

Springer-Lehrbuch

Fritz Ehlotzky

Quantenmechanik und ihre Anwendungen

Mit 26 Abbildungen und 101 Übungsaufgaben

 Springer

Dr. Fritz Ehlotzky
Institut für Theoretische Physik
Universität Innsbruck
Technikerstr. 25
6020 Innsbruck, Österreich
e-mail: Fritz.Ehlotzky@uibk.ac.at

ISBN 3-540-21450-x Springer Berlin Heidelberg New York

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek.

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media

springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: F. Ehlotzky und F. Herweg EDV Beratung unter Verwendung eines Springer \LaTeX Makropakets
Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

SPIN: 10970232 56/3141/j1 - 5 4 3 2 1 0

Vorwort

Dieses Lehrbuch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, welche der Verfasser über viele Jahre für Physikstudenten in den Anfangssemestern gehalten hat. Der dargebotene Stoff umfasst jene Grundlagen und Anwendungen der Quantenmechanik, die jeder Physiker beherrschen sollte, damit er in der Lage ist, einführende Lehrveranstaltungen über Atom- und Molekülphysik, Festkörperphysik, Laserphysik, Kernphysik und Astrophysik mit Erfolg besuchen zu können, oder Bücher zu diesen Fachgebieten lesen und verstehen zu können. Studierende aus Nachbargebieten der Physik, wie der physikalischen Chemie, der Informatik und der Physik orientierten technischen Wissenschaften sollten aus diesem Buch gleichfalls Nutzen ziehen können. Es wurde daher Wert auf eine möglichst einfache und anschauliche Darstellung der quantenmechanischen Prinzipien gelegt, ohne auf komplexere Fragen, wie etwa dem tieferen Verständnis des quantenmechanischen Messprozesses, näher einzugehen. Hingegen wurde besonderer Bedacht auf die praktische Anwendbarkeit der quantenmechanischen Methoden zur Berechnung oder Abschätzung eines physikalischen Prozesses gelegt. Circa 100 Übungsaufgaben mit Lösungsweg geben dem Studierenden ausreichend Gelegenheit, sein erworbenes Wissen in der Quantenmechanik zu testen und zu vertiefen. Einige dieser Aufgaben geben auch Einblick in derzeit aktuelle Forschungsthemen. Es wird vom Leser für das Verständnis des Buches angenommen, dass er einige Vorkenntnisse auf dem Gebiet der klassischen Mechanik, Elektrodynamik und Thermodynamik besitzt und einen Kurs über mathematische Methoden der Physik besucht hat. Dennoch sind am Ende des Buches in einem Anhang einige mathematische und physikalische Ergänzungen angeführt, um dem Leser die Lektüre des Buches zu erleichtern. Ebenso ist für den ambitionierteren Leser eine knappe Liste weiterführender Bücher angegeben.

Der Autor dankt dem Springer-Verlag, insbesondere Herrn Dr. T. Schneider und Frau J. Lenz, für das Interesse an der Veröffentlichung dieses Buches und für die wertvolle Hilfe bei der Vorbereitung des Manuskriptes für die Drucklegung.

Innsbruck, im Juli 2004

Fritz Ehlötzky

Inhaltsverzeichnis

1	Historische Einleitung	1
1.1	Die Plancksche Quantenhypothese (1900)	1
1.1.1	Die Photonenhypothese Einsteins (1904)	2
1.1.2	Der Compton Effekt (1923)	3
1.2	Das Bohr-Sommerfeldsche Atommodell (1913–1916)	4
1.2.1	Die Quantisierungsbedingungen	4
1.2.2	Das Korrespondenzprinzip (1923)	6
1.3	Die Welleneigenschaften der Materie (1924–1926)	7
1.3.1	Die de Brogliesche Hypothese (1924)	7
1.3.2	Die Wellengleichung (1925–1926)	7
1.4	Die Unschärferelation und die Interpretation von ψ (1926–1927)	9
1.4.1	Die Unschärferelation (Heisenberg 1927)	9
1.4.2	Zerfließen eines Wellenpaketes (Heisenberg 1927)	11
1.4.3	Der Messprozess	12
1.4.4	Interpretation der ψ -Funktion (Max Born 1926–1927) ..	14
	Übungsaufgaben	15
2	Grundlegende Theoreme und Axiome der Quantenmechanik	19
2.1	Vorbemerkung	19
2.2	Die Schrödinger Gleichung	19
2.2.1	Grundlegende Annahmen	19
2.2.2	Erhaltung der Wahrscheinlichkeit	21
2.2.3	Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte	23
2.2.4	Erwartungswerte	23
2.2.5	Hermitesche Operatoren	25
2.2.6	Zeitliche Änderung der Erwartungswerte	25
2.2.7	Das Ehrenfestsche Theorem (1927)	26
2.2.8	Die Impuls-Wellenfunktionen	27
2.3	Die zeitunabhängige Schrödinger Gleichung	29
2.3.1	Herleitung der Gleichung	29
2.3.2	Orthogonalität der Zustandsfunktionen	29
2.3.3	Die Bedeutung des Separationsparameters E	30

