Gottfried Jetschke
Mathematik der Selbstorganisation

Gottfried Jetschke

Mathematik der Selbstorganisation

Qualitative Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme
und gleichgewichtsferner Strukturen in Physik,
Chemie und Biologie

Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Jetschke, Gottfried:

**Mathematik der Selbstorganisation : qualitative Theorie
nichtlinearer dynamischer Systeme und gleichgewichtsferner
Strukturen in Physik, Chemie und Biologie / Gottfried
Jetschke. — Braunschweig ; Wiesbaden : Vieweg, 1989**

ISBN-13: 978-3-528-06346-7

e-ISBN-13: 978-3-322-85918-1

DOI: 10.1007/978-3-322-85918-1

1989

Alle Rechte vorbehalten

© VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1989

Lizenzausgabe für Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig,
mit Genehmigung des VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin/DDR

Vorwort

Das Forschen nach den Ursachen der spontanen Strukturbildung in der unbelebten und der belebten Natur ist gegenwärtig ein faszinierendes und breit betriebenes Anliegen der modernen Physik, Chemie und Biologie. Die Entdeckung, daß in offenen gleichgewichtsfernen und deshalb nichtlinearen Systemen geordnete zeitliche, räumliche oder funktionale Strukturen als Folge kooperativer innerer Wechselwirkungen entstehen können, hat zu einer stürmischen Entwicklung auf diesem Gebiet geführt und auch die mathematische Forschung wesentlich befruchtet. Aber auch in vielen anderen Bereichen aus Naturwissenschaft und Technik wird das Wissen um Verhaltensweisen nichtlinearer dynamischer Systeme und deren Beherrschung heute unabdingbar.

Das vorliegende Lehrbuch ist aus Vorlesungen entstanden, die ich in den Jahren 1981–1986 an der Friedrich-Schiller-Universität Jena vor Physik- und Mathematikstudenten gehalten habe und will solche grundlegenden Kenntnisse einer modernen Theorie nichtlinearer Systeme vermitteln. Damit soll eine spürbare Lücke in der vorhandenen Lehrbuchliteratur geschlossen und ein Material bereitgestellt werden, das an anderen Einrichtungen Grundlage ähnlicher Kurse sein könnte.

Beim Aufbau des Buches habe ich die Darstellung der *mathematischen Methoden* zur Behandlung nichtlinearer autonomer dynamischer Systeme in den Vordergrund gerückt. Deshalb wird großer Wert auf eine möglichst präzise Formulierung von Begriffen und Sachverhalten gelegt, so daß die meisten Aussagen in Form mathematischer „Sätze“ gegeben und weitgehend bewiesen werden. Die Beweise einiger tiefliegender Theoreme werden nur angedeutet, doch es dürfte insgesamt eine gut begründete und nachvollziehbare mathematische Theorie entstehen. Durchgängige *physikalische Motivation* bleibt das Problem der spontanen Strukturbildung, dem auch sämtliche Beispiele gewidmet sind. Zusammen mit der Einführung und dem ausführlichen thermodynamischen Anhang soll dies wesentlich dazu beitragen, daß zugleich die physikalische Theorie der Selbstorganisation in gleichgewichtsfernen Systemen erlernt wird.

Das Buch wendet sich vorrangig an theoretische Physiker sowie Chemiker, Biologen, Techniker und andere „Anwender“, aber auch an Mathematiker, denen die behandelten Methoden bzw. deren Anwendungen weniger geläufig sind. Den Physiker (und andere) möchte ich auffordern, sich nicht von der Art der Darstellung und der verwendeten modernen Sprechweise abschrecken zu lassen; viele Begriffe (z. B. Diffeo-

morphismus, Phasenfluß) sind nur Abkürzungen für überschaubare Zusammenhänge. Vorausgesetzt werden neben dem Wissen um einfache Integrationsverfahren von Differentialgleichungen lediglich die Anfänge der Funktionalanalysis und ein Grundverständnis der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dem ernsthaften Mathematiker bleibt es natürlich nicht erspart, sich die Details der Beweise in der angegebenen Literatur zu erarbeiten.

Den Kern des Buches bilden die Kapitel 1–5, in denen systematisch die qualitative Theorie nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen in ein, zwei und mehr Dimensionen entwickelt wird. Zugleich werden zeitdiskrete Systeme diskutiert, die sonst verhältnismäßig selten behandelt werden, obwohl es in der Betrachtung viele Gemeinsamkeiten gibt. Einen breiten Raum habe ich dem Kapitel 5 über „Chaos“ gegeben, weil hier wichtige Ergebnisse der gegenwärtigen Forschung vorgestellt werden, die von unmittelbarer praktischer Bedeutung sind. Das Kapitel 8 dehnt die Art der Untersuchung auf partielle Differentialgleichungen aus, während die Kapitel 6 und 7 ergänzenden und systematisierenden Charakter tragen und für das erste Lesen nicht notwendig sind.

