

Springer-Lehrbuch

Wolfgang Domschke · Andreas Drexl

Einführung in Operations Research

Sechste, überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 96 Abbildungen
und 63 Tabellen

 Springer

Professor Dr. Wolfgang Domschke
Technische Universität Darmstadt
Institut für Betriebswirtschaftslehre
Fachgebiet Operations Research
Hochschulstraße 1
64289 Darmstadt
E-mail: domschke@bwl.tu-darmstadt.de

Professor Dr. Andreas Drexl
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Lehrstuhl für Produktion und Logistik
Olshausenstraße 40
24118 Kiel
E-mail: drexl@bwl.uni-kiel.de

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 3-540-23431-4 6. Auflage Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN 3-540-42950-6 5. Auflage Springer Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990, 1991, 1995, 1998, 2002, 2005
Printed in Italy

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Design & Production GmbH, Heidelberg
Herstellung: Helmut Petri
Druck: Legoprint

SPIN 11333708 Gedruckt auf säurefreiem Papier – 42/3130 – 5 4 3 2 1 0

Vorwort zur 6. Auflage

Der langjährige Einsatz des Buches in Lehrveranstaltungen hat uns in der Absicht bestärkt, auch bei der sechsten Auflage dessen Grundkonzeption beizubehalten.

Verschwunden sind hoffentlich sämtliche Fehler, die sich im Rahmen der 5. Auflage durch Übertragung in ein neues Textverarbeitungssystem eingeschlichen hatten.

Überarbeitet und teilweise neu strukturiert wurde diesmal v.a. das Kapitel zur linearen Optimierung (Kap. 2). Hier sind nähere Ausführungen zu den Begriffen Reduzierte Kosten, Schattenpreise und **Opportunitätskosten** hinzugekommen. Sie besitzen enge Beziehungen zur Dualitätstheorie, so dass wir die Behandlung in einem Unterkapitel (Kap. 2.5) zusammengefasst haben. Neu hinzugekommen ist ferner das Kapitel 6.5 zur Lösung von Knapsack-Problemen.

Für Verbesserungsvorschläge sind wir den Herren Prof. Dr. *Knut Haase* und Prof. Dr. *Walter Hower* sehr zu Dank verpflichtet.

Darüber hinaus haben uns Frau Dipl.-Wirtsch.-Inf. *Anita Petrick* sowie die Herren Dipl.-Inf. *Andrei Horbach*, Dr. *Robert Klein*, Dipl.-Wirtsch.-Inf. *Bernd Wagner* und Dipl.-Geophys. *Stefan Wende* bei der Neuauflage des Buches tatkräftig unterstützt.

Darmstadt/Kiel, im August 2004

Wolfgang Domschke

Andreas Drexel

Aus dem Vorwort zur 5. Auflage

Neu hinzugekommen ist Kapitel 11. Hier wird exemplarisch gezeigt, wie sich zentrale Problemstellungen des Operations Research mit Hilfe der **Tabellenkalkulation** lösen lassen. Diese Ausführungen wurden von unseren Studierenden sehr begrüßt.

Wir haben das Manuskript in ein neues Textverarbeitungsprogramm übertragen. Das birgt natürlich die Gefahr, dass (Übertragungs-) Fehler entstanden sind, die trotz mehrfachen Lesens nicht entdeckt wurden. Diese und auch manche Darstellungen, die vereinheitlicht werden könnten, bitten wir uns für diese Auflage nachzusehen.

Herzlicher Dank gilt an dieser Stelle unseren Sekretärinnen *Ethel Fritz* und *Petra Hechler* für die nicht ganz einfache Übertragungsarbeit. Darüber hinaus haben uns Frau Dr. *Gabriela Mayer* und die Herren Dr. *Robert Klein* sowie Dipl.-Wirtsch.-Inf. *Bernd Wagner* bei der Neuauflage des Buches tatkräftig unterstützt. Herrn Prof. Dr. *Hans Daduna* sowie Herrn PD Dr. *Alf Kimms* danken wir für einige Verbesserungsvorschläge.

