Andreas Meister

Numerik linearer Gleichungssysteme

Aus dem Programm
Mathematik

Lineare Algebra mit Mathematica und Maple
von W. Strampp

Lineare Algebra
von G. Fischer

Übungsbuch zur linearen Algebra
von H. Stoppel und B. Griese

Lineare Algebra
von A. Beutelspacher

Analysis, 3 Bände
von O. Forster

Einführung in die Analysis
von Th. Sonar

Numerische Mathematik für Anfänger
von G. Opfer

Übungsbuch zur Numerischen Mathematik
von J. Herzberger

Numerische Methoden in der Technik
von R. Mohr

vieweg

Andreas Meister

Numerik linearer Gleichungssysteme

Eine Einführung in moderne Verfahren

vieweg

Dr. Andreas Meister
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hamburg
Bundesstr. 55
20146 Hamburg

meister@math.uni-hamburg.de

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Bertelsmann Fachinformation GmbH.

http://www.vieweg.de

Konzeption und Layout des Umschlags: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-03135-0 ISBN 978-3-322-93899-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-93899-2

Für Christel

Vorwort

Im Rahmen der Numerik linearer Gleichungssysteme befassen wir uns mit der effizienten Lösung großer, linearer Systeme, wodurch ein wichtiges Teilgebiet der Numerischen Linearen Algebra betrachtet wird, das in den letzten Jahren immer größere Bedeutung gewonnen hat.

Der in den vergangenen zwei Dekaden vollzogene drastische Anstieg der Leistungsfähigkeit von Personal Computern, Workstations und Großrechneranlagen hat zu einer weitverbreiteten Entwicklung numerischer Verfahren zur Simulation praxisrelevanter Problemstellungen in der Medizin, der Physik, den Ingenieurwissenschaften und vielen weiteren Bereichen geführt. Neben der Methode der Finiten Elemente, die inhärent auf ein lineares Gleichungssystem führt, benötigen auch die häufig verwendeten Finite-Differenzen- und Finite-Volumen-Verfahren in Kombination mit einem impliziten Zeitschrittverfahren einen Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme. So ist es nicht verwunderlich, daß die Forschungsaktivitäten auf dem Gebiet der Gleichungssystemlöser einen deutlichen Aufschwung erfahren und zur Entwicklung einer Vielzahl effizienter Verfahren geführt haben.

Das vorliegende Buch basiert auf den Inhalten einer vom Autor am Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg gehaltenen vierstündigen Vorlesung, die sich im Kontext der erwähnten Entwicklungen mit der Herleitung und Analyse klassischer sowie moderner Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme befaßte.

Aufgrund der, in diesem Gebiet vorliegenden Vielzahl unterschiedlicher direkter und iterativer Verfahren ist es innerhalb einer vierstündigen Vorlesung sicherlich nicht möglich alle existierenden Algorithmen vorzustellen. Ziel dieses Manuskriptes ist es daher, dem interessierten Leser einen Überblick über weite Bereiche dieses Gebietes zu vermitteln, die für praktische Anwendungen wichtigen Methoden zu diskutieren, verwandte Algorithmen durch Bemerkungen und Literaturhinweise zu integrieren und die Erarbeitung weiterer Verfahren zu erleichtern.

Die vorausgesetzten Grundkenntnisse beschränken sich hierbei gezielt auf übliche Inhalte der Analysis und linearen Algebra mathematischer Vorlesungen in den ersten zwei Semestern eines Hochschulfaches, da die beschriebenen Methoden weit über die Grenzen eines Mathematikstudiums von großem Interesse sind. Zur Unterstützung eines Selbststudiums werden zudem alle benötigten Grundlagen in einem eigenständigen Kapitel bereitgestellt.

Nachdem das Auftreten linearer Gleichungssysteme im ersten Kapitel anhand einiger Modellbeispiele beschrieben wird, stellen wir im zweiten Kapitel die für die folgenden Methoden benötigten Grundlagen der linearen Algebra zur Verfügung. Das dritte Kapitel widmet sich den direkten Verfahren, die häufig in modernen Gleichungssystemlösern involviert sind oder teilweise in unvollständigen Versionen als Vorkonditionierer verwendet werden. Der Schwerpunkt liegt auf der Beschreibung iterativer Verfahren, die im anschließenden vierten Kapitel vorgestellt werden. Hierbei wird stets besonderen Wert auf eine Motivation sowie eine übersichtliche, einheitliche und mathematisch abgesicherte Herleitung der iterativen Gleichungssystemlöser gelegt. Neben den Splitting-Methoden, wie zum Beispiel dem Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren, der Richardson-Iteration und den Relaxationsverfahren, beschreiben wir zunächst die Zweigittermethode und anschließend das Mehrgitterverfahren sowie dessen vollständige Variante. Die Herleitung des CG-Verfahrens nehmen wir durch eine Kombination der zuvor beschriebenen Verfahren des steilsten Abstiegs und der konjugierten Richtungen vor. Desweiteren betrachten wir vom GMRES-Verfahren über die BiCG-Methode bis zum QMRCGSTAB-Verfahren eine große Bandbreite moderner Krylov-Unterraum-Methoden, die zur Lösung von Gleichungssystemen mit einer unsymmetrischen und indefiniten Matrix geeignet sind. Das abschließende fünfte Kapitel ist einer ausführlichen Beschreibung und Untersuchung möglicher Präkonditionierungstechniken gewidmet, da die dargestellten Verfahren bei praxisrelevanten Problemstellungen in der Regel erst in Kombination mit einem geeigneten Vorkonditionierer eine stabile und effiziente Gesamtmethode liefert.

Die präsentierten Methoden finden ihre Anwendung in unterschiedlichsten numerischen Verfahren, die in verschiedensten Programmiersprachen entwickelt wurden. Daher wurde gezielt eine Darstellung der Algorithmen gewählt, die eine Umsetzung in ein beliebiges Computer Programm ermöglichen, weshalb die Verwendung einer expliziten Programmiersprache vermieden wurde. Viele der präsentierten Verfahren sind bereits in Softwarepaketen wie zum Beispiel LAPACK [3], LINSOL [70], Matlab [1] und Templates [7] verfügbar.

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Frau Monika Jampert, die weite Teile meines handschriftlichen Manuskriptes in ein LaTeX-Skript verwandelt hat und bei Dipl. Math. Dirk Nitschke für seine Unterstützung bei allen LaTeX-Fragen. Zudem gilt mein Dank Dr. Christoph Bäsler, Dipl. Math. Michael Breuss, Martin Ludwig, Christian Nagel, Dipl. Math. Stefanie Schmidt und Dipl. Math. Christof Vömel für das intensive Korrekturlesen und die vielen konstruktiven Hinweise und Bemerkungen, die sich in vielen Bereichen positiv ausgewirkt haben. Besonders bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Prof. Dr. Thomas Sonar, der durch seine ermutigende Unterstützung und jahrelange fachliche Begleitung wesentlich zur Entstehung dieses Buches beigetragen hat.

Hamburg, im September 1999 ANDREAS MEISTER

Inhaltsverzeichnis