Einen zweiten Schwerpunkt bilden die Kapitel 9–11, die sich mit verschiedenen stochastischen Systemen, insbesondere stochastischen Differentialgleichungen beschäftigen. Dabei wird in Abschnitt 9.1. die in der Mathematik übliche maßtheoretische Formulierung eingeführt, um anschließend diskrete und stetige Verteilungen bzw. Zufallsgrößen einheitlich behandeln zu können. Etwas anspruchsvoller ist das Kapitel 13 über stochastische partielle Differentialgleichungen (das die Kenntnis von Kapitel 8 voraussetzt), es beruht im wesentlichen auf Forschungsergebnissen des Autors.

Zwei wichtige Fragestellungen werden nicht (oder fast nicht) behandelt, nämlich analytische Näherungsverfahren sowie Methoden zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen bzw. deren Simulation. Hier muß auf die entsprechende Literatur verwiesen werden.

Dem Leser, der das Buch nicht von Anfang bis Ende durcharbeiten möchte und sich nur für die wichtigsten mathematischen Aussagen interessiert, möchte ich unbedingt die Kapitel 1, 3, 5, 8 sowie 10 empfehlen. Wer dagegen vorrangig die physikalischen Anwendungen studieren will, der sollte in folgender Weise vorgehen: Einführung (E.), thermodynamische Grundlagen (A.3.), mathematische Methoden (1., 3.1.–3.3., 4.1., 5., 8.2., 9.), physikalische Systeme (2., 3.1.), chemische Systeme (2.2., 3.6., 6.2., 8.3., 8.4.), biologische Systeme (2.2., 3.6., A.2.4., 4.3.), stochastische Modellierung (10.1.3., 10.2.3., 10.3., 11., 13.3.).

Kommentierende Textstellen, Nebengedanken oder für das erste Lesen weniger wichtige Passagen sind in Kleindruck gesetzt, ebenso die meisten Beispiele, sofern sie nicht grundsätzlicher Natur sind. Der Leser sollte sich aber auf jeden Fall um die selbständige Lösung der zahlreichen Aufgaben bemühen, um seine Fähigkeiten zur Anwendung der erworbenen Kenntnisse zu überprüfen. Die Hinweise im Anhang sind dabei als Hilfestellung und zum nachträglichen Vergleich gedacht.

Noch einige Bemerkungen zur Notation, die an manchen Stellen von der in der Physik üblichen abweicht: Vektoren werden generell nicht durch Pfeile oder Fettdruck

hervorgehoben, weil ihr Charakter in der Regel aus dem Zusammenhang eindeutig hervorgeht. Elemente des n -dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$ werden mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ bezeichnet, analog Vektorfelder mit $f = (f_1, \dots, f_n)$. Im Falle $n = 2$ bzw. $n = 3$ wird häufig die indexsparende Schreibweise (x, y) bzw. (x, y, z) verwendet. Die Jacobi-Matrix einer Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ wird kurz mit $f'(x)$ bezeichnet. Wo es nicht nötig ist, werden Spalten- und Zeilenvektoren nicht unterschieden. Das Skalarprodukt zweier Vektoren a und b wird mit (a, b) abgekürzt. Ein Punkt über einer Variablen bedeutet stets die (totale) Ableitung nach der Zeit (also $\dot{x} \equiv dx(t)/dt$).

Definitionen, Sätze, Beispiele und Aufgaben sind innerhalb jedes zweiziffrigen Abschnittes — dreiziffrige Unterabschnitte, wie 1.4.1., dienen nur der übersichtlicheren Gliederung — fortlaufend numeriert und benannt, sie werden außerhalb des jeweiligen Abschnittes in der Form Definition (Satz, ...) 1.4./2 zitiert. Formeln sind jeweils im gesamten Kapitel durchgängig numeriert (z. B. Gleichung (1.13)).

Danken möchte ich zuerst meinen akademischen Lehrern, Herrn Dr. G. NEUGEBAUER und Herrn Prof. H. TRIEBEL, die mich direkt oder indirekt mit den dargestellten Ideen und Methoden vertraut gemacht haben. Ebenfalls danken möchte ich all meinen Hörern und Kollegen, namentlich Herrn Prof. K.-H. FICHTNER, für ihre kritischen Hinweise zur Vorlesung und zu Teilen des Manuskripts. Ganz besonderer Dank gebührt meiner Studentin Frl. CH. STIEWE für die mehrmalige aufmerksame Durchsicht des Manuskripts während seiner Entstehung sowie Frau G. GIRLICH für die sorgfältige Reinschrift. Für die Anfertigung der Computerrechnungen zu den Abbildungen 63, 69, 73 und 144 bin ich Herrn Dr. T. WOLF zu Dank verpflichtet. Dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften und der verantwortlichen Lektorin, Frau K. BRATZ, danke ich für die aufgeschlossene Zusammenarbeit.