Darmstadt/Kiel, im September 2001

Wolfgang Domschke

Andreas Drexel

Vorwort (zur 1. Auflage)

Das vorliegende Buch ist aus **Vorlesungen zur Einführung in Operations Research** entstanden, die wir für Studenten der Betriebswirtschaftslehre, der Volkswirtschaftslehre, des Wirtschaftsingenieurwesens, der (Wirtschafts-) Informatik und der Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt und an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel gehalten haben.

Das Operations Research hat sich in den letzten 20 Jahren stürmisch entwickelt. In allen grundlegenden Bereichen des Operations Research, mit denen wir uns in den Kapiteln 2 bis 10 dieses Buches näher auseinandersetzen, wurde eine Vielzahl unterschiedlicher Modelle und leistungsfähiger Verfahren konzipiert. Dasselbe gilt für diejenigen Bereiche, die sich mit primär anwendungsorientierten Problemen beschäftigen. Ein Ende dieser Entwicklung ist nicht in Sicht.

Die Ergebnisse dieser Forschungsbemühungen werden in einer Fülle von Fachzeitschriften und Monographien dokumentiert. Für die meisten dieser Publikationen gilt, dass sie von Fachleuten für Fachleute verfasst wurden. Für Anfänger ist der Zugang teilweise recht schwierig.

Dieses Buch ist angesichts der oben bereits genannten heterogenen studentischen Zielgruppe **ein einführendes Studienskript mit grundlegenden Modellen und Verfahren des Operations Research**. Im Vordergrund steht damit nicht die Darstellung neuester Forschungsergebnisse, sondern eine didaktisch günstige Aufbereitung und Vermittlung von Grundlagen dieser jungen Wissenschaft. Die Ausführungen sind so gehalten, dass sie weitgehend auch zum Selbststudium geeignet sind. Alle Verfahren werden daher, soweit erforderlich und mit vertretbarem Aufwand möglich, algorithmisch beschrieben und an Beispielen verdeutlicht. Ein über die in den Text gestreuten Beispiele hinausgehender Aufgaben- und Lösungsteil befindet sich in Vorbereitung.

Wir danken unseren Mitarbeitern, insbesondere Frau Dipl.-Math. *Birgit Schildt* sowie den Herren Dipl.-Wirtsch.-Inf. *Armin Scholl* und Dipl.-Math. *Arno Sprecher* für die kritische Durchsicht des Manuskripts sowie wertvolle Anregungen und Verbesserungsvorschläge. Herrn Dr. *Werner Müller* vom Springer-Verlag danken wir für die Aufnahme dieses Buches in die Reihe der Springer-Lehrbücher.

Wir widmen dieses Buch Barbara und Ulrike. Ihnen sollte ein OR-Preis verliehen werden: Während der Wochen und Monate, die wir mit dem Schreiben dieses Buches zugebracht haben und damit unseren Familien nicht zur Verfügung standen, ist es ihnen gelungen, unsere Kinder davon zu überzeugen, dass die Beschäftigung mit Operations Research die schönste und wichtigste Sache im Leben ist.

Wir hoffen, dass unsere Studenten und Kollegen nach der Lektüre des Buches diese Auffassung teilen.

Darmstadt/Kiel, im August 1990

Wolfgang Domschke

Andreas Drex1

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Symbolverzeichnis	XIII
Kapitel 1: Einführung	1
1.1 Begriff des Operations Research	1
1.2 Modelle im Operations Research	3
1.2.1 Charakterisierung verschiedener Modelltypen	3
1.2.2 Optimierungsmodelle	4
1.2.2.1 Formulierung eines allgemeinen Optimierungsmodells	4
1.2.2.2 Beispiele für Optimierungsmodelle	5
1.2.2.3 Klassifikation von Optimierungsmodellen	6
1.2.3 Bedeutung einer effizienten Modellierung	7
1.3 Teilgebiete des Operations Research	7
1.4 Arten der Planung und Anwendungsmöglichkeiten des OR	10
1.5 Anhang	12
Kapitel 2: Lineare Optimierung	13
2.1 Definitionen	13
2.2 Graphische Lösung von linearen Optimierungsproblemen	14
2.3 Formen und Eigenschaften von LPs	16
2.3.1 Optimierungsprobleme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen	16
2.3.2 Die Normalform eines linearen Optimierungsproblems	17
2.3.3 Eigenschaften von linearen Optimierungsproblemen	18
2.4 Der Simplex-Algorithmus	21
2.4.1 Der Simplex-Algorithmus bei bekannter zulässiger Basislösung	22
2.4.1.1 Darstellung des Lösungsprinzips anhand eines Beispiels	22
2.4.1.2 Der primale Simplex-Algorithmus	23
2.4.2 Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Basislösung	25
2.4.2.1 Der duale Simplex-Algorithmus	25
2.4.2.2 Die M-Methode	28
2.5 Dualität und Analyse von LP-Lösungen	31
2.5.1 Dualität	31
2.5.2 Sonderfälle von LPs und ihre Identifikation	35
2.5.3 Reduzierte Kosten, Schattenpreise, Opportunitätskosten	37