2.3.4	Mathematische Eigenschaften der Energie-Eigenfunktionen	31
2.3.5	Der komplexwertige Funktionenraum	32
2.4	Grundlegende Postulate der Quantenmechanik	33
2.4.1	Formulierung der Postulate	33
2.4.2	Verträglichkeit zweier Messungen	35
2.4.3	Das Unschärfeprinzip	36
2.4.4	Das Wellenpaket minimaler Unschärfe	37
2.4.5	Interpretation der Energie-Zeit Unschärferelation	39
	Übungsaufgaben	40
3	Einige Lösungen der Schrödinger Gleichung	43
3.1	Einleitende Bemerkungen	43
3.2	Allgemeine Bedingungen	43
3.2.1	Die Zeitumkehr	43
3.2.2	Die Parität (Spiegelungssymmetrie)	44
3.3	Einfache ein- und dreidimensionale Probleme	45
3.3.1	Teilchen im Potentialkasten	45
3.3.2	Verallgemeinerung auf drei Dimensionen	47
3.3.3	Teilchenreflexion und Transmission an einer Potentialstufe	48
3.3.4	Die Eigenfunktionen des Impulsoperators	52
3.4	Der harmonische Oszillator	54
3.4.1	Die Energie Eigenwerte	55
3.4.2	Die Eigenfunktionen des Oszillators	58
3.4.3	Die Normierung der Eigenfunktionen	59
3.4.4	Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren	62
3.4.5	Quantisierung des Strahlungsfeldes	63
3.5	Die Schrödinger Gleichung im kugelsymmetrischen Potential	67
3.5.1	Voraussetzungen	67
3.5.2	Separation der Schrödinger Gleichung in Kugelkoordinaten	67
3.5.3	Die Kugelflächenfunktionen	68
3.5.4	Die Parität der Kugelflächenfunktionen	71
3.5.5	Die Drehimpulsoperatoren und ihre Eigenfunktionen	71
3.5.6	Die Unschärferelationen des Bahndrehimpulses	74
3.6	Das Wasserstoff Atom	75
3.6.1	Die Schrödinger Gleichung	75
3.6.2	Separation in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten	76
3.6.3	Lösung der radialen Schrödinger Gleichung des H-Atoms	76
3.6.4	Das asymptotische Verhalten der Lösungen	77
3.6.5	Die Energie Eigenwerte	78
3.6.6	Die Laguerreschen Polynome	80
3.6.7	Diskussion der Eigenfunktionen und Eigenwerte	81

3.6.8	Die Quantendefekt-Methode	84
	Übungsaufgaben	86
4	Quantenmechanik in Matrixgestalt (1925–1926)	91
4.1	Grundlegende Eigenschaften von Matrizen	91
4.1.1	Matrix Multiplikation und Inversion	91
4.1.2	Transformation einer quadratischen Matrix	93
4.1.3	Diagonalisierung einer Matrix	93
4.2	Darstellung von Operatoren durch Matrizen	94
4.2.1	Transformation der Darstellung eines Operators	96
4.2.2	Herleitung der Eigenfunktionen und Eigenwerte	97
4.3	Darstellungen oder „Bilder“	99
4.3.1	Die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen	99
4.3.2	Konstanten der Bewegung	101
4.3.3	Heisenberg Bild und Schrödinger Bild	101
4.3.4	Die Diracsche Bezeichnungsweise	102
	Übungsaufgaben	103
5	Algebraische Theorie des Drehimpulses	107
5.1	Eigenwerte und Eigenfunktionen des Drehimpulses	107
5.1.1	Der Bahndrehimpuls	107
5.1.2	Der Gesamtdrehimpuls	108
5.1.3	Matrixdarstellungen	112
5.2	Der Spin	114
5.2.1	Die Eigenfunktionen	114
5.2.2	Projektion des Spins	116
5.3	Die Kopplung zweier Drehimpulse	118
5.3.1	Zusammensetzung zweier Spins	119
5.3.2	Allgemeiner Fall der Kopplung zweier Drehimpulse ...	120
5.4	Das magnetische Moment der Atome	126
	Übungsaufgaben	130
6	Näherungsverfahren	133
6.1	Einleitende Übersicht	133
6.2	Zeitunabhängige Störungstheorie	134
6.2.1	Der nicht-entartete Fall	134
6.2.2	Der entartete Fall	138
6.3	Die Spin-Bahn Wechselwirkung	140
6.4	Der Zeeman Effekt	144
6.4.1	Der normale Zeeman Effekt	144
6.4.2	Der anomale Zeeman Effekt	146
6.5	Die Variationsmethode	147
6.5.1	Ein elementares Beispiel	148
6.6	Die zeitabhängige Störungstheorie	149
6.6.1	Einleitende Bemerkungen	149