Jena, im Mai 1987

GOTTFRIED JETSCHKE

Inhaltsverzeichnis

E.	Einführung	13
E.1.	Ordnung und Selbstorganisation	13
E.2.	Selbsterregte Schwingungen einer gestrichenen Saite	15
E.3.	Dissipative Strukturen	19
1.	Deterministische dynamische Systeme	24
1.1.	Phasenfluß	24
1.2.	Gewöhnliche Differentialgleichungen	25
1.2.1.	Lösung einer Differentialgleichung	25
1.2.2.	Existenz und Eindeutigkeit	28
1.2.3.	Fortsetzbarkeit	30
1.3.	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	31
1.3.1.	Allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$	31
1.3.2.	Berechnung von e^{tA}	33
1.3.3.	Topologische Typen linearer Flüsse	38
1.4.	Stabilität von Fixpunkten	41
1.4.1.	Methode der Linearisierung	43
1.4.2.	Methode der Ljapunow-Funktion	48
1.5.	Grenzmengen und Attraktoren	52
1.6.	Zeitdiskrete Systeme (iterierte Abbildungen)	58
1.7.	Strukturelle Stabilität	65
2.	Systeme mit einem Freiheitsgrad	68
2.1.	Allgemeine Eigenschaften	68
2.2.	Weitere Beispiele	70
3.	Systeme mit zwei Freiheitsgraden	75
3.1.	Multistabilität	75
3.2.	Grenzzyklen. Satz von Poincaré	81
3.3.	Wiederkehrabbildung	84
3.4.	Van der Polsche Differentialgleichung	87
3.5.	Mittelungsverfahren	92
3.6.	Weitere Beispiele	95
3.7.	Poincaré-Index	100
4.	Systeme mit mehr als zwei Freiheitsgraden	103
4.1.	Invariante Tori	103
4.2.	Elimination schneller Variabler	105
4.3.	Selektion und Evolution	108

5.	Chaotische Attraktoren	112
5.1.	Chaos in zeitdiskreten Systemen	112
5.1.1.	Stückweise lineare Abbildungen	113
5.1.2.	Parabel-Abbildung	117
5.1.3.	Hénon-Abbildung	128
5.2.	Chaos bei Differentialgleichungen	129
5.2.1.	Lorenz-Attraktor	130
5.2.2.	Ergänzungen	136
5.3.	ω -Grenzmengen und invariante Verteilungen	138
5.4.	Eigenschaften chaotischer Attraktoren	143
5.4.1.	Ljapunow-Exponenten	143
5.4.2.	Weitere Eigenschaften	150
6.	Bifurkationstheorie	155
6.1.	Zentrale Mannigfaltigkeit	155
6.2.	Bifurkationen von Fixpunkten einparametriger Differentialgleichungen	158
6.3.	Bifurkationen von Fixpunkten einparametriger Abbildungen	168
7.	Katastrophentheorie	171
7.1.	Einführung	171
7.2.	Falten und Spitzen	176
7.3.	Elementare Katastrophen	178
8.	Reaktions-Diffusions-Systeme	183
8.1.	Grundgleichung	183
8.2.	Fixpunkte und deren Stabilität	184
8.3.	Kubische Nichtlinearität und Diffusion	187
8.4.	Brüsselator mit Diffusion	193
9.	Stochastische dynamische Systeme	199
9.1.	Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundbegriffe	199
9.2.	Stochastische Prozesse	205
9.3.	Markow-Prozesse	207
10.	Stochastische Differentialgleichungen	216
10.1.	Additives weißes Rauschen	216
10.1.1.	Modell und Lösungsbegriff	216
10.1.2.	Markow-Eigenschaft. Invariante Verteilung	218
10.1.3.	Beispiele	223
10.2.	Multiplikatives weißes Rauschen	228
10.2.1.	Lösung einer stochastischen Differentialgleichung	228
10.2.2.	Markow-Eigenschaft. Randverhalten. Invariante Verteilung	231
10.2.3.	Rauschinduzierte Übergänge	235
10.3.	Farbiges Rauschen	238
11.	Geburts- und Todesprozesse	242
11.1.	Modell und Grundgleichungen	242
11.2.	Invariante Verteilung	246

12.	Zeitdiskrete Systeme mit Rauschen	252
13.	Stochastische partielle Differentialgleichungen	255
13.1.	Modell und Lösungsbegriff	255
13.2.	Markow-Charakter und invariante Verteilung	258
13.3.	Wahrscheinlichste Zustände und Tunnelverhalten	262
A.	Anhang	266
A.1.	Mathematische Modellbildung	266
A.2.	Einzelwissenschaftliche Ergänzungen	268
A.2.1.	Mechanische Systeme	268
A.2.2.	Elektrische Systeme	269
A.2.3.	Chemische Systeme	272
A.2.4.	Biologische Systeme	276
A.3.	Thermodynamische Grundlagen	280
A.3.1.	Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht	280
A.3.2.	Nichtgleichgewichtssysteme.	284
A.3.3.	Thermodynamische Stabilitätstheorie	290
A.4.	Synergetik	296
	Lösungen der Aufgaben	301
	Weiterführende Literatur	325
	Abbildungsnachweis	329
	Sachverzeichnis	330