2.5.4	Sensitivitätsanalyse	42
2.5.4.1	Änderung von Zielfunktionskoeffizienten	43
2.5.4.2	Änderung von Ressourcenbeschränkungen	45
2.5.4.3	Zusätzliche Alternativen	46
2.6	Modifikationen des Simplex-Algorithmus	48
2.6.1	Untere und obere Schranken für Variablen	48
2.6.2	Der revidierte Simplex-Algorithmus	51
2.7	Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung	55
2.7.1	Lexikographische Ordnung von Zielen	56
2.7.2	Zieldominanz	56
2.7.3	Zielgewichtung	57
2.7.4	Berücksichtigung von Abstandsfunktionen	57
2.8	Spieltheorie und lineare Optimierung	59
	Softwarehinweise und weiterführende Literatur zu Kapitel 2	63
	Kapitel 3: Graphentheorie	65
3.1	Grundlagen	65
3.1.1	Begriffe der Graphentheorie	65
3.1.2	Speicherung von Knotenmengen und Graphen	69
3.2	Kürzeste Wege in Graphen	71
3.2.1	Baumalgorithmen	72
3.2.2	Der Tripel-Algorithmus	76
3.3	Minimale spannende Bäume und minimale 1-Bäume	77
3.3.1	Bestimmung eines minimalen spannenden Baumes	78
3.3.2	Bestimmung eines minimalen 1-Baumes	79
	Softwarehinweise und weiterführende Literatur zu Kapitel 3	79
	Kapitel 4: LP mit spezieller Struktur	81
4.1	Das klassische Transportproblem	81
4.1.1	Problemstellung und Verfahrensüberblick	81
4.1.2	Eröffnungsverfahren	83
4.1.3	Die MODI-Methode	87
4.1.4	Transportprobleme bei ganzzahligen Angebots- und Nachfragemengen	91
4.2	Das lineare Zuordnungsproblem	92
4.3	Umladeprobleme	93
	Softwarehinweise und weiterführende Literatur zu Kapitel 4	94

Kapitel 5: Netzplantechnik	96
5.1 Einführung und Definitionen	96
5.2 Struktur- und Zeitplanung mit Vorgangsknotennetzplänen	99
5.2.1 Strukturplanung	99
5.2.1.1 Grundregeln	99
5.2.1.2 Transformation von Vorgangsfolgen	100
5.2.1.3 Beispiel	101
5.2.2 Zeitplanung	102
5.2.2.1 Ermittlung frühester und spätester Zeitpunkte	103
5.2.2.2 Pufferzeiten, kritische Vorgänge und Wege	106
5.2.2.3 Zeitplanung mit linearer Optimierung	107
5.2.3 Gantt-Diagramme	109
5.3 Struktur- und Zeitplanung mit Vorgangspfeilnetzplänen	109
5.3.1 Strukturplanung	109
5.3.1.1 Grundregeln	109
5.3.1.2 Ein Beispiel	111
5.3.2 Zeitplanung	112
5.3.2.1 Ermittlung frühester und spätester Zeitpunkte	112
5.3.2.2 Pufferzeiten, kritische Vorgänge und Wege	113
5.4 Kostenplanung	114
5.5 Kapazitätsplanung	116
Softwarehinweise und weiterführende Literatur zu Kapitel 5	118
 Kapitel 6: Ganzzahlige und kombinatorische Optimierung	 120
6.1 Klassifikation und Beispiele	120
6.2 Komplexität und Lösungsprinzipien	125
6.2.1 Komplexität von Algorithmen und Optimierungsproblemen	125
6.2.2 Lösungsprinzipien	126
6.3 Grundprinzipien heuristischer Lösungsverfahren	128
6.4 Branch-and-Bound-Verfahren	132
6.4.1 Das Prinzip	132
6.4.2 Erläuterung anhand eines Beispiels	133
6.4.3 Komponenten von B&B-Verfahren	134
6.5 Knapsack-Probleme	138
6.5.1 Das binäre Knapsack-Problem	138
6.5.1.1 Lösung mittels Branch-and-Bound	138
6.5.1.2 Lösung mittels Branch-and-Cut	139

