Jürgen Tietze

**Einführung in die
Finanzmathematik**

Aus dem Programm

Mathematik

Lineare Algebra

von A. Beutelspacher

Lineare Algebra

von G. Fischer

Analysis 3 Bände

von O. Forster

Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

von K. Bosch

Elementare Einführung in die Angewandte Statistik

von K. Bosch

Numerische Mathematik für Anfänger

von G. Opfer

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler 1–3

von F. Pfuff

Statistische Datenanalyse

von W. A. Stahel

Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik

von J. Tietze

Einführung in die Finanzmathematik

von J. Tietze

Methoden und Modelle des Operations Research

von H.-J. Zimmermann

Vieweg

Jürgen Tietze

Einführung in die Finanzmathematik

Mit über 500 Übungsaufgaben

Prof. Dr. Jürgen Tietze
Fachbereich Wirtschaft der
Fachhochschule Aachen
Eupener Str. 70, 52066 Aachen

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1996

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Bertelsmann Fachinformation GmbH.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-06552-2

ISBN 978-3-322-91952-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-91952-6

Vorwort

Die Finanzmathematik stellt das quantitative Instrumentarium bereit für die Bewertung zukünftiger oder vergangener Zahlungsströme und eignet sich daher vor allem für die vielfältigen Probleme des Bank- und Kreditwesens. Finanzmathematische Methoden sind unverzichtbare Hilfsmittel für weite Bereiche von Investition, Finanzierung, Wirtschaftlichkeitsrechnung und Optimalplanung. Wichtige Anwendungsmöglichkeiten der Finanzmathematik liegen in verwandten Gebieten wie etwa Steuern, Versicherungswesen, Volkswirtschaftslehre oder Rechnungswesen.

Das vorliegende Lehrbuch - entstanden auf der Grundlage des gleichlautenden Kapitels im Buch „Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik“ und als dessen konsequente Ergänzung - umfaßt neben den klassischen Verfahren der Finanzmathematik wie Zins-/Renten-/Tilgungs-/Kurs- und Investitionsrechnung schwerpunktmäßig die - immer wieder lebhaft diskutierten - verschiedenen in der Praxis vorkommenden Effektivzinsberechnungsverfahren und leitet daraus wesentliche Aspekte zur „richtigen“ Verzinsung von Kapital ab. Das einleitende Kapitel über die Prozentrechnung trägt vielen leidvollen Erfahrungen Rechnung, die der Autor als Lehrender oder Prüfer machen mußte: Die Prozentrechnung enthält offenbar selbst für wachsame Studenten ungeahnte Tücken, ganz zu schweigen von dem, was man tagtäglich andernorts mit den „Prozenten“ anrichtet (vgl. Seite 1) ...

Ich habe mich bemüht, die in der „Wirtschaftsmathematik“ bewährte - auf Verständnis abzielende - breite und ausführliche Darstellungsweise beizubehalten. Die behandelten klassischen Verfahren der Finanzmathematik werden konsequent auf das übergeordnete Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik ausgerichtet, die Fülle der Detailprobleme wird so unter einem einheitlichen Konzept abgehandelt. Vielleicht gelingt es sogar, mancher Leserin (*oder manchem Leser*) die Einsicht zu vermitteln, daß das Grundgerüst der Finanzmathematik aus 2-3 mathematischen „Formeln“, dem Zahlungsstrahl (*als Hilfe zur Veranschaulichung*) und einer Idee (*nämlich dem Äquivalenzprinzip*) besteht.

Das Buch - vorrangig für das Selbststudium konzipiert - wendet sich sowohl an den Praktiker, der mit Geldgeschäften zu tun hat, als auch an Studierende der Volks- und Betriebswirtschaftslehre, die im Selbststudium die notwendigen finanzmathematischen Grundlagen verstehen und einüben wollen. Ich hoffe ebenso, daß das Buch auch für den Lehrenden von Nutzen ist - manch unkonventionelles Beispiel oder eigenwillige Darstellungsweise ergänzt möglicherweise die eigene Ideenpalette.

