

Springer-Lehrbuch

Franz Schwabl

Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)

Vierte, erweiterte und aktualisierte Auflage
mit 79 Abbildungen, 4 Tabellen
und 101 Aufgaben

 Springer

Professor Dr. Franz Schwabl
Physik-Department
Technische Universität München
James-Franck-Straße
85747 Garching, Deutschland
e-mail: schwabl@ph.tum.de

ISBN-10 3-540-25904-X 4. Aufl. Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-25904-6 4. Aufl. Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN 3-540-20308-7 3. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek.

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997, 2000, 2004, 2005
Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: F. Schwabl und F. Herweg EDV Beratung unter Verwendung eines Springer L^AT_EX₂ε Makropakets
Herstellung: LE-TeXJelonek, Schmidt und Vöckler GbR, Leipzig
Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier 56/3141/YL - 5 4 3 2 1 0

Die wahre Physik ist jene, der es eines Tages gelingen wird,
den Menschen in seiner Gesamtheit
in ein zusammenhängendes Weltbild einzugliedern.

Pierre Teilhard de Chardin

Meiner Tochter Birgitta

Vorwort zur vierten Auflage

Die erfreulich positive Aufnahme des Buches hatte dazu geführt, daß innerhalb verhältnismäßig kurzer Zeit eine weitere Neuauflage erforderlich war. Dabei wurden an vielen Stellen erklärende Ergänzungen und Präzisierungen angebracht und Querverbindungen zwischen den einzelnen Abschnitten hervorgehoben. Das betrifft auch einen Teil der Übungsaufgaben. Eine Reihe von Abbildungen und der Umbruch wurden verbessert. Bei dieser Gelegenheit möchte ich allen Kollegen, Mitarbeitern und Studenten danken, die Verbesserungsvorschläge machten. Unter anderem bin ich Herrn Prof. U. Täuber, Virginia, für Ratschläge dankbar. Besonderer Dank gilt Frau Jörg-Müller, für die allgemeine Organisation, und Frau Marquard-Schmitt und Herrn Wollenweber für das Lesen der Korrekturen. Herrn Dr. Th. Schneider und Frau J. Lenz vom Springer-Verlag danke ich für die exzellente Zusammenarbeit.

München, im Juli 2005

F. Schwabl

Vorwort

Das vorliegende Lehrbuch behandelt fortgeschrittene Themen der Quantenmechanik, wie sie üblicherweise in Vorlesungen über Quantenmechanik II dargestellt werden. Es ist in drei Teile gegliedert: I *Vielteilchensysteme*, II *Relativistische Wellengleichungen* und III *Relativistische Felder*, die sich in insgesamt 15 Kapitel teilen. Im Text wird Wert auf eine gestraffte Darstellung gelegt, die dennoch außer Kenntnis der Quantenmechanik keine weiteren Hilfsmittel erfordert. Die Verständlichkeit wird gewährleistet durch Angabe aller mathematischen Schritte und ausführliche und vollständige Durchführung der Zwischenrechnungen. Am Ende jedes Kapitels sind eine Reihe von Übungsaufgaben angegeben. Teilabschnitte, die bei der ersten Lektüre übergangen werden können, sind mit einem Stern gekennzeichnet. Nebenrechnungen und Bemerkungen, die für das Verständnis nicht entscheidend sind, werden in Kleindruck dargestellt. Für die Teile II und III ist die vorhergehende Lektüre von Teil I nicht erforderlich. Wo es hilfreich erscheint, werden Zitate angegeben, die auch dort keineswegs vollständig sind, aber zur weiteren Lektüre anregen sollen. Am Ende jedes der drei Teile befindet sich eine Liste von Lehrbüchern.

Das Buch grenzt sich gegen das Lehrbuch *Quantenmechanik* thematisch dadurch ab, daß relativistische Phänomene und klassische wie relativistische Quantenfelder behandelt werden.

In Teil I wird der Formalismus der zweiten Quantisierung eingeführt und auf die wichtigsten, mit einfachen Methoden darstellbaren Probleme, wie schwach wechselwirkendes Elektronengas, Anregungen in schwach wechselwirkenden Bose-Gasen, angewandt und es werden die grundlegenden Eigenschaften von Korrelations- und Responsefunktionen von Vielteilchensystemen behandelt.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Klein-Gordon-Gleichung und der Dirac-Gleichung. Neben den wichtigsten Problemen, wie der Bewegung im Coulomb-Potential, wird besonderes Augenmerk den Symmetrieeigenschaften zugewandt.