6.5.2	Das mehrfach restringierte Knapsack-Problem	140
6.6	Traveling Salesman - Probleme	142
6.6.1	Heuristiken	143
6.6.1.1	Deterministische Eröffnungsverfahren	143
6.6.1.2	Deterministische Verbesserungsverfahren	145
6.6.1.3	Ein stochastisches Verfahren	146
6.6.2	Ein Branch-and-Bound-Verfahren für TSPe in ungerichteten Graphen	148
6.6.2.1	Die Lagrange-Relaxation und Lösungsmöglichkeiten	149
6.6.2.2	Das Branch-and-Bound-Verfahren	153
	Softwarehinweise und weiterführende Literatur zu Kapitel 6.	156
	Kapitel 7: Dynamische Optimierung	157
7.1	Mit dynamischer Optimierung lösbare Probleme	157
7.1.1	Allgemeine Form von dynamischen Optimierungsproblemen	157
7.1.2	Ein Bestellmengenmodell	159
7.1.3	Klassifizierung und graphische Darstellung von DO-Modellen	160
7.2	Das Lösungsprinzip der dynamischen Optimierung	162
7.2.1	Grundlagen und Lösungsprinzip	162
7.2.2	Lösung des Bestellmengenmodells	164
7.3	Weitere deterministische, diskrete Probleme	165
7.3.1	Bestimmung kürzester Wege	165
7.3.2	Das Knapsack-Problem	166
7.3.3	Ein Problem mit unendlichen Zustands- und Entscheidungsmengen	169
7.4	Ein stochastisches, diskretes Problem	171
	Weiterführende Literatur zu Kapitel 7.	173
	Kapitel 8: Nichtlineare Optimierung	174
8.1	Probleme und Modelle der nichtlinearen Optimierung	175
8.1.1	Allgemeine Form nichtlinearer Optimierungsprobleme	175
8.1.2	Beispiele für nichtlineare Optimierungsprobleme	176
8.2	Grundlagen und Definitionen	178
8.3	Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen	183
8.3.1	Probleme mit einer Variablen	183
8.3.2	Probleme mit mehreren Variablen	185
8.4	Allgemeine restringierte Optimierungsprobleme	188
8.4.1	Charakterisierung von Maximalstellen	188
8.4.2	Überblick über Lösungsverfahren	192

8.5	Quadratische Optimierung	193
8.5.1	Quadratische Form	193
8.5.2	Der Algorithmus von Wolfe	195
8.6	Konvexe Optimierungsprobleme	198
8.6.1	Die Methode der zulässigen Richtungen bzw. des steilsten Anstiegs	198
8.6.2	Hilfsfunktionsverfahren	203
8.7	Optimierung bei zerlegbaren Funktionen	206
8.8	Anhang	208
Kapitel 9: Warteschlangentheorie		210
9.1	Einführung	210
9.2	Binomial-, Poisson- und Exponentialverteilung	211
9.3	Wartemodelle als homogene Markovketten	215
9.3.1	Homogene Markovketten	215
9.3.2	Der Ankunftsprozess	217
9.3.3	Berücksichtigung der Abfertigung	218
9.4	Weitere Wartemodelle	220
	Softwarehinweis und weiterführende Literatur zu Kapitel 9	222
Kapitel 10: Simulation		223
10.1	Grundlegende Arten der Simulation	224
10.1.1	Monte Carlo-Simulation	224
10.1.2	Diskrete Simulation	224
10.1.3	Kontinuierliche Simulation	225
10.2	Stochastischer Verlauf von Inputgrößen	225
10.2.1	Kontinuierliche Dichtefunktionen	226
10.2.2	Diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktionen	227
10.2.3	Empirische Funktionsverläufe	227
10.2.4	Signifikanztests	227
10.3	Erzeugung von Zufallszahlen	228
10.3.1	Grundsätzliche Möglichkeiten	228
10.3.2	Standardzufallszahlen	228
10.3.3	Diskret verteilte Zufallszahlen	230
10.3.4	Kontinuierlich verteilte Zufallszahlen	231

