1	Portfolios	5
1.2	Optionen und Forward-Kontrakte	8
1.2.1	Optionen	8
1.2.2	Forward-Kontrakte	10
1.3	Die Bewertung von Auszahlungsprofilen	12
1.3.1	Die Transformation deterministischer Zahlungsströme	12
1.3.2	Die Transformation zustandsabhängiger Zahlungsströme	14
1.3.3	Die Bewertung von Auszahlungsprofilen mit Hilfe von Replikation	15
1.4	Replikation und Arbitrage	22
1.5	Der Fundamentalsatz der Preistheorie	31
1.5.1	Trennungssätze im $\mathbb{R}^n$	32
1.5.2	Interpretation von $\psi$ als Zustandspreisvektor	39
1.5.3	Der Nachweis der Arbitragefreiheit	39
1.5.4	Das Ein-Perioden-Zwei-Zustands-Modell	40
1.6	Replizierbarkeit und Vollständigkeit	44
1.7	Preise als diskontierte Erwartungswerte	47
1.7.1	Interpretation von $d$ als Diskontfaktor	49
1.7.2	Interpretation von $Q$ als Martingalmaß	51
1.7.3	Erwartungswert versus Diskontierung	52
1.8	Wertgrenzen für Call- und Put-Optionen	54
1.9	Das Auffinden von Arbitragegelegenheiten	56
1.10	Das diskontierte Marktmodell	58
1.10.1	Arbitragefreiheit und Gewinne	61
1.11	Zusammenfassung	68
1.12	Weitere Aufgaben	69
<b>2</b>	<b>Portfoliotheorie</b>	73
2.1	Rendite und Risiko	73
2.1.1	Die erwartete Rendite	74



2.1.2	Risiko, Varianz und Volatilität . . . . .	74
2.1.3	Der rationale Investor . . . . .	76
2.1.4	Das $\mu$ - $\sigma$ -Diagramm . . . . .	76
2.2	Portfolioanalyse . . . . .	77
2.2.1	Rendite und erwartete Rendite eines Portfolios . . . . .	77
2.2.2	Varianz und Standardabweichung eines Portfolios . . . . .	80
2.2.3	Relative Risikobeiträge . . . . .	83
2.2.4	Interpretation der Kovarianz . . . . .	84
2.2.5	Die Korrelation . . . . .	85
2.2.6	Diversifikation . . . . .	87
2.2.7	Die klassische Darstellung des CAPM . . . . .	91
2.3	Mean-Variance-Portfolio-Analyse . . . . .	101
2.3.1	Die Zustandsdichte . . . . .	102
2.3.2	Rendite und Risiko der Zustandsdichte . . . . .	104
2.3.3	CAPM und das Mean-Variance-Optimierungsproblem . . . . .	110
2.3.4	Die Bewertung von Auszahlungen mit Hilfe des CAPM . . . . .	117
2.3.5	Anwendungsbeispiel für den Fall $\mathcal{L} \in \text{Im } D^\top$ , $\mathcal{L} \neq 1$ . . . . .	117
2.3.6	Der Fall $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^K$ beliebig, $\mathcal{L} \neq 1$ . . . . .	119
2.3.7	Das Optimierungsproblem . . . . .	131
2.4	Zusammenfassung . . . . .	136
2.5	Weitere Aufgaben . . . . .	141
<b>3</b>	<b>Mehr-Perioden-Modelle</b> . . . . .	<b>143</b>
3.1	Modellierung der Informationszunahme . . . . .	144
3.1.1	Informationsbäume, . . . . .	144
3.1.2	Algebren und Partitionen . . . . .	149
3.2	Stochastische Prozesse und Meßbarkeit . . . . .	153
3.2.1	Die natürliche Filtration . . . . .	159
3.3	Das Marktmodell . . . . .	164
3.4	Die Bewertung von Auszahlungsprofilen . . . . .	169
3.4.1	Lokalisierung . . . . .	171
3.4.2	Ein-Perioden-Teilmodelle . . . . .	171
3.4.3	Konstruktion einer replizierenden Handelsstrategie . . . . .	172
3.4.4	Arbitragefreiheit und der Fundamentalsatz . . . . .	177
