

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Band 2 Mehrschrittverfahren

Von Dr. phil. nat. Rolf Dieter Grigorieff
o. Professor an der Technischen Universität Berlin

unter Mitwirkung von
Dr. phil. nat. Hans Joachim Pfeiffer
wiss. Assistent an der Technischen Universität Berlin

Mit 49 Figuren, 32 Tabellen und
zahlreichen Beispielen



B. G. Teubner Stuttgart 1977

Prof. Dr. phil. nat. Rolf Dieter Grigorieff

Geboren 1938 in Berlin. Von 1957 bis 1966 Studium der Physik und Mathematik an der Technischen Universität Berlin und an der Universität Frankfurt/M. 1965 Diplom in Physik. Von 1965 bis 1970 wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Angewandte und Instrumentelle Mathematik der Universität Frankfurt/M., 1967 Promotion, 1970 Habilitation in Mathematik. 1970 Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Seit 1971 Professor an der Technischen Universität Berlin.

Dr. phil. nat. Hans Joachim Pfeiffer

Geboren 1944 in Darmstadt. Studium der Mathematik von 1964 bis 1969 an der Universität Frankfurt. Diplom 1969 und Promotion 1972 in Frankfurt. Von 1969 bis 1972 Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Lehrstuhl für Angewandte und Instrumentelle Mathematik der Universität Frankfurt. Seit 1972 wissenschaftlicher Assistent an der Technischen Universität Berlin.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Grigorieff, Rolf Dieter

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen /
unter Mitw. von Hans Joachim Pfeiffer. -
Stuttgart : Teubner.

Bd. 2. Mehrschrittverfahren. - 1. Aufl.- 1977.

(Teubner-Studienbücher : Mathematik)

ISBN 978-3-519-02045-5

ISBN 978-3-322-91202-2 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-91202-2

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photo-mechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an den Verlag gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© B. G. Teubner, Stuttgart 1977

Umschlaggestaltung: W. Koch, Sindelfingen

M. gewidmet

Vorwort

Hauptziel des vorliegenden zweiten Teils der Numerik von Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen ist es, die heute zur Verfügung stehenden Verfahren einschließlich ihrer mathematischen Behandlung darzustellen.

Dementsprechend ist wie im ersten auch in diesem Teil der Versuch unternommen worden, die Wirkungsweise der Verfahren allein, in meist gesonderten Abschnitten, zu beschreiben, die losgelöst von den detaillierteren mathematischen Untersuchungen verstanden werden können und insbesondere auch für den vorwiegend anwendungsorientierten Leser gedacht sind. In den anderen Passagen des Buches ist dann soweit wie möglich das Studium der mathematischen Eigenschaften der Verfahren vorgenommen worden.

Wenn die Durchführung eines solchen Programms auch nur unter Beschränkungen in der Stoffauswahl möglich ist, so ist doch versucht worden, die heute gängigen Verfahren, auch speziell für die sog. steifen Differentialgleichungssysteme, aufzunehmen. Auch die in den letzten Jahren in Gang gekommene Verwendung von Mehrschrittverfahren mit variablen Schrittweiten ist berücksichtigt worden. Ebenso werden Verfahren für Systeme höherer Ordnung mit Möglichkeiten der Reduzierung des Rundungsfehlereinflusses dargestellt.

Die mathematische Analyse ist so angelegt worden, daß damit möglichst auch die in der Praxis Verwendung findenden Verfahren erfaßt werden. Demgemäß sind die Stabilitätsfragen ausführlich behandelt worden. Konvergenzuntersuchungen werden, wenigstens ansatzweise, für variable Schrittweiten vorgenommen, bei Systemen höherer Ordnung auch für die Differenzenquotienten bis zur Ordnung der Differentialgleichung. Eingang gefunden haben auch asymptotische Entwicklungen und neuere Ergebnisse über optimale Fehlerabschätzungen.

Zur Illustrierung des Textes sind eine Reihe numerischer Beispiele aufgenommen worden, die von Herrn Dr. H.-J. Pfeiffer

bereitgestellt wurden, soweit sie nicht als aus der Original-literatur herrührend gekennzeichnet sind. Darüber hinaus bin ich Herrn Dr. Pfeiffer auch für die kritische Durchsicht des ersten Kapitels und der drei letzten Abschnitte des zweiten Kapitels zu großem Dank verpflichtet, ebenso wie Herrn Dipl.-Math. J. Schroll, der entsprechend die anderen Abschnitte von Kap. 2 und das dritte Kapitel durchgesehen hat. Dieses Buch hätte aber nicht erscheinen können ohne die außerordentliche Umsicht und Sorgfalt von Frau G. Froehlich bei der Anfertigung der reproduktionsreifen Druckvorlage, für die ich ihr herzlich danke. Ebenfalls meinen Dank aussprechen möchte ich dem Teubner-Verlag für die jederzeit angenehme Zusammenarbeit.