Die notwendigen Grundlagen der Elementarmathematik (*außer der Prozentrechnung !*) werden hier vorausgesetzt, lassen sich allerdings mit der „Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik“ problemlos nacharbeiten. Notwendiges Hilfsmittel zum Nachvollziehen der Beispiele oder dem Lösen der Probleme ist die sachkundige Verwendung eines elektronischen Taschenrechners (*er muß mit Potenzen und Logarithmen umgehen können; empfehlenswert - wenn auch nicht zwingend erforderlich - für die Effektivzinsberechnung ist die Möglichkeit, den Rechner frei programmieren zu können*). Die im Text vorkommenden Beispiele habe ich mit einem herkömmlichen Taschenrechner durchgerechnet, dabei Zwischenergebnisse ungerundet weiterverarbeitet und lediglich bei Bedarf das Endresultat angemessen gerundet.

Der Text enthält Hunderte von Beispielen und Übungsaufgaben, die dem Lernenden Hinweise über seine Stoff- und Problembeherrschung, dem Lehrenden Anregungen zur Gestaltung und Weiterführung eigener didaktischer Ideen und dem Praktiker Fallbeispiele zur Lösung eigener Problemstellung liefern sollen. Da das schnelle Nachschlagen von Lösungen den beabsichtigten Lerneffekt - der nur durch eigene Anstrengungen erzielbar ist - verhindert, wurde darauf verzichtet, im Buch selbst einen Lösungshang für die mehr als 500 Übungsaufgaben aufzunehmen. Interessenten können ein separates Lösungsbüchlein direkt über den Autor beziehen.

Zum *Gebrauch* des Buches: Um die Lesbarkeit des Textes zu verbessern, wurde die äußere Form strukturiert:

Definitionen, Regeln, Sätze und	wichtige Ergebnisse	sind jeweils eingerahmt.
---------------------------------	---------------------	--------------------------

Bemerkungen sind in schräger Schrifttype gehalten.

Beispiele sind mit einem senkrechten Strichbalken am linken Rand gekennzeichnet.

Definitionen (*Def.*), Sätze, Bemerkungen (*Bem.*), Formeln, Tabellen (*Tab.*), Beispiele (*Bsp.*), Aufgaben (*Aufg.*) und Abbildungen (*Abb.*) sind in jedem erststelligen Unterkapitel ohne Rücksicht auf den Typ fortlaufend durchnummeriert. So folgen etwa in Kap. 2.3 nacheinander Def. 2.3.11, Formel (2.3.12), Bsp. 2.3.13, Bsp. 2.3.14, Formel (2.3.15), Bem. 2.3.16 und Aufg. 2.3.17 usw.

Die Funktionsgraphen entstanden mit TurboPlot 7.5 im HPGL-Format, wurden anschließend mit der Konvertierungssoftware Hijaak 1.1C in das PCX-Format umgewandelt, unter Paintbrush bearbeitet und schließlich in den Text eingebunden und dort beschriftet.

Die Rohfassung der reproduktionsfähigen Druckvorlage hat in monatelanger unermüdlicher und sachkundiger Weise Frau cand. rer.pol. Ursula Block (*mit Hilfe des wissenschaftlichen Textverarbeitungssystems WITEX 4.01*) gestaltet. Hilfreiche Unterstützung erhielt ich von Frau cand. rer.pol. Solveig Schönecker (*Korrektur*). Ihnen beiden danke ich vielmals.

Mein Dank gilt ebenso dem Vieweg-Verlag und insbesondere Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch für die erneut sehr gute Zusammenarbeit.

Auch diesmal danke ich meiner Frau Herma für ihre liebe- und verständnisvolle Geduld während der langen Monate der Entstehung dieses Buches.

Ein neu konzipiertes Buch wie das vorliegende weist trotz sorgfältiger Bearbeitung aller Erfahrung nach noch (viele) Fehler und Ungereimtheiten auf. Auch wenn es in der Mathematik ein menschliches Vorrecht des Irrsins gibt - das auch der Autor für sich in Anspruch nimmt -, bitte ich alle Leserinnen und Leser um Rückmeldung.

