Teubner Studienbücher

Mathematik

- Ahlsvede/Wegener: **Suchprobleme**. DM 29,80
- Aigner: **Graphentheorie**. DM 29,80
- Ansorge: **Differenzenapproximationen partieller Anfangswertaufgaben**. DM 29,80 (LAMM)
- Behnen/Neuhaus: **Grundkurs Stochastik**. 2. Aufl. DM 36,—
- Bohl: **Finite Modelle gewöhnlicher Randwertaufgaben**. DM 32,— (LAMM)
- Böhmer: **Spline-Funktionen**. DM 32,—
- Bröcker: **Analysis in mehreren Variablen**. DM 34,—
- Bunse/Bunse-Gerstner: **Numerische Lineare Algebra**. 314 Seiten. DM 36,—
- Clegg: **Variationsrechnung**. DM 19,80
- v. Collani: **Optimale Wareneingangskontrolle**. DM 29,80
- Collatz: **Differentialgleichungen**. 6. Aufl. DM 34,— (LAMM)
- Collatz/Krabs: **Approximationstheorie**. DM 29,80
- Constantinescu: **Distributionen und ihre Anwendung in der Physik**. DM 22,80
- Dinges/Rost: **Prinzipien der Stochastik**. DM 36,—
- Fischer/Sacher: **Einführung in die Algebra**. 3. Aufl. DM 23,80
- Floret: **Maß- und Integrationstheorie**. DM 34,—
- Grigorieff: **Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen**
Band 2: DM 34,—
- Hackbusch: **Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen**. DM 38,—
- Hainzl: **Mathematik für Naturwissenschaftler**. 4. Aufl. DM 36,— (LAMM)
- Hässig: **Graphentheoretische Methoden des Operations Research**. DM 26,80 (LAMM)
- Hettich/Zenke: **Numerische Methoden der Approximation und semi-infinitiven Optimierung**. DM 26,80
- Hilbert: **Grundlagen der Geometrie**. 12. Aufl. DM 28,80
- Jeggle: **Nichtlineare Funktionalanalysis**. DM 28,80
- Kall: **Analysis für Ökonomen**. DM 28,80 (LAMM)
- Kall: **Lineare Algebra für Ökonomen**. DM 24,80 (LAMM)
- Kall: **Mathematische Methoden des Operations Research**. DM 26,80 (LAMM)
- Kohlas: **Stochastische Methoden des Operations Research**. DM 26,80 (LAMM)
- Krabs: **Optimierung und Approximation**. DM 28,80
- Lehn/Wegmann: **Einführung in die Statistik**. DM 24,80
- Müller: **Darstellungstheorie von endlichen Gruppen**. DM 25,80
- Rauhut/Schmitz/Zachow: **Spieltheorie**. DM 34,— (LAMM)
- Schwarz: **FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente**. DM 25,80
- Schwarz: **Methode der finiten Elemente**. 2. Aufl. DM 39,— (LAMM)
- Stiefel: **Einführung in die numerische Mathematik**. 5. Aufl. DM 34,— (LAMM)
- Stiefel/Fässler: **Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung**. DM 29,80 (LAMM)
- Stummel/Hainer: **Praktische Mathematik**. 2. Aufl. DM 38,—

Fortsetzung auf der 3. Umschlagseite

Grundkurs Stochastik

**Eine integrierte Einführung
in Wahrscheinlichkeitstheorie
und Mathematische Statistik**

**Von Dr. rer. nat. Konrad Behnen
Professor an der Universität Hamburg**

**und Dr. rer. nat. Georg Neuhaus
Professor an der Universität Hamburg**

**2., durchgesehene Auflage
Mit 33 Abbildungen, 253 Aufgaben
und zahlreichen Beispielen**

B. G. Teubner Stuttgart 1987

Prof. Dr. rer. nat. Konrad Behnen

Geboren 1941 in Werpeloh. Von 1962 bis 1967 Studium der Mathematik und Physik an der Universität Münster. 1967 Diplom in Mathematik, 1969 Promotion an der Universität Münster. 1970/71 Gastaufenthalt an der Universität Berkeley. 1974 Habilitation an der Universität Freiburg. Professuren für Mathematische Stochastik an den Universitäten Karlsruhe (1974/75), Bremen (1975/78) und Hamburg (seit 1978).

