Halbringe

Algebraische Theorie und Anwendungen in der Informatik

Von Prof. Dr. rer. nat. Udo Hebisch
Bergakademie Freiberg

und Prof. Dr. phil. et rer. nat. habil. Hanns Joachim Weinert
Technische Universität Clausthal

B. G. Teubner Stuttgart 1993

Prof. Dr. rer. nat. Udo Hebisch

Geboren 1954 in Welver/Soest. Studium der Mathematik und Informatik ab 1974 in Clausthal, Diplom 1979, Promotion 1984, Habilitation 1990. Von 1979 bis 1993 Assistent bzw. Oberassistent an der TU Clausthal. Seit 1993 Professor an der Bergakademie Freiberg.

Prof. Dr. phil. et rer. nat. habil. Hanns Joachim Weinert

Geboren 1927 in Leipzig. Studium der Mathematik, Physik und Philosophie ab 1946 in Leipzig, Diplom 1951, Promotion 1952, Habilitation 1963. Professuren an der Pädagogischen Hochschule Potsdam, der University of Florida in Gainesville, der Universität Mainz, der Universidad de los Andes in Bogotá/Kolumbien und der Technischen Universität Clausthal.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Hebisch, Udo:
Halbringe : algebraische Theorie und Anwendungen
in der Informatik / von Udo Hebisch und Hanns Joachim Weinert. –
Stuttgart : Teubner, 1993
(Teubner-Studienbücher : Mathematik)
ISBN 978-3-519-02091-2 ISBN 978-3-322-94682-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-94682-9
NE: Weinert, Hanns Joachim:

Gesamtherstellung: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstraße
Einband: Tabea u. Martin Koch, Ostfildern/Stuttgart

Vorwort

Der Begriff des Halbringes entsteht aus dem des Ringes, indem man auf die Gruppeneigenschaft (und seltener auch auf die Kommutativität) der Addition verzichtet. So bilden die natürlichen Zahlen einen Halbring, die sicherlich älteste algebraische Struktur, in der Menschen gerechnet haben. Zahlreiche Arbeiten über Halbringe sind seit etwa 50 Jahren erschienen. Anlaß dazu war, jedenfalls teilweise, das Auftreten von Halbringen als Positivbereiche partiell geordneter Ringe und Körper, bei topologischen Fragestellungen, und nicht zuletzt beim Aufbau der Arithmetik im Zusammenhang mit entsprechenden Fragen des Schulunterrichts. Besonderes Interesse verdienen Halbringe dadurch, daß sie unterdessen in wachsendem Maße, oft ohne Bezug auf die bereits vorhandene Literatur, als Hilfsmittel in verschiedenen Gebieten der Informatik verwendet werden.

In dieser Situation möchten wir eine Einführung in die algebraische Theorie der Halbringe vorlegen, in der auch einige Anwendungen in der Theoretischen Informatik ausführlich behandelt werden. Dabei haben wir uns inhaltlich weitgehend auf die allgemeinen Grundlagen einer algebraischen Halbringtheorie und auf solche Teilgebiete dieser Theorie beschränkt, die für die eben genannten Anwendungen benötigt werden. Weiterhin legen wir hier, wie ja auch bei der Behandlung von Ringen üblich, einen Halbringbegriff zugrunde, der die Kommutativität der Addition einschließt (vgl. Definition 2.1 im ersten Kapitel). Damit haben wir die gelegentlich in der Literatur auch auftretenden Halbringe mit nichtkommutativer Addition ausgeklammert, deren Untersuchung zwar für sich reizvoll, darüber hinaus jedoch von weit geringerem Interesse ist und oft erheblich mehr Aufwand erfordert. Übrigens gelten viele Resultate über Halbringe nur, wenn man die Kommutativität der Addition oder wenigstens eine Abschwächung dieser Kommutativität voraussetzt.

Als Leser dieses Buches stellen wir uns einerseits Studenten der Mathematik oder Informatik mittlerer Semester vor, die sich im Zusammenhang mit entsprechenden Lehrveranstaltungen oder im Selbststudium in die algebraische Theorie der Halbringe und in die genannten Anwendungen einarbeiten möchten. Aus diesem Grunde haben wir uns um eine übersichtliche Gliederung bemüht und zahlreiche Erläuterungen, Hinweise und Querverweise gegeben. Auch sind alle Beweise, von einigen einfachen und naheliegenden Folgerungen abgesehen, vollständig und meist sehr ausführlich angegeben.