10.4 Anwendungen der Simulation	233
10.4.1 Numerische Integration	233
10.4.2 Auswertung stochastischer Netzpläne	234
10.4.3 Analyse eines stochastischen Lagerhaltungsproblems	235
10.4.4 Simulation von Warteschlangensystemen	237
10.5 Simulationssprachen	237
Weiterführende Literatur zu Kapitel 10	239
Kapitel 11: OR und Tabellenkalkulation	240
11.1 (Ganzzahlige) Lineare Optimierung	240
11.2 Kürzeste Wege in Graphen	243
11.3 Simulation eines Warteschlangenproblems	245
Weiterführende Literatur zu Kapitel 11	247
Literaturverzeichnis	248
Sachverzeichnis	261

Symbolverzeichnis

$:=$	definitionsgemäß gleich (Wertzuweisung in Verfahren)
\mathbb{B}, \mathbb{N}	Menge der binären bzw. der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n$	Menge der reellen, nichtnegativen reellen bzw. n-elementigen reellen Zahlen
\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+	Menge der ganzen bzw. nichtnegativen ganzen Zahlen
\emptyset	leere Menge
∞	unendlich; wir definieren $\infty \pm p := \infty$ für $p \in \mathbb{R}$
$i \in I$	i ist Element der Menge I
$I \subseteq J, I \subset J$	I ist Teilmenge bzw. echte Teilmenge von J
$I \cup J$	Vereinigung der Mengen I und J
$f: X \rightarrow \mathbb{R}$	Abbildung f , die jedem Element von X einen Wert aus \mathbb{R} zuordnet
$\min \{a_{ij} i = 1, \dots, m\}$	Minimum aller $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$
$ \delta , I $	Absolutbetrag von δ , Mächtigkeit der Menge I
$A = (a_{ij})$	Koeffizientenmatrix
$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$	Vektor der rechten Seiten
$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$	Vektor der Zielkoeffizienten
$c_{ij} = c(i, j) = c[i, j]$	Kosten (Länge, Zeit, etc.) auf Pfeil (i, j) bzw. auf Kante $[i, j]$
$c(w)$	Länge des Weges w
$C(G) = (c_{ij})$	Kostenmatrix des Graphen G
E	Kanten- oder Pfeilmenge
$F(\cdot)$	etwa $F(\mathbf{x})$, verwendet für Zielfunktion(-swert)
$G = [V, E]$	ungerichteter, unbewerteter Graph
$G = (V, E)$	gerichteter, unbewerteter Graph
$G = (V, E, c)$	gerichteter Graph mit Kostenbewertung c
GE, ME, ZE	Geldeinheit(en), Mengeneinheit(en), Zeiteinheit(en)
g_i	Grad des Knotens i (in ungerichteten Graphen)
m bzw. n	Anzahl der Restriktionen bzw. Variablen
M	hinreichend große Zahl für fiktive Bewertungen
$N(i)$	Menge der Nachfolger des Knotens i
$NB(i)$	Menge der Nachbarn des Knotens i
$S[1..n]$	eindimensionales Feld der Länge n
T	Baum
V	Knotenmenge
$V(i)$	Menge der Vorgänger des Knotens i
\mathbf{x}	wird vorwiegend als Vektor von Variablen x_j bzw. x_{ij} , etwa $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})$, verwendet
∇F	Gradient der Funktion F
\times	kartesisches Produkt