Prof. Dr. rer. nat. Georg Neuhaus

Geboren 1943 in Banfe/Wittgenstein. Von 1962 bis 1967 Studium der Mathematik und Physik in Münster. 1967 Diplom, 1969 Promotion in Münster. 1970 Medizinische Abteilung der Farbwerke Hoechst. Von 1970 bis 1974 Assistent in Münster und Freiburg. 1974 Habilitation im Fach Mathematik. Von 1974 bis 1977 Professor in Gießen. Seit 1977 Professor in Hamburg.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Behnen, Konrad:
Grundkurs Stochastik : e. integrierte Einf.
in Wahrscheinlichkeitstheorie u. math.
Statistik / von Konrad Behnen u. Georg
Neuhaus. – 2., durchges. Aufl. –
Stuttgart : Teubner, 1987.
(Teubner-Studienbücher : Mathematik)

NE: Neuhaus, Georg:

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© B. G. Teubner, Stuttgart, 1984

ISBN 978-3-519-12069-8 ISBN 978-3-322-91843-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-91843-7

VORWORT

In vielen Studienordnungen für das Mathematik-Studium an deutschen Hochschulen sind einführende Vorlesungen über Stochastik (Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik) vorgesehen, an denen sowohl Hörer teilnehmen, die sich im Verlauf ihres Studiums verstärkt mit Stochastik befassen wollen, als auch solche, die sich anschließend anderen Bereichen der Mathematik zuwenden.

Will man der ersten Gruppe gerecht werden, so liegt es nahe, zunächst systematisch ein maßtheoretisches Fundament zu schaffen, um erst danach zu den eigentlich stochastischen Fragestellungen überzuleiten. Hierbei kommt allerdings die zweite Gruppe zu kurz, die natürlicherweise daran interessiert ist, einen bis zu einem gewissen Grad in sich abgeschlossenen Einblick in Denkweisen und Methoden der Stochastik zu erhalten, die jedoch kein Interesse daran hat, einen Großteil der zur Verfügung stehenden Zeit einer systematischen Erarbeitung maßtheoretischer Grundlagen zu opfern. Viele Autoren haben den Bedürfnissen der letztgenannten Gruppe dadurch Rechnung getragen, daß sie unter Verzicht auf maßtheoretische Begriffsbildungen die grundlegenden Ideen der Stochastik anhand spezieller Modelle, bei denen keine maßtheoretischen Kenntnisse benötigt werden, entwickeln.

Aber auch diese Vorgehensweise birgt Nachteile: Solche, meist als "elementar" bezeichneten Darstellungen sind wenig praktikabel als Basis für weiterführende Veranstaltungen der Stochastik. Einige Mühe muß später darauf verwendet werden, die anhand von Spezialfällen entwickelten Begriffe in maßtheoretischem Gewand erneut zu formulieren und auf ihre Konsistenz mit den alten Begriffen zu überprüfen.

Eine Antriebsquelle für uns, dieses Lehrbuch zu schreiben, war der Wunsch, durch eine geeignete Organisation der Inhalte einen Ausweg aus dem obigen Dilemma zu finden. Unsere Vorstellung dabei ist, die stochastische Modellbildung in der exakten maßtheoretischen Sprech- und Bezeichnungsweise vorzunehmen, jedoch nur insoweit maßtheoretische Begriffe und Ergebnisse bereitzustellen, als diese für das Verständnis unumgänglich nötig sind. So werden etwa Existenzsätze der Maßtheorie (z.B. der Fortsetzungssatz von

Carathéodory), die leicht zu verstehen, aber zeitaufwendig zu beweisen sind, zunächst nur zitiert und erst später in einem Ergänzungskapitel bewiesen. Dagegen hielten wir es für notwendig, das allgemeine μ -Integral, verbunden mit den üblichen Grenzwertsätzen, wegen seiner zentralen Stellung als technisches Hilfsmittel und zur Einübung der damit zusammenhängenden Begriffe, in voller Allgemeinheit zu entwickeln (was jedoch erstaunlich wenig Raum beansprucht).