Trotz dieser Ausführlichkeit hoffen wir, daß sich andererseits auch der fortgeschrittene Mathematiker oder Informatiker mit geringem Zeitaufwand über die hier dargestellten Gebiete und Anwendungen der Halbringtheorie informieren kann. An ihn haben wir insbesondere bei der Auswahl der relativ umfangreichen Literaturangaben gedacht, wobei uns die Korrespondenz mit Herrn Professor Dr. K. Głazek und seine Literaturzusammenstellung [Gla85] eine große Hilfe war.

Im Hinblick auf den zuerst genannten Leserkreis wurden auch die verwendeten Hilfsmittel aus anderen mathematischen Gebieten weitgehend in unsere Darstellung einbezogen. So setzen wir zwar einige elementare Begriffsbildungen und Bezeichnungen der Mengenlehre als bekannt voraus, erläutern sie aber meist bei ihrem ersten Auftreten. Die von uns benötigten Begriffe und Aussagen über Relationen, partiell und linear geordnete Mengen und Verbände stellen wir in Paragraph 6 von Kapitel I zusammen. Lediglich für das Rechnen mit Kardinalzahlen verweisen wir auf entsprechende Lehrbücher. Ebenso haben wir die jeweils verwendeten Begriffsbildungen und Aussagen über Halbgruppen in unsere Darstellung aufgenommen, teils in Form gesonderter Paragraphen, teils im laufenden Text oder in einigen Aufgaben. Ähnliches gilt für die Aussagen über Ringe und Körper, die den hier behandelten über Halbringe entsprechen oder Spezialfälle ihrer hier untersuchten Verallgemeinerungen sind. Insbesondere haben wir, soweit sich die jeweiligen Anwendungen auf Ringe nicht von selbst verstehen oder uns als Analogien oder Verschärfungen erwähnenswert erschienen, den Ringfall in unsere Formulierungen und Beweise mit aufgenommen.

Für eine Orientierung über die behandelten Gegenstände verweisen wir auf das Inhaltsverzeichnis und die Übersichten, die jedem der fünf Kapitel vorangestellt sind.

An dieser Stelle möchten wir ganz besonders Frau Edith Weber-Hebisch für die sorgfältige und zügige Erstellung der Druckvorlage zu diesem Buch danken. Ebenso gilt unser Dank den Mitarbeitern des Verlages B. G. Teubner für ihr verständnisvolles Entgegenkommen bei der Entstehung unseres Buches und seine Aufnahme in die Studienbuchreihe.

Clausthal, im August 1993 U. Hebisch, H. J. Weinert

Inhaltsverzeichnis

Hinweise für den Leser

Entsprechend dem Inhaltsverzeichnis gliedern wir unseren Stoff in Kapitel und Paragraphen, mit deren Numerierung wir in jedem Kapitel gemäß I.1, I.2,...,II.1,... neu beginnen. Innerhalb eines Paragraphen werden alle Definitionen, Sätze, Beispiele, Bemerkungen etc. fortlaufend z. B. gemäß Definition 3.1, Beispiel 3.2,... durchnumeriert. Innerhalb des gleichen Kapitels zitieren wir dann ohne Kapitelangabe, und sonst unter Einschluß der Kapitelnummer, also z. B. Definition I.3.1. Entsprechend verfahren wir mit wiederholt gebrauchten Formeln und den Aufgaben. Das Ende eines Beweises kennzeichnen wir durch das Zeichen ■. Die zahlreichen Aufgaben dienen zur Übung und Verständniskontrolle und sind größtenteils leicht zu lösen. Sie enthalten aber auch Ergänzungen zum laufenden Text, Beispiele und Gegenbeispiele sowie mitunter (stets kursiv hervorgehobene) weitere Begriffsbildungen. Für eine Auswahl von (meist etwas schwierigeren) Aufgaben haben wir die Lösungen am Ende dieses Buches zusammengestellt.