Aachen, im Januar 1996

Jürgen Tietze

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen, Variablennamen	IX
1 Voraussetzungen und Hilfsmittel	1
1.1 Prozentrechnung	1
1.2 Lineare (einfache) Verzinsung	17
1.2.1 Grundlagen der linearen Verzinsung	18
1.2.2 Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik (bei linearer Verzinsung)	25
1.2.3 Terminrechnung - mittlerer Zahlungstermin	37
1.2.4 Vorschüssige Verzinsung, Wechseldiskontierung	45
2 Zinseszinsrechnung	51
2.1 Grundlagen der Zinseszinsrechnung	51
2.2 Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik (bei Zinseszinsen)	62
2.3 Unterjährige Verzinsung	73
2.3.1 Diskrete unterjährige Verzinsung	73
2.3.2 Zur Effektivverzinsung kurzfristiger Kredite	80
2.3.3 Gemischte Verzinsung	83
2.3.4 Stetige Verzinsung	86
3 Rentenrechnung	93
3.1 Vorbemerkungen	93
3.2 Gesamtwert (Zeitwert) einer Rente zu beliebigen Bewertungsstichtagen	94
3.3 Vor- und nachschüssige Renten	97
3.4 Rentenrechnung und Äquivalenzprinzip - Beispiele und Aufgaben	101
3.5 Zusammengesetzte Zahlungsreihen und wechselnder Zinssatz	109
3.6 Ewige Renten	111
3.7 Kapitalaufbau/Kapitalabbau durch laufende Zuflüsse/Entnahmen	116
3.8 Auseinanderfallen von Ratentermin und Zinszuschlagtermin	122
3.8.1 Rentenperiode größer als Zinsperiode	123
3.8.2 Zinsperiode größer als Rentenperiode	125
3.8.2.1 ISMA - Methode („internationale Methode“)	126
3.8.2.2 „360 - Tage - Methode“ (nach PAngV)	127
4 Tilgungsrechnung	137
4.1 Grundlagen, Tilgungsplan, Vergleichskonto	137
4.2 Tilgungsarten	144
4.2.1 Allgemeine Tilgungsschuld	144
4.2.2 Gesamtfällige Schuld ohne Zinsansammlung	147
4.2.3 Gesamtfällige Schuld mit vollständiger Zinsansammlung	148
4.2.4 Ratentilgung (Ratenschuld)	149

4.2.5	Annuitätentilgung (Annuitätenschuld)	150
4.2.5.1	Annuitätenkredit – Standardfall	151
4.2.5.2	Annuitätenkredit – Ergänzungen	157
4.3	Tilgungsrechnung bei unterjährigen Zahlungen	176
4.3.1	Kontoführungsmethode 1 (PAngV)	177
4.3.2	Kontoführungsmethode 2 (Braess)	178
4.3.3	Kontoführungsmethode 3 (US)	180
4.3.4	Kontoführungsmethode 4 (ISMA)	181
4.4	Nachschüssige Tilgungsverrechnung	184
5	Die Ermittlung des Effektivzinssatzes in der Finanzmathematik	189
5.1	Grundlagen	189
5.1.1	Der Effektivzinsbegriff	189
5.1.2	Berechnungsverfahren für den Effektivzinssatz	196
5.2	Effektivzinsermittlung in Standardfällen	200
5.2.1	Effektivzinsermittlung bei Standardkrediten	200
5.2.2	Effektivzinsermittlung bei Investitionen - Kapitalwert und interner Zinssatz	219
5.2.2.1	Vorbemerkungen	219
5.2.2.2	Kapitalwert einer Investition	221
5.2.2.3	Interner Zinssatz einer Investition	228
5.3	Effektivzinsermittlung bei unterjährigen Leistungen (2-Phasen-Methode)	244
5.3.1	Sofortige Tilgungsverrechnung (in Phase 1) bei unterjährigen Leistungen	245
5.3.1.1	Zinsverrechnung im Zahlungszeitpunkt (Phase 1)	246
5.3.1.2	Mehrere Rückzahlungsraten pro Zinsperiode (Phase 1)	254
5.3.2	Nachschüssige Tilgungsverrechnung (in Phase 1) bei unterjährigen Zahlungen	260
5.3.2.1	Zinsverrechnung im Zeitpunkt der Tilgungsverrechnung (Phase 1)	261
5.3.2.2	Mehrere Tilgungsverrechnungszeitpunkte pro Zinsperiode (Phase 1)	263
5.3.3	Effektivverzinsung und unterjährige Zahlungen – ausgewählte Probleme	269
5.3.3.1	Disagio-Varianten bei identischen Zahlungsströmen	269
5.3.3.2	Tilgungstreckungsdarlehen bei unterjährigen Leistungen	274
5.3.3.3	Disagio-Rückerstattung bei unterjährigen Leistungen	278
5.3.3.4	Effektivverzinsung von Ratenkrediten	279
5.3.3.5	Anlageformen mit unterjährigen Leistungen - Beispiel Bonussparen	283
5.3.3.6	Übungsaufgaben zur Effektivzinsermittlung bei unterjährigen Leistungen	287
5.4	Exkurs: Finanzmathematische Aspekte zur „richtigen“ Verzinsungsmethode	292
5.5	Renditeermittlung bei festverzinslichen Wertpapieren	302
Literaturverzeichnis		317
Sachwortverzeichnis		319

