Stephan Rosebrock

Geometrische Gruppentheorie

Aus dem Programm Mathematik

Lineare Algebra
von A. Beutelspacher

Algebra für Einsteiger
von J. Bewersdorff

Zahlentheorie für Einsteiger
von A. Bartholomé, J. Rung und H. Kern

Leitfaden Arithmetik
von H.-J. Gorski und S. Müller-Philipp

Leitfaden Geometrie
von S. Müller-Philipp und H.-J. Gorski

Analytische Geometrie
von G. Fischer

Elementare Geometrie und Algebra
von H.-W. Henn

Geometrie
von H. Knörrer

Projektive Geometrie
von A. Beutelspacher und U. Rosenbaum

Fraktale Geometrie – Eine Einführung
von H. Zeitler und D. Pagon

Stephan Rosebrock

Geometrische Gruppentheorie

Ein Einstieg mit dem Computer. Basiswissen für Studium und Mathematikunterricht

vieweg

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Dr. Stephan Rosebrock
Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Institut für Mathematik und Informatik
Bismarckstraße 10
76133 Karlsruhe

E-Mail: rosebrock@PH-karlsruhe.de

1. Auflage Mai 2004

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.vieweg.de

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN 978-3-528-03212-8 ISBN 978-3-322-99649-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-99649-7

Gewidmet Felix und Saskia

Vorwort

Symmetrie ist überall. Blüten, Kristalle, viele Naturphänomene und Artefakte erscheinen uns schön, gerade in ihrer symmetrischen Erscheinung. Man mag sich an dieser Schönheit erfreuen und es bei der Bewunderung dafür bewenden lassen. Hier wird ein systematisierender Zugang zur Symmetrie vorgeschlagen: Sie soll so weit und so allgemein wie möglich mathematisch verstehbar gemacht werden.
Im engeren Sinn geht es im vorliegenden Buch um Gruppentheorie. Man kann Gruppen als algebraische Objekte auffassen, die die Symmetrie von geometrischen Objekten beschreiben. Das wird hauptsächlich der im Folgenden eingenommene Blickwinkel sein und somit ist dieses Buch auch ein Buch über Geometrie. Gruppen beschreiben Symmetriephänomene algebraisch – man rechnet mit Spiegelungen, Drehungen, usw., allgemein mit Abbildungen von Räumen auf sich.

In der Gruppentheorie lassen sich Definitionen und Sätze oft sehr knapp formulieren. Der Aufbau der Gruppentheorie ist klar und logisch, und so wurde sie auch vor nicht allzu langer Zeit in der Regel gelehrt: Viele Definitionen und Sätze mit Beispielen versehen. Dieser abstrakte Aufbau der Gruppentheorie ist aber weder genetisch fundiert noch ist es der strukturell einfachste. Jedes Lernen von neuem mathematischen Stoff, sei es bei Kindern oder bei Erwachsenen, muss an Vorwissen anknüpfen – bekanntlich heißt Lernen, Neues in Bekanntes sinnvoll zu integrieren bzw. Wissensstrukturen dann neu zu organisieren, wenn die Lerngegenstände es erfordern. Für die Gruppentheorie eignet sich die Geometrie als Anschauungsfeld in hervorragender Weise. Spiegelungen und manchmal auch Drehungen sind bekannt, sie sind bereits Stoff in der Grundschule und jedem Studierenden vertraut. Viele Bücher nehmen dagegen ein Großteil ihres Beispielmaterials aus dem Bereich der Matrixgruppen. Matrizen sind Thema in den ersten beiden Semestern eines Mathematikstudiums, doch oft ist der Begriff der Matrix und der linearen Abbildung bei Anfängern im Bereich Gruppentheorie noch nicht so gefestigt, dass Matrixgruppen als Beispiele anschaulich werden können. Matrixgruppen finden sich daher im vorliegenden Band erst im Anhang. Erst dort werden Kenntnisse der linearen Algebra vorausgesetzt.
Hinzu kommen zwei weitere Schwierigkeiten für den Gruppentheorieanfänger: Im schulischen Mathematikunterricht werden die Schüler/innen im Allgemeinen 13 Jahre lang ausschließlich mit abelschen Operationen konfrontiert – das obwohl man sogar in einer 5. Hauptschulklasse und in der Grundschule meiner Erfahrung