Im dritten Teil wird das Noethersche Theorem, die Quantisierung von Klein-Gordon-, Dirac- und Strahlungsfeld dargestellt, sowie das Spin-Statistik-Theorem. Das letzte Kapitel behandelt wechselwirkende Felder am Beispiel der Quantenelektrodynamik: *S*-Matrix-Theorie, Wick-Theorem, Feyn-

man Regeln und einige einfache Prozesse wie Mott-Streuung und Elektron-Elektron-Streuung.

Das Buch wird Studenten der Physik und verwandter Fachgebiete ab dem 5. oder 6. Semester empfohlen und Teile daraus können möglicherweise auch von Lehrenden nutzbringend verwendet werden.

Dieses Buch ist aus Vorlesungen, die der Autor wiederholt an der Technischen Universität München gehalten hat, entstanden. Am Schreiben des Manuskripts, am Lesen der Korrekturen haben viele Mitarbeiter mitgewirkt: Frau I. Wefers, Frau E. Jörg-Müller, Frau C. Schwierz, die Herren A. Vilfan, S. Clar, K. Schenk, M. Hummel, E. Wefers, B. Kaufmann, M. Bulenda, J. Wilhelm, K. Kroy, P. Maier, C. Feuchter, A. Wonhas. Herr E. Frey und Herr W. Gasser waren an der Ausarbeitung der Übungsbeispiele beteiligt. Herr W. Gasser hat das gesamte Manuskript gelesen und zu vielen Kapiteln des Buches wertvolle Anregungen gegeben. Ihnen und allen anderen Mitarbeitern, deren Hilfe wichtig war, sowie stellvertretend für den Springer-Verlag Herrn Dr. H.J. Kölsch sei an dieser Stelle herzlichst gedankt.

München, Juni 1997

F. Schwabl

Inhaltsverzeichnis

Teil I. Nichtrelativistische Vielteilchen-Systeme

1. Zweite Quantisierung	3
1.1 Identische Teilchen, Mehrteilchenzustände und Permutationssymmetrie	3
1.1.1 Zustände und Observable von identischen Teilchen . . .	3
1.1.2 Beispiele	6
1.2 Vollkommen symmetrische und antisymmetrische Zustände . .	8
1.3 Bosonen	10
1.3.1 Zustände, Fock-Raum, Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren	10
1.3.2 Teilchenzahloperator	13
1.3.3 Allgemeine Einteilchen- und Mehrteilchenoperatoren .	14
1.4 Fermionen	17
1.4.1 Zustände, Fock-Raum und Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren	17
1.4.2 Ein- und Mehrteilchenoperatoren	20
1.5 Feldoperatoren	21
1.5.1 Transformationen zwischen verschiedenen Basissystemen	21
1.5.2 Feldoperatoren	21
1.5.3 Feldgleichungen	23
1.6 Impulsdarstellung	25
1.6.1 Impulseigenfunktionen, Hamilton-Operator	25
1.6.2 Fouriertransformation der Dichte	27
1.6.3 Berücksichtigung des Spins	28
Aufgaben	29
2. Spin-1/2 Fermionen	33
2.1 Nichtwechselwirkende Fermionen	33
2.1.1 Fermi-Kugel, Anregungen	33
2.1.2 Einteilchenkorrelationsfunktion	35
2.1.3 Paarverteilungsfunktion	36
*2.1.4 Paarverteilungsfunktion, Dichtekorrelationsfunktionen und Strukturfaktor	39

2.2	Grundzustandsenergie und elementare Theorie des Elektronengases	41
2.2.1	Hamilton-Operator	41
2.2.2	Grundzustandsenergie in Hartree-Fock-Näherung	43
2.2.3	Änderung der elektronischen Energieniveaus durch die Coulomb-Wechselwirkung	46
2.3	Hartree-Fock Gleichungen für Atome	49
	Aufgaben	52
3.	Bosonen	55
3.1	Freie Bosonen	55
3.1.1	Paarverteilungsfunktion für freie Bosonen	55
*3.1.2	Zweiteilchenzustände von Bosonen	57
3.2	Schwach wechselwirkendes, verdünntes Bose-Gas	60
3.2.1	Quantenflüssigkeiten und Bose-Einstein-Kondensation	60
3.2.2	Bogoliubov-Theorie des schwach wechselwirkenden Bose-Gases	62
*3.2.3	Suprafluidität	69
	Aufgaben	72
4.	Korrelationsfunktionen, Streuung und Response	75
4.1	Streuung und Response	75
4.2	Dichtematrix, Korrelationsfunktionen	82
4.3	Dynamische Suszeptibilität	85
4.4	Dispersionsrelationen	89
4.5	Spektraldarstellung	90
4.6	Fluktuations-Dissipations-Theorem	91
4.7	Anwendungsbeispiele	92
*4.8	Symmetrieeigenschaften	99
4.8.1	Allgemeine Symmetrierelationen	99
4.8.2	Symmetrieeigenschaften der Responsefunktion für hermitesche Operatoren	102
4.9	Summenregeln	106
4.9.1	Allgemeine Struktur von Summenregeln	106
4.9.2	Anwendung auf die Anregungen in He II	108
	Aufgaben	109
	Literatur zu Teil I	111