Abkürzungen, Variablennamen

(auf den angegebenen Seiten finden sich nähere Erläuterungen zu den jeweiligen Abkürzungen/Variablen)

$\hat{=}$	entspricht	d.h.	das heißt
%,‰	Prozent, Promille 2ff	Def.	Definition
$1+i$	Zuwachsfaktor 4,52	DM	Deutsche Mark
$1-i$	Abnahmefaktor 4	e	Eulersche Zahl 57,86f
96/7/1	Kreditkonditionen (Bsp.)	$\in$	ist enthalten 57
ΔEV	Endvermögensdifferenz (= $EV_I - EV_U$) 222f	eff.	effektiv
A	(äquivalente) Annuität 150ff,227	EG	Europäische Gemeinschaft (EU)
a.H.	auf Hundert 9f	e_t	Investitionseinzahlung zum Ende der Periode t 223
a_0	Investitionsauszahlung 223	etc.	et cetera (und so weiter)
Abb.	Abbildung	EV_I	Endvermögen bei Investition 221ff
AG	Aktiengesellschaft, Amtsgericht	EV_U	Endvermögen bei Unterlassung 221ff
AGB	Allgemeine Geschäftsbedingungen	Fa.	Firma
AIBD	Association of International Bond Dealers 126	Fn.	Fußnote
a_n	nachschüssiger Rentenbarwertfaktor	ggf.	gegebenenfalls
a_n'	vorschüssiger Rentenbarwertfaktor 99f	GL	Gegenleistung
äqu.	äquivalent	GmbH	Gesellschaft mit beschränkter Haftung
a_t	Investitionsauszahlung in Periode t 223	i	Prozentsatz 3, Zinssatz 18,52
A_t	Annuität am Ende der Periode t 137ff	i^*	nomineller Zinssatz eines festverzins- lichen Wertpapiers 302
Aufg.	Aufgabe	i.a.	im allgemeinen
a^x, e^x	Potenz 57	i.H.	im Hundert 9f
BB	Betriebs-Berater (Zeitschrift)	$i_{\text{äqu}}$	äquivalenter Zinssatz 78
Bem.	Bemerkung	i_d	Tageszinssatz
BGB	Bürgerliches Gesetzbuch	i_{eff}	Effektivzinssatz 76f,89,189ff
BGH	Bundesgerichtshof	i_H	Halbjahreszinssatz
BGHZ	Entscheidungen des Bundesgerichts- hofes in Zivilsachen	i_{kon}	konformer Zinssatz 76f
Bsp.	Beispiel	i_M	Monatzinssatz
bzw.	beziehungsweise	incl.	inklusive (einschließlich)
C_0	(Emissions-) Kurs eines festverzins- lichen Wertpapiers 302	i_{nom}	nomineller Zinssatz 74,162f
C_0	Kapitalwert einer Investition 222ff	insg.	insgesamt
$C_0(i)$	Kapitalwertfunktion 228ff	i_p	Periodenzinssatz 74f
ca.	circa, ungefähr	i_Q	Quartalszinssatz
C_n	Rücknahmekurs eines festverzins- lichen Wertpapiers 303	i_{rel}	relativer Zinssatz 74
C_t	aktueller finanzmathematischer Kurs (Preis) eines Wertpapiers 307	i_s	stetiger Zinssatz 89
C_t^*	aktueller Börsenkurs eines festverzins- lichen Wertpapiers 311	ISMA	International Securities Market Association 126f
		i_T	Tilgungssatz 157
		i_v	vorschüssiger Zinssatz 45f
		J.	Jahr