nach so sinnvoll wie erfolgreich Anfänge von Gruppentheorie betreiben kann. Anfängerstudierenden ist also in der Regel das nicht-abelsche Denken aufgrund ihrer Schulkarriere fern und fällt ihnen entsprechend schwer. Zudem arbeitet man in der Schule und am Anfang des Studiums in der Mathematik mit konkreten Objekten (Zahlen, Funktionen, Matrizen,...), Lernende müssen meist etwas ausrechnen. In der Gruppentheorie wird dagegen axiomatisch vorgegangen: "Stell' dir eine Menge vor, die das und das erfüllt". Dieses Vorgehen stellt bei der gegenwärtigen Sozialisation in mathematisches Denken höhere Ansprüche an die Abstraktionsfähigkeit. Nun hat die Geometrie in der Gruppentheorie aber nicht nur hohen didaktischen Wert; auch moderne Entwicklungen in der Gruppentheorie zeigen in diese Richtung. Der Satz von Švarc-Milnor, die hyperbolischen Gruppen von Gromov, usw. deuten Gruppen über ihre Operationen auf geometrischen Räumen; mehr noch: Die Gruppen selbst werden (über ihre Cayley-Graphen) zum geometrischen Objekt. Das ist eine fundamental andere Sicht von Gruppen, die sich seit den letzten 15 Jahren langsam durchsetzt und ihrerseits an Arbeiten von Max Dehn und anderen vom Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts anknüpft. Grundideen sind bereits im sogenannten "Erlanger Programm" von Felix Klein aus dem Jahr 1872 zu finden, in dem er vorschlägt, Gruppen zur Klassifikation von Geometrien zu verwenden (siehe Abschnitt 8.1). Diese "neue" Sicht von Gruppentheorie ist in der Literatur bisher fast nur in neueren Forschungsaufsätzen zu finden.

Diese Entwicklungen im Bereich der Theorie und grundsätzliche mathematikdidaktische Methodenreflexionen haben mich zu dem vorliegenden Band angeregt. Erstens sollte eine leicht verständliche Einführung für alle, die Gruppentheorie lernen wollen, entstehen. Er enthält deshalb die wesentlichen Grundlagen, die man zum Basiswissen Gruppentheorie rechnen kann, ohne viel mehr vorauszusetzen als die elementare Geometrie der Sekundarstufe I und Grundkenntnisse über Funktionen (injektiv, surjektiv, bijektiv). Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Deutung einer Gruppe als Menge von Abbildungen, die auf einem Raum operieren, ohne jedoch den allgemeinen Fall einer abstrakt gegebenen Gruppe außer Acht zu lassen. Zum zweiten soll das Buch in die modernen mathematischen Entwicklungen der Gruppentheorie einführen. Auch hier wird möglichst elementar vorgegangen. Es ist freilich nicht zu vermeiden, dass der Text in den hinteren Kapiteln schwieriger zu lesen ist als im vorderen Teil. Trotzdem sind einige zentrale mathematische Inhalte soweit elementarisierbar, dass sie sich nahtlos an die ersten Kapitel anschließen lassen. Drittens lernt man in diesem Buch einiges über Geometrie. Die Struktur der euklidischen und hyperbolischen Ebene ebenso wie die der 2-Sphäre wird durch ihre Isometrien untersucht. Es ergibt sich ein tieferes Verständnis der Symmetrieeigenschaften bekannter Räume, wie zum Beispiel der regulären Polyeder. Schließlich werden viele Beispiele mit dem frei erhältlichen Gruppentheorieprogramm GAP umgesetzt. Gruppen sind für viele Anfänger etwas so Abstraktes, dass ihnen jede Konkretisierung weiterhelfen kann. GAP ebenso wie die geometrische Veranschaulichung leisten das. Es ist mit der fortschreitenden Computertechnik für mathematisch Interessierte sicherlich sinnvoll, den Umgang mit einem Algebraprogramm zu

lernen - das geschieht beim Lesen des Textes gewissermaßen nebenbei.
Das Buch wendet sich an Diplom- und Lehramtsstudierende der Mathematik und Naturwissenschaften, die zum ersten Mal mit Gruppentheorie in Berührung kommen. Ebenso ist es aber für Studierende und Wissenschaftler gedacht, die sich in die modernen geometrischen Aspekte der Gruppentheorie hineinlesen wollen.