Neben diesen curricular-technischen Aspekten haben wir besonderen Wert auf eine sorgfältige Diskussion der stochastischen Modellbildung gelegt, etwa auf eine saubere Unterscheidung zwischen mathematischem Modell und der dadurch modellierten Realität und auf die Problematik der Anwendung statistischer Ergebnisse in der Realität.

Unsere Darstellung beginnt natürlicherweise mit der Entwicklung stochastischer Modelle, die zufallsabhängige Phänomene beschreiben. Die Bereitstellung und Analyse von Modellen sehen wir jedoch als eine (notwendige und wichtige) Vorstufe für die Beantwortung statistischer Fragen an, also von Fragen, wie man aus Beobachtungsdaten oder Messungen Information über das tatsächlich zugrundeliegende Modell gewinnen kann. Demgemäß haben wir von Anfang an jede sich bietende Gelegenheit genutzt, statistische Fragestellungen bzw. Verfahren bei gerade aufgestellten Modellen anzusprechen bzw. zu entwickeln. So kommt es, daß in den Kapiteln 1 bis 3, in denen aus systematischen Gründen Modellbildungsaspekte im Vordergrund stehen, die wichtigsten statistischen Verfahren (Schätzer, Tests und Konfidenzbereiche) anhand von Beispielen eingeführt und prinzipiell diskutiert werden, bevor sie in den Kapiteln 6 bis 8 systematischer behandelt werden.

Der vorliegende Kurs ist von beiden Autoren und von Kollegen in Hamburg für Diplom-Studenten der Mathematik erprobt worden. Er erfordert insgesamt einen Zeitumfang von ca. 6 Semesterwochenstunden. Mit geringen Modifikationen hat er sich gleichfalls für "Nebenfächler" (Informatiker, Physiker) und für Wirtschaftsmathematiker als geeignet erwiesen. Das maßtheoretische Ergänzungskapitel (Kapitel 9) kann u.E. zunächst durchaus unbehandelt bleiben. In ihm wird dokumentiert, welche maßtheoretischen Lücken im Haupttext verblieben sind, so daß bei weiterführenden Veranstaltungen

ohne Zeitverlust der Anschluß hergestellt werden kann.

Wir danken unseren Mitarbeitern J.-P. Kreiß und W. Pfeil für die Herstellung der Abbildungen und die Kontrolle der Übungsaufgaben. Den Herren J. Christensen und A. Gudewer danken wir für die sorgfältige Korrektur des Textes. Zu besonderem Dank sind wir Frau B. Kempas und Frau H. Thormann verpflichtet, die die Reinschrift des vorliegenden Manuskriptes nebst verschiedener Überarbeitungen mit viel Sorgfalt hergestellt haben.

Hamburg, im Januar 1984

K. Behnen, G. Neuhaus

Die 2. Auflage ist gegenüber der 1. Auflage im wesentlichen unverändert geblieben. Lediglich Druckfehler und einige Ungereimtheiten wurden verbessert.