K	Grundwert, Bezugsgröße 3	r	interner Zinssatz einer Investition 228ff,279f
K^+, K^-	vermehrter, verminderter Wert 4	r	konforme Ersatzrate 125, unterjährige Rate 42f,246
K_0	(Anfangs-)Kapital 18, Barwert 20,52, Kreditsumme 138f	R	Rate(nhöhe) 93
Kap.	Kapitel	IR	Menge der reellen Zahlen
KG	Kommanditgesellschaft	R^*	äquivalente Ersatzrate, Kontoendstand 42f,127ff,249
K_m	Kontostand, Restschuld 117ff,151f	R_0	Barwert einer nachschüssigen Rente 99
K_n	Endkapital, Endwert 19,23,51f	R_0'	Barwert einer vorschüssigen Rente 99
kon.	konform	R_0^∞	Barwert einer ewigen Rente 111ff
K_t	Zeitwert einer Zahlung(sreihe) 66ff,87f Restschuld am Ende der Periode t 138f	rel.	relativ
K_{t-1}	Restschuld zu Beginn d. Per. t 138f,141	R_n	Gesamtwert einer Rente am Tag der letzten (n-ten) Rate 94f, Endwert einer nachsschüssigen Rente 99
l	Liter	R_n'	Endwert einer vorschüssigen Rente 99
L	Leistung	R_t	Einzahlungsüberschuß (= $e_t - a_t$) zum Ende der Periode t 223
lfd. Nr.	laufende Nummer		
lim	Limes, Grenzwert 86f,111f		
log, ln	Logarithmus 57		
M.	Monat	s	Skontosatz 82
min	Minute	s.o.	siehe oben
Mio.	Millionen (10^6)	s.u.	siehe unten
Mon.	Monat	s_n	nachschüssiger Rentenendwertfaktor
Mrd.	Milliarden (10^9)	s_n'	vorschüssiger Rentenendwertfaktor 99f
MWSt.	Mehrwertsteuer	sog.	sogenannte
n	Laufzeit 18,52, Terminzahl 95f	t	Laufzeit in Tagen, laufende Nummer einer (Tilgungs-) Periode 137
N	Menge der natürlichen Zahlen	T	Laufzeit einer Investition 220, Tilgungsrate bei Ratentilgung 149
NJW	Neue Juristische Wochenschrift	Tab.	Tabelle
nom.	nominell	TDM	tausend DM
o.a.	oben angeführt, oben angegeben	T_t	Tilgung am Ende der Periode t 137ff
o.ä.	oder ähnlich(es)	TV	Tilgungsverrechnung
oHG	offene Handelsgesellschaft		
p	Prozentfuß 3, Zinsfuß 18,52	u.a.	unter anderem, und andere
p.a.	pro anno (pro Jahr)	usw.	und so weiter
p.d.	pro Tag		
p.H.	pro Halbjahr	v.H.	vom Hundert 9
p.M.	pro Monat	vgl.	vergleiche
p.Q.	pro Quartal	vs.	versus, gegen
p^*	nomineller Zinsfuß eines festverzinslichen Wertpapiers 302		
PAngV	Preisangabenverordnung 127ff	Z	Prozentwert 3
Per.	Periode	z.B.	zum Beispiel
q	Aufzinsungsfaktor (= $1+i$) 52	ZE	Zeiteinheit
Q	Menge der rationalen Zahlen	ZIP	Zeitschrift für Wirtschaftsrecht
q^{-n}	Abzinsungsfaktor 58,62	Z_n	Zinsen 18
q^n	Aufzinsungsfaktor 58,62	Z_t	Zinsen am Ende der Periode t 137ff
Qu.	Quartal	ZV	Zinsverrechnung