Im ersten Kapitel wird die Geometrie behandelt, soweit sie für die weiteren Kapitel notwendig ist. Es geht um Isometrien und ihre Notation, Permutationen sowie die Hintereinanderausführung von Isometrien. Im zweiten und dritten Kapitel werden die Grundlagen der Gruppentheorie so geometrisch wie möglich gelegt. Insbesondere dieser Teil ist dabei so geschrieben, dass man sich auch im Selbststudium, ohne begleitende Vorlesung, den Stoff aneignen kann.
Im vierten Kapitel werden bei der Einführung der symmetrischen und alternierenden Gruppe erstmals Permutationen abstrakt, ohne Bezug zur Geometrie, betrachtet. Hier wird formalisiert, was in Kapitel 2 und 3 schon geometrisch gemacht wurde: Gruppen operieren auf Mengen. Im Abschnitt 4.5 wird an einem Beispiel der Satz von Švarc-Milnor erläutert. Eine präzise Formulierung dieses Satzes findet sich in Kapitel 9. Hier, wie an vielen anderen Stellen, wird ein methodisches Konzept des Buchs deutlich: Die Ideen, die hinter den betreffenden Sachverhalten stehen, werden anhand von Beispielen vor der präzisen mathematischen Formulierung dargestellt. In Kapitel 5 wird die Darstellung einer Gruppe durch Erzeugende und Relationen behandelt. In engem Zusammenhang damit stehen die von Max Dehn am Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts formulierten Entscheidungsfragen.
Im darauffolgenden sechsten Kapitel werden Produkte von Gruppen thematisiert. Präsentationen von direkten, freien und semidirekten Produkten von Gruppen werden entwickelt. Das Kapitel endet mit einer Übersicht über die Translationsuntergruppen diskontinuierlicher Gruppen der Ebene.
Kapitel 7 behandelt endliche Gruppen. Die klassischen Sylowsätze werden, der Idee des Buches folgend, über Operationen von Gruppen bewiesen. In Abschnitt 7.5 werden die regulären Zerlegungen der 2-Sphäre systematisch analysiert.
Kapitel 8 widmet sich der hyperbolischen Geometrie und den Gruppen, die auf der hyperbolischen Ebene operieren. Knapp wird der axiomatische Ansatz der Geometrie behandelt um dann einige intuitive geometrische Vorstellungen von hyperbolischer Geometrie bei den Leser/innen zu erzeugen. Abschließend werden Zerlegungen der hyperbolischen Ebene betrachtet und Präsentationen ihrer Symmetriegruppen angegeben.
In Kapitel 9 werden die aus dem vorigen Kapitel gewonnenen Vorstellungen und Erkenntnisse auf den Cayley-Graph einer Gruppe angewendet und ausgebaut. Hier wird die Idee der quasi-Isometrie und der hyperbolischen Gruppen erläutert und einer der wesentlichen Sätze aus der Theorie der hyperbolischen Gruppen bewiesen, nämlich die Existenz einer linearen isoperimetrischen Ungleichung für hyperbolische Gruppen. Am Ende des Buches können nicht mehr alle Hilfsmittel bewiesen werden; das würde den Rahmen des Projekts sprengen. Es werden aber die jeweils leitenden Ideen und Methoden deutlich gemacht.

Im Anschluss an die meisten Abschnitte finden sich Übungsaufgaben. Dort wird dazu angeregt, die gewonnenen Erkenntnisse durch aktives Umsetzen zu vertiefen. Lösungshinweise, manchmal auch die ganzen Lösungen, sind im Anhang aufgeführt. Natürlich verderben sich die Leserinnen und Leser die Chance auf Selbstevaluation, wenn sie hinten nachschauen, ohne die Aufgaben zunächst eigenständig anzugehen! Im Internet steht unter `www.ph-karlsruhe.de/~rosebrock/grpth` Material aus dem hier diskutierten Zusammenhang zur Verfügung. Es findet sich dort der GAP-Quellcode, thematisch einschlägige Aufsätze und weiteres Übungsmaterial. Falls ich Fehler finden sollte, werde ich die Verbesserungen dort beschreiben. Wenn Sie Fehler, Defizite oder Verbesserungsvorschläge anmerken können, bitte ich um Nachricht unter `rosebrock@ph-karlsruhe.de`

Abschließend ist es mir ein Bedürfnis, mehreren Leuten meinen Dank auszusprechen. Als erstes ist hier sicher Frau Dr. Cynthia Hog-Angeloni zu nennen. Ohne ihre Hilfe wäre es mir nicht möglich gewesen, das nun vorliegende Buch zu verwirklichen. Sie hat mich von Anfang bei meinem Vorhaben begleitet. Frau Hog-Angeloni hat für jedes der Kapitel mit mir die Thematik, ihre Konzeptualisierung und Methodisierung diskutiert und im Anschluss so manchen Fehler gefunden. Ihr danke ich besonders nachdrücklich. Frau Anna Rogge hat die ersten drei Kapitel gelesen und sich dabei in ein ihr fremdes Gebiet eingearbeitet. Sie hat mich auf viele Stellen hingewiesen, die dank ihrer Hilfe lesbarer gemacht werden konnten. Ich danke außerdem Ulrike Krell für die Erstellung der Abbildungen 7.3 und 8.10, Hanno Rehn für Abbildung 8.9 und Saskia Rosebrock für die Mithilfe bei der Nachbearbeitung der Abbildungen, Prof. Dr. Wolfgang Metzler, Stephanie Ginaidi und Holger Blasum für inhaltliche Anregungen, Prof. Dr. Cornelia Rosebrock für sprachliche Korrekturen und schließlich meiner Familie Saskia, Felix und Petra Rosebrock dafür, dass ich die Zeit bekam, dieses Buch zu schreiben.

Friedrichstal, 21. März 2004 Stephan Rosebrock

Inhaltsverzeichnis