Teil II. Relativistische Wellengleichungen

5. Aufstellung von relativistischen Wellengleichungen	115
5.1 Einleitung	115
5.2 Klein-Gordon-Gleichung	116
5.2.1 Aufstellung mittels des Korrespondenzprinzips	116
5.2.2 Kontinuitätsgleichung	119
5.2.3 Freie Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung	120
5.3 Dirac-Gleichung	121
5.3.1 Aufstellung der Dirac-Gleichung	121
5.3.2 Kontinuitätsgleichung	122
5.3.3 Eigenschaften der Dirac-Matrizen	123
5.3.4 Die Dirac-Gleichung in kovarianter Form	124
5.3.5 Nichtrelativistischer Grenzfall und Kopplung an das elektromagnetische Feld	125
Aufgaben	131
6. Lorentz-Transformationen und Kovarianz der Dirac-Gleichung	133
6.1 Lorentz-Transformationen	133
6.2 Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung	137
6.2.1 Die Lorentz-Kovarianz und Transformation von Spinoren	137
6.2.2 Bestimmung der Darstellung $S(\Lambda)$	138
6.2.3 Weitere Eigenschaften der S	144
6.2.4 Transformation von Bilinearformen	146
6.2.5 Eigenschaften der γ -Matrizen	147
6.3 Lösungen der Dirac-Gleichung für freie Teilchen	148
6.3.1 Spinoren mit endlichem Impuls	148
6.3.2 Orthogonalitätsrelationen und Dichte	151
6.3.3 Projektionsoperatoren	153
Aufgaben	154
7. Drehimpuls – Bahndrehimpuls und Spin	157
7.1 Passive und aktive Transformationen	157
7.2 Drehungen und Drehimpuls	158
Aufgaben	161
8. Bewegung im Coulomb-Potential	163
8.1 Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld	163
8.1.1 Ankopplung an das elektromagnetische Feld	163
8.1.2 Klein-Gordon-Gleichung im Coulomb-Feld	164
8.2 Dirac-Gleichung für das Coulomb-Potential	170
Aufgaben	182

9. Foldy-Wouthuysen-Transformation und Relativistische Korrekturen	183
9.1 Die Foldy-Wouthuysen-Transformation	183
9.1.1 Problemstellung	183
9.1.2 Transformation für freie Teilchen	184
9.1.3 Wechselwirkung mit elektromagnetischem Feld	185
9.2 Relativistische Korrekturen und Lamb-Verschiebung	190
9.2.1 Relativistische Korrekturen	190
9.2.2 Abschätzung der Lamb-Verschiebung	191
Aufgaben	196
10. Physikalische Interpretation der Lösungen der Dirac-Gleichung	197
10.1 Wellenpakete und Zitterbewegung	197
10.1.1 Superposition von Zuständen positiver Energie	198
10.1.2 Allgemeines Wellenpaket	199
*10.1.3 Allgemeine Lösung der freien Dirac-Gleichung im Heisenberg-Bild	203
*10.1.4 Klein-Paradoxon, Potentialschwelle	204
10.2 Löcher-Theorie	207
Aufgaben	210
11. Symmetrien und weitere Eigenschaften der Dirac-Gleichung	211
*11.1 Aktive und passive Transformationen, Transformation von Vektoren	211
11.2 Invarianz und Erhaltungssätze	214
11.2.1 Allgemeine Transformation	214
11.2.2 Drehungen	215
11.2.3 Translationen	215
11.2.4 Raumspiegelung (Paritätstransformation)	216
11.3 Ladungskonjugation	216
11.4 Zeitumkehr (Bewegungsumkehr)	220
11.4.1 Bewegungsumkehr in der klassischen Physik	220
11.4.2 Zeitumkehr in der Quantenmechanik	224
11.4.3 Zeitumkehrinvarianz der Dirac-Gleichung	232
*11.4.4 Racah-Zeitspiegelung	238
*11.5 Helizität	240
*11.6 Fermionen mit Masse Null (Neutrinos)	242
Aufgaben	247
Literatur zu Teil II	249