6.6.2	Übergangswahrscheinlichkeiten	150
6.6.3	Anregung eines Atoms durch ein α -Teilchen	153
6.6.4	Übergänge in ein Kontinuum von Zuständen	156
6.6.5	Übergänge durch eine zeitlich periodische Störung	160
6.6.6	Übergänge infolge einer zeitunabhängigen Störung	164
6.7	Spinpräzession und magnetische Resonanz	166
	Übungsaufgaben	171
7	Wechselwirkung von Strahlung und Materie	177
7.1	Einleitung	177
7.2	Einstein's Theorie der Emission und Absorption (1917)	178
7.3	Berechnung der A und B Koeffizienten	180
7.3.1	Elementare Theorie der Absorption	180
7.3.2	Spontane Emission nach Dirac (1927)	184
7.4	Dipol-Auswahlregeln	189
	Übungsaufgaben	192
8	Systeme mehrerer Teilchen	195
8.1	Vorbemerkungen	195
8.2	Die Schrödinger Gleichung eines Teilchensystems	195
8.2.1	Systeme unabhängiger Teilchen	197
8.2.2	Das Zwei-Teilchen Problem	199
8.3	Systeme identischer Teilchen	203
8.3.1	Die Austauschsymmetrie	203
8.3.2	Symmetrische und antisymmetrische Zustandsfunktionen	205
8.4	Das Zwei-Elektronen Problem	209
8.4.1	Das Heliumatom	210
8.4.2	Die homopolare Molekülbindung	218
8.5	Die spektroskopische Notation	220
	Übungsaufgaben	221
9	Streuprozesse	223
9.1	Historisches	223
9.2	Die klassische Streutheorie	223
9.2.1	Der Streuquerschnitt	223
9.2.2	Lord Rutherford's Streuformel (1911)	225
9.3	Quantentheorie der Streuprozesse	227
9.3.1	Die stationäre Quantentheorie der Streuung	227
9.3.2	Schwerpunkts- und Laborkoordinaten	230
9.3.3	Die Coulomb-Streuung (N.F. Mott 1928)	234
9.4	Die Bornsche Störungsreihe	238
9.4.1	Anwendungsbereich	239
9.4.2	Die Integralgleichung der Streutheorie	240
9.4.3	Die erste Bornsche Näherung	243

9.4.4	Gültigkeitsbereich der Bornschen Näherung	245
9.5	Die Methode der Partialwellen	247
9.5.1	Herleitung der Streuamplitude	247
9.5.2	Physikalische Interpretation	253
9.5.3	Der Streuquerschnitt	253
9.5.4	Streuresonanzen	255
9.5.5	Das optische Theorem	256
9.5.6	Partialwellenzerlegung und Bornsche Näherung	256
9.6	Streuung zwischen identischen Teilchen (N.F. Mott und J. Chadwick 1930)	258
9.6.1	Streuung von α -Teilchen	259
9.6.2	Streuung von Protonen	261
	Übungsaufgaben	262
10	Quantenstatistik	267
10.1	Einleitung	267
10.2	Die Dichtematrix	268
10.3	Energie und Entropie	271
10.4	Quantenstatistik entarteter Systeme	273
10.4.1	Die Fermi-Dirac Statistik	274
10.4.2	Die Bose-Einstein Statistik	277
	Übungsaufgaben	279
A	Mathematische und physikalische Ergänzungen	281
A.1	Vektoranalysis	281
A.2	Lineare Operatoren und orthogonale Funktionen	284
A.2.1	Lineare Operatoren	284
A.2.2	Das Sturm-Liouville Problem	285
A.2.3	Singularitäten des Sturm-Liouvilleschen Problems	287
A.2.4	Fourier-Reihen und Fourier-Integral	288
A.3	Andere orthogonale Funktionensysteme	291
A.3.1	Hermiteische Polynome und Funktionen	291
A.3.2	Zugeordnete Laguerre Polynome	291
A.3.3	Legendre Polynome	292
A.3.4	Die Kugelflächenfunktionen	294
A.3.5	Bessel-Funktionen	294
A.4	Die Greensche Funktion	296
A.5	Matrixalgebra	297
A.5.1	Vektoren im n-dimensionalen Raum	297
A.5.2	Lineare Transformationen	298
A.5.3	Matrixdarstellungen	299
A.5.4	Rechenregeln und Matrixtypen	300
A.5.5	Abschließende Bemerkungen	301
A.6	Zur Mechanik und Elektrodynamik	302
A.6.1	Die klassischen Bewegungsgleichungen	302

XII Inhaltsverzeichnis

A.6.2	Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld	304
A.6.3	Die Dipolnäherung	306
A.6.4	Die Poissonschen Klammern	306
A.6.5	Zur statistischen Mechanik	307
B	Physikalische Konstanten – Umrechnungsfaktoren	309
	Ergänzende und weiterführende Literatur	311
	Sachverzeichnis	313