3.4.5	Die Bewertung deterministischer Zahlungsströme . . . . .	181
3.4.6	Die Bewertung zustandsabhängiger Zahlungsströme . . . . .	183
3.4.7	Die Bestimmung von Zustandsprozessen . . . . .	186
3.5	Der Diskontierungsoperator . . . . .	192
3.5.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	192
3.5.2	Direktes und rekursives Verfahren zur Bestimmung der Preise von Auszahlungsprofilen . . . . .	199
3.5.3	Darstellung der Preise als Erwartungswerte . . . . .	202
3.5.4	Festverzinsliche Handelsstrategien . . . . .	203
3.5.5	Der Diskontierungsoperator wird zur bedingten Erwartung . . . . .	209

3.5.6	Preisprozesse werden zu Martingalen .....	211
3.6	Das diskontierte Marktmodell .....	212
3.7	Wertgrenzen für Call- und Put-Optionen .....	218
3.8	Zusammenfassung .....	220
3.9	Weitere Aufgaben .....	226
<b>4</b>	<b>Optionen, Futures und andere Derivate .....</b>	<b>229</b>
4.1	Das Mehr-Perioden-Binomialbaum-Modell .....	229
4.2	Rekombinierende Binomialbäume .....	233
4.3	Kalibrierung der Parameter des Binomialbaums .....	237
4.3.1	Bestimmung des Zinssatzes $r_n$ pro Periode .....	238
4.3.2	Die Modellierung der Aktienkurse .....	239
4.3.3	Binomialbäume und Binomialverteilung .....	242
4.3.4	Die Bestimmung der Parameter $u_n$ und $p_n$ .....	244
4.3.5	Näherungslösungen für $u_n$ und $p_n$ .....	246
4.4	Die Bewertung europäischer Standard-Derivate .....	248
4.4.1	Das direkte Bewertungsverfahren .....	249
4.4.2	Die Implementierung des direkten Verfahrens .....	251
4.4.3	Das rekursive Bewertungsverfahren .....	254
4.4.4	Die Implementierung des rekursiven Verfahrens .....	255
4.5	Die Berücksichtigung von Dividendenzahlungen .....	256
4.5.1	Die Modellierung von Aktienkursen mit Dividendenzahlungen .....	256
4.5.2	Die Bewertung im Ein-Perioden-Zwei-Zustands-Modell .....	260
4.5.3	Dividenden im Mehr-Perioden-Modell .....	263
4.5.4	Algorithmen zur Bewertung europäischer Auszahlungen mit Dividenden .....	268
4.6	Amerikanische Optionen .....	270
4.6.1	Die Bewertung amerikanischer Optionen ohne Dividendenzahlungen .....	270
4.6.2	Ein Algorithmus zur Berechnung amerikanischer Auszahlungen ohne Dividendenzahlung .....	274
4.7	Amerikanische Optionen mit Dividendenzahlungen .....	276
4.7.1	Ein Algorithmus zur Berechnung von amerikanischen Optionen mit Dividendenzahlung .....	276
4.8	Die Black-Scholes-Formeln .....	278
4.8.1	Bewertungsformeln im Binomialbaum-Modell .....	278
4.8.2	Die Konvergenz der Bewertungsformel .....	281
4.8.3	Die analytische Bewertung von Standard-Optionen im Black-Scholes-Modell .....	284
4.8.4	Implementierung der Black-Scholes-Formeln .....	285
4.9	Present Value und die Bewertung von Cash-Flows .....	291
4.10	Swaps .....	294
4.11	Forward-Preise .....	294
4.12	Futures .....	297

4.13	Forward-Start-Optionen	304
4.14	Forward-Start-Performance-Optionen	305
4.15	Ein strukturiertes Produkt	306
4.16	Zusammenfassung	308
4.17	Weitere Aufgaben	310