R.D. Grigorieff

Berlin, im Juli 1977

Inhalt

1. Mehrschrittverfahren für Systeme erster Ordnung.....	9
1.1. Definition der Mehrschrittverfahren.....	9
1.2. Spezielle Mehrschrittverfahren.....	21
1.2.1. Das Verfahren von Adams-Bashforth.....	23
1.2.2. Das Verfahren von Nyström.....	29
1.2.3. Das Verfahren von Adams-Moulton.....	37
1.2.4. Das Verfahren von Milne-Simpson.....	42
1.2.5. Verfahren, die auf numerischer Differentiation beruhen.....	44
1.2.6. Formeln mit günstiger Fehlerfortpflanzung..	48
1.2.7. Bemerkungen zum Taylorabgleich.....	56
1.3. Mehrschrittverfahren in Nordsieck-Form.....	58
1.4. Anlaufrechnung.....	69
1.5. Bemessung der Schrittweite.....	78
1.5.1. Eine Schranke für den globalen Fehler.....	80
1.5.2. Schätzungen des Abschneidefehlers.....	82
1.6. Änderung der Schrittweite und Ordnung.....	89
1.6.1. Die Methode von Ceschino.....	90
1.6.2. Die Methode von Nordsieck-Gear.....	92
1.6.3. Das Verfahren von Krogh.....	98
2. Asymptotische Eigenschaften der Mehrschrittverfahren...111	
2.1. Inverse Stabilität.....	111
2.2. Algebraische Charakterisierung der Lipschitz-Stabilität.....	117
2.3. Vorbemerkungen zur Konvergenz der Mehrschrittverfahren.....	123
2.4. Konvergenz der Mehrschrittverfahren.....	128
2.5. Inverse Stabilität bezüglich der Spijker-Norm.....	140
2.6. Optimale und zweiseitige Fehlerabschätzungen.....	145
2.7. Die maximale Konsistenzordnung stabiler Mehrschrittverfahren.....	159
2.8. Weiteres zur Konvergenz von Mehrschrittverfahren.....	164
2.9. Asymptotische Entwicklungen.....	169

2.10. Einige Eigenschaften der Wachstumsparameter.....	189
3. Stabilitätsbereiche von Mehrschrittverfahren.....	193
3.1. Starke und relative Stabilität.....	193
3.2. Absolute Stabilität.....	203
3.3. Bemerkungen zur Integration steifer Systeme.....	236
4. Prädiktor-Korrektor-Verfahren.....	250
4.1. Definition der $P(EC)^1E$ - und der $P(EC)^1$ -Verfahren..	250
4.2. Beispiele.....	253
4.3. Konvergenz der $P(EC)^1E$ -Verfahren.....	260
4.4. Absolute Stabilität der $P(EC)^1E$ -Verfahren.....	263
4.5. Spezielle $P(EC)^1E$ -Verfahren.....	278
4.6. Konvergenz der $P(EC)^1$ -Verfahren.....	292
4.7. Absolute Stabilität der $P(EC)^1$ -Verfahren.....	298
5. Einige Verfahren speziellen Typs.....	306
5.1. Die implizite Mittelpunkregel mit Glättung und Extrapolation.....	307
5.2. Das Verfahren von Enright.....	321
5.3. Verfahren mit variablen Koeffizienten.....	329
6. Verfahren für Systeme höherer Ordnung.....	348
6.1. Definition der Verfahren.....	348
6.2. Spezielle Mehrschrittverfahren für Systeme zweiter Ordnung.....	356
6.2.1. Verfahren vom Typ $(A_h I)$	356
6.2.2. Verfahren vom Typ $(A_h II)$ für $u'=f(\cdot, u)$	359
6.3. Asymptotische Stabilität der Verfahren für Systeme höherer Ordnung.....	367
6.3.1. Lipschitz-Stabilität für Verfahren vom Typ $(A_h I)$	368
6.3.2. Lipschitz-Stabilität für Verfahren vom Typ $(A_h II)$	370
6.4. Konvergenz der Mehrschrittverfahren für Systeme höherer Ordnung.....	380
6.5. Reduktion von Rundungsfehlern.....	383
Literatur.....	391
Sachverzeichnis.....	409

Inhalt von Band 1 Einschrittverfahren

1. Einschrittverfahren für Systeme erster Ordnung
 - 1.1. Definition der Einschrittverfahren
 - 1.2. Spezielle Einschrittverfahren
 - 1.2.1. Die Polygonzugmethode
 - 1.2.2. Die verbesserte Polygonzugmethode
 - 1.2.3. Runge-Kutta-Formeln
 - 1.2.4. Die Methode der Taylorentwicklung
 - 1.2.5. Das Verfahren von Runge-Kutta-Fehlberg
 - 1.2.6. Implizite Runge-Kutta-Formeln
 - 1.2.7. Halbimplizite Runge-Kutta-Formeln
 - 1.2.8. Implizite Formeln mit höheren Ableitungen
 - 1.3. Bemessung der Schrittweite
 - 1.3.1. Die Methode der Halbierung der Schrittweite
 - 1.3.2. Die Runge-Kutta-Verfahren
 - 1.3.3. Die Methode der Taylorentwicklung
 - 1.3.4. Das Verfahren von Runge-Kutta-Fehlberg
 - 1.3.5. Implizite Runge-Kutta-Formeln
 - 1.4. Rundungsfehler
2. Konvergenz und Stabilität der Einschrittverfahren
 - 2.1. Die Konvergenz der Polygonzugmethode und ein Existenzsatz für (A)
 - 2.2. Asymptotische Stabilität der Einschrittverfahren
 - 2.3. Konvergenz der Einschrittverfahren
3. Starke und absolute Stabilität. Integration steifer Differentialgleichungen
 - 3.1. Starke Stabilität
 - 3.2. Absolute Stabilität
 - 3.3. Das Verfahren von Lawson
 - 3.4. Die Methode von Liniger und Willoughby
 - 3.5. Padé-Approximationen der Exponentialfunktion

4. Einschrittverfahren für Systeme höherer Ordnung

4.1. Die Methode der Taylorentwicklung

4.2. Runge-Kutta-Verfahren

4.3. Das Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren

5. Grenzwertextrapolation

5.1. Lineare Grenzwertextrapolation

5.2. Das Verfahren von Gragg-Bulirsch-Stoer

5.3. Asymptotische Entwicklung des Diskretisierungs-
fehlers

Literatur

Sachverzeichnis