Hamburg, im Juli 1985

K. Behnen, G. Neuhaus

INHALT

1	DER WAHRSCHEINLICHKEITSRAUM	9
1.1	Existenz- und Anwendungspostulat	9
1.2	Das allgemeine Modell	19
1.3	Einige Rechenregeln für Maßräume	30
1.4	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume	35
1.5	Diskrete Zufallsvariable	42
1.6	Verwerfung von W-Maßen aufgrund von Beobachtungen .	46
	Aufgaben	56
2	KOPPELUNG DISKRETER ZUFALLSEXPERIMENTE	64
2.1	Mehrstufige Zufallsexperimente und das Koppelungspostulat	64
2.2	Unabhängige Koppelung und Produktexperimente	80
2.3	Stochastisch unabhängige diskrete Zufallsvariable .	85
2.4	Elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten	91
	Aufgaben	97
3	GRUNDLEGENDE MODELLE DISKRETER ZUFALLSEXPERIMENTE	103
3.1	Bernoulli(p) Experimente, das Bernoullische schwache Gesetz der großen Zahlen und die Binomial(n, p) Verteilung	103
3.2	Ein Konfidenzintervall für die Erfolgswahrschein- lichkeit p und ein Test für die Hypothese $p=p_0$. . .	110
3.3	Poisson(λ) Experimente und Maximum Likelihood Schätzung	117
3.4	Multivariate Bernoulli($p_1, \dots, p_k$) Experimente und die Multinomial($n; p_1, \dots, p_k$) Verteilung	123
3.5	Hypergeometrische (N, K, n) Experimente	127
	Aufgaben	130
4	ZUFALLSEXPERIMENTE ÜBER $\mathbb{R}^k$	134
4.1	Die Borel σ -Algebra $\mathcal{B}$ über $\mathbb{R}$ und die Konstruktion von W-Maßen über $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$	134
4.2	W-Maße mit Riemann-Dichten über $\mathbb{R}$	143
4.3	Maße und W-Maße über $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$	149
	Aufgaben	157

5	KOPPELUNG ALLGEMEINER ZUFALLSEXPERIMENTE	161
5.1	Meßbare Funktionen und allgemeine Zufallsvariable .	161
5.2	Der Erwartungswert für numerische Zufallsvariable .	173
5.3	Allgemeine Koppelung und stochastische Unabhängigkeit	191
5.4	Der Satz von Fubini und einige Anwendungen	201
5.5	Der Transformationssatz für Lebesgue-Dichten . . .	211
5.6	Das Gesetz der großen Zahlen und die Monte Carlo Methode	218
5.7	Der χ^2 -Anpassungstest	232
	Aufgaben	241
6	SCHÄTZUNG VON MODELLPARAMETERN	252
6.1	Optimale erwartungstreue Schätzer	252
6.2	Maximum Likelihood Schätzer	261
6.3	Kleinste Quadrate Schätzer	274
6.4	Parameterschätzung in approximativen Modellen . . .	280
	Aufgaben	289
7	KONFIDENZBEREICHE FÜR MODELLPARAMETER	292
7.1	Die Pivot Methode zur Konstruktion von Konfidenzbereichen	292
7.2	Konfidenzbereiche auf der Basis approximativer Pivots	298
7.3	Optimale Konfidenzbereiche und Tests	302
	Aufgaben	309
8	DAS TESTEN VON HYPOTHESEN ÜBER MODELLPARAMETER	311
8.1	Optimale Tests für einfache Hypothesen	311
8.2	Der einseitige Gaußtest und Modelle mit monotonem Dichtequotienten	320
8.3	Optimale zweiseitige Tests bei einparametrischen Exponentialfamilien	327
	Aufgaben	336
9	MASS- UND WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORETISCHE ERGÄNZUNGEN .	338
9.1	Dynkin-Systeme und σ -Algebren	338
9.2	Erzeugung von Maßen aus Prämaßen	341

9.3 Koppelung von Experimenten	350
9.4 Verteilungskonvergenz und zentraler Grenzwertsatz .	356
Aufgaben	362
TABELLEN	364
LITERATUR	367
SACHVERZEICHNIS	369

SYMBOLE

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen $\{0, 1, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen $\{0, \pm 1, \dots\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathcal{B}$	Borel σ -Algebra über $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^k$	k -dim. euklidischer Raum
$\mathcal{B}^k$	Borel σ -Algebra über $\mathbb{R}^k$
$\mathcal{P}(\Omega)$	Potenzmenge von Ω
$(\Omega, \mathcal{A}), (X, \mathcal{B})$	Meßräume
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), (X, \mathcal{B}, \mathbb{P})$	W-Räume
$\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2^1$	Koppelung
$\mu_1 \otimes \mu_2$	Produktmaß
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$	Produkt- σ -Algebra
$(X, \mathcal{B}, \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\})$	statistisches Modell