<b>5</b>	<b>Risikomanagement</b>	<b>311</b>
5.1	Value at Risk	311
5.1.1	Darstellung des Value at Risk mit Hilfe der Renditeverteilung eines Portfolios	313
5.1.2	Normalverteilte Portfoliorenditen	313
5.1.3	Zeitliche Skalierung	315
5.2	Die Delta-Normal-Methode	318
5.2.1	Die Portfoliorendite als Linearkombination normalverteilter Renditen	318
5.2.2	Die Delta-Normal-Methode	322
5.2.3	Berechnung der modifizierten Sensitivitäten	325
5.3	Component VaR	331
5.4	Directional VaR	332
5.5	Diskussion: Value at Risk als Risikomaß	333
5.6	Zusammenfassung	336
5.7	Weitere Aufgaben	338
<b>6</b>	<b>Diskrete Stochastische Analysis</b>	<b>339</b>
6.1	Bedingte Erwartung und Martingale	339
6.1.1	Die Bedingte Erwartung als Projektion	345
6.1.2	Unabhängigkeit	349
6.1.3	Martingale	350
6.2	Die Doob-Zerlegung	352
6.3	Kovariations-Prozesse	355
6.4	Orthogonale Martingale	359
6.5	Das diskrete stochastische Integral	360
6.6	Stochastische Integrale und Kovariations-Prozesse	361
6.7	Die Itô-Formel	364
6.8	Stochastische Exponentiale	364
6.9	Der Satz von Girsanov	367
6.9.1	Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte	367
6.9.2	Der Satz von Girsanov	369
6.10	Stopzeiten	371
6.11	Zusammenfassung	375
6.12	Weitere Aufgaben	376

<b>7</b>	<b>Diskrete Stochastische Finanzmathematik</b> .....	377
7.1	Das Binomialbaum-Modell .....	377
7.1.1	Schritt 1: Konstruktion eines Martingalmaßes .....	378
7.1.2	Schritt 2: Definition des Preises von $c_T$ als Erwartungswert .....	386
7.1.3	Schritt 3: Konstruktion einer die Endauszahlung $c_T$ replizierenden selbstfinanzierenden Handelsstrategie....	386
7.2	Die Binomialbaum-Formeln .....	388
7.3	Die Black-Scholes-Formeln .....	391
7.4	Amerikanische Optionen .....	395
7.5	Zusammenfassung .....	398
7.6	Aufgaben .....	399
<b>8</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b> .....	401
8.1	Vektorräume .....	401
8.2	Skalarprodukt und Norm .....	402
8.3	Die Schwarzsche Ungleichung .....	404
8.3.1	Der Satz des Pythagoras .....	404
8.3.2	Die Projektion .....	405
8.3.3	Die Schwarzsche Ungleichung .....	407
8.3.4	Definition von Winkeln .....	408
8.3.5	Grenzfälle .....	408
8.4	Basen, Orthonormalbasen und der Projektionssatz .....	409
8.5	Quotientenräume .....	412
8.6	Lineare Abbildungen .....	414
8.7	Der Rieszsche Darstellungssatz .....	420
8.8	Adjungierte Abbildungen .....	421
8.9	Lineare Optimierung .....	424
8.10	Landau-Symbole .....	425
8.11	Lagrange-Multiplikatoren .....	426
8.12	Der Satz von De Moivre-Laplace .....	428
<b>9</b>	<b>Lösungen der Aufgaben</b> .....	431
9.1	Ein-Perioden-Modelle .....	431
9.2	Portfoliotheorie .....	442
9.3	Mehr-Perioden-Modelle .....	456
9.4	Optionen, Futures und andere Derivate .....	472
9.5	Risikomanagement .....	476
9.6	Diskrete Stochastische Analysis .....	480
9.7	Diskrete Stochastische Finanzmathematik .....	488
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	493
	<b>Sachverzeichnis</b> .....	495