Teil III. Relativistische Felder

12. Quantisierung von relativistischen Feldern	253
12.1 Gekoppelte Oszillatoren, lineare Kette, Gitterschwingungen . .	253
12.1.1 Lineare Kette von gekoppelten Oszillatoren	253
12.1.2 Kontinuumsrenzfall, schwingende Saite	259
12.1.3 Verallgemeinerung auf drei Dimensionen, Zusammenhang mit dem Klein–Gordon–Feld	262
12.2 Klassische Feldtheorie	265
12.2.1 Lagrange–Funktion und Euler–Lagrange Bewegungsgleichungen	265
12.3 Kanonische Quantisierung	270
12.4 Symmetrien und Erhaltungssätze, Noether Theorem	271
12.4.1 Energie–Impuls–Tensor, Kontinuitätsgleichungen und Erhaltungssätze	271
12.4.2 Herleitung der Erhaltungssätze für Viererimpuls, Drehimpuls und Ladung aus dem Noetherschen Theorem	273
Aufgaben	280
13. Freie Felder	281
13.1 Das reelle Klein–Gordon–Feld	281
13.1.1 Lagrange–Dichte, Vertauschungsrelationen, Hamilton–Operator	281
13.1.2 Propagatoren	285
13.2 Das komplexe Klein–Gordon–Feld	289
13.3 Quantisierung des Dirac–Feldes	292
13.3.1 Feldgleichungen	292
13.3.2 Erhaltungsgrößen	293
13.3.3 Quantisierung	294
13.3.4 Ladung	298
*13.3.5 Grenzfall unendlichen Volumens	299
13.4 Spin–Statistik–Theorem	300
13.4.1 Propagatoren und Spin–Statistik–Theorem	300
13.4.2 Ergänzungen zum Antikommutator und Propagator des Dirac–Feldes	306
Aufgaben	307
14. Quantisierung des Strahlungsfeldes	311
14.1 Klassische Elektrodynamik	311
14.1.1 Maxwell–Gleichungen	311
14.1.2 Eichtransformationen	313
14.2 Coulomb–Eichung	313
14.3 Lagrange–Dichte für das elektromagnetische Feld	315

14.4	Freies elektromagnetisches Feld und dessen Quantisierung . . .	316
14.5	Berechnung des Photon-Propagators	320
	Aufgaben	324
15.	Wechselwirkende Felder, Quantenelektrodynamik	325
15.1	Lagrange-Funktionen, wechselwirkende Felder	325
15.1.1	Nichtlineare Lagrange-Funktionen	325
15.1.2	Fermionen in einem äußeren Feld	326
15.1.3	Wechselwirkung von Elektronen mit dem Strahlungsfeld: Quantenelektrodynamik (QED)	326
15.2	Wechselwirkungsdarstellung, Störungstheorie	328
15.2.1	Wechselwirkungsdarstellung (auch Dirac-Darstellung) .	328
15.2.2	Störungstheorie	331
15.3	S -Matrix	333
15.3.1	Allgemeine Formulierung	333
15.3.2	Einfache Übergänge	337
*15.4	Wicksches Theorem	340
15.5	Einfache Streuprozesse, Feynman-Diagramme	344
15.5.1	Der Term erster Ordnung	345
15.5.2	Mott-Streuung	346
15.5.3	Prozesse zweiter Ordnung	352
15.5.4	Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik	361
*15.6	Strahlungskorrekturen	364
15.6.1	Selbstenergie des Elektrons	364
15.6.2	Selbstenergie des Photons, Vakuumpolarisation	370
15.6.3	Vertexkorrekturen	372
15.6.4	Ward-Identität und Ladungsrenormierung	373
15.6.5	Anomales magnetisches Moment des Elektrons	376
	Aufgaben	379
	Literatur zu Teil III	381
	Anhang	383
A	Alternative Herleitung der Dirac-Gleichung	383
B	Formeln	385
B.1	Standarddarstellung	385
B.2	Chirale Darstellung	385
B.3	Majorana-Darstellungen	386
C	Projektionsoperatoren für den Spin	386
C.1	Definition	386
C.2	Ruhsystem	386
C.3	Bedeutung des Projektionsoperators $P(n)$ im allge- meinen	387
D	Wegintegraldarstellung der Quantenmechanik	391

E	Kovariante Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, Gupta–Bleuler–Methode	393
E.1	Quantisierung und Feynman-Propagator	393
E.2	Die physikalische Bedeutung von longitudinalen und skalaren Photonen	395
E.3	Der Feynman-Photonen-Propagator	398
E.4	Erhaltungsgrößen	400
F	Die Ankopplung von geladenen skalaren Mesonen an das elektromagnetische Feld	400
Sachverzeichnis		403

Teil I

Nichtrelativistische Vielteilchen-Systeme