Der Goldene Schnitt

Albrecht Beutelspacher / Bernhard Petri

Der Goldene Schnitt

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg · Berlin · Oxford

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Beutelspacher, Albrecht:
Der Goldene Schnitt / Albrecht Beutelspacher ; Bernhard Petri. – 2., überarb. und erw. Aufl. – Heidelberg ; Berlin ; Oxford : Spektrum, Akad. Verl., 1996
ISBN-13: 978-3-8154-2511-4 e-ISBN-13: 978-3-322-85165-9
DOI: 10.1007/978-3-322-85165-9

NE: Petri, Bernhard:

Umschlaggestaltung: Kurt Bitsch, Birkenau
Reihengestaltung: Zembsch' Werkstatt München

Ein

für alle klaren und wissbegierigen Geister

nothwendiges Werk;

wo jeder Studirende

der Philosophie, Perspective, Malerei, Sculptur, Architektur, Musik

und anderer mathematischer Fächer

eine angenehme subtile und bewundernswerthe

Gelehrsamkeit antreffen

und sich mit verschiedenen Fragen der heiligsten Wissenschaft

erfreuen wird.

So begrüßt Luca PACIOLI
im Jahr 1509 die Leser seines Buches
"De Divina Proportione".

Inhalt

Vorwort

Der goldene Schnitt ???

Hat das nicht zu tun mit

... einer bestimmten Art der Teilung einer Strecke ?

... mit einer Konstruktionsvorschrift für Bauwerke ?

... Wurde nicht beim Parthenon der goldene Schnitt verwendet ??

... oder bei der Mona Lisa ???

Solche oder ähnliche Assoziationen kommen wohl jedem in den Sinn, wenn er auf den Begriff "goldener Schnitt" angesprochen wird. Das Ziel dieses Buches ist es, möglichst alle Facetten des goldenen Schnitts zu betrachten. Die Grundlage wird die Mathematik sein, aber viele Aspekte finden sich außerhalb der Mathematik. Wir haben versucht, die nicht-mathematischen Teile so darzustellen, daß man sie genießen kann, auch wenn man die mathematischen Grundlagen nur in homöopathischen Dosen geschluckt hat.

*

Schon seit der Antike wurden Menschen von einer bestimmten geometrischen Teilung einer Strecke, dem "Goldenen Schnitt", besonders angezogen. Neben der ästhetischen Anziehungskraft fallen heute vor allem dessen vielfältige Erscheinungsformen in verschiedenen Bereichen der Mathematik wie auch in anderen Gebieten wie Architektur, Kunst und Biologie auf. In diesem Buch versuchen wir, die vielfältigen Eigenschaften, Vorkommen und Anwendungsmöglichkeiten des goldenen Schnittes darzustellen. Den Schwerpunkt bilden aber die außergewöhnlichen und faszinierenden Ergebnisse im mathematischen Bereich. Dabei haben wir uns allerdings auf die Mathematik beschränkt, die man mit Schulwissen verstehen kann. Das bedeutet zum Beispiel, daß der wunderschöne Satz von TUTTE über den goldenen Schnitt in der Graphentheorie nicht behandelt werden wird.

Im ersten Kapitel werden dazu die mathematische Definition und einfache Eigenschaften des goldenen Schnittes angegeben. Dieses Kapitel enthält die

Grundlagen für alle nachfolgenden Untersuchungen, auch für das letzte Kapitel über die Ästhetik des goldenen Schnittes. Mit Hilfe der exakten Definition kann man die Frage, ob ein Künstler den goldenen Schnitt in seinen Werken wirklich verwendet hat, wesentlich klarer erörtern.

Die übrigen Kapitel sind meist in sich abgeschlossen; lediglich einige Ergebnisse aus Kapitel 6 (Fibonacci-Zahlen) werden in den darauffolgenden Kapiteln benutzt. Das bedeutet insbesondere, daß die einzelnen Kapitel nicht unbedingt in der vorgeschlagenen Reihenfolge gelesen werden müssen. Selbstverständlich kann jede Leserin (und jeder Leser), die sich für ein Kapitel besonders interessieren, nach Kapitel 1 gleich zu diesem Kapitel übergehen, ohne daraus resultierende Verständnisschwierigkeiten befürchten zu müssen.

Die Vielfalt und Fülle des Vorkommens des goldenen Schnittes hatte für uns eine Konsequenz. Wir mußten uns bei der Darstellung einer ganzen Reihe von Gebieten auf eine Auswahl beschränken. Besonders zu den Kapiteln 5 (Geometrie), 6 (Fibonacci-Zahlen), 9 (Natur) und 10 (Ästhetik) hätte sich aufgrund der vielen vorliegenden Einzeluntersuchungen noch etliches hinzufügen lassen. Wir hoffen aber, daß wir typische und repräsentative Beispiele ausgesucht haben; Leserinnen und Leser, die detailliertere Information oder weitere Beispiele suchen, werden bestimmt fündig, wenn sie das umfangreiche Literaturverzeichnis am Ende des Buches konsultieren.

*

Die Bezeichnung **goldener Schnitt** (bzw. **goldenes Verhältnis**) ist noch relativ jung. Sie setzte sich erst im 19. Jahrhundert durch. In der Zeit davor wurden andere Begriffe benutzt; in der Antike gab es offenbar noch gar keine kurze und treffende Bezeichnung für ihn; die lateinischen Übersetzer Euklids benutzten die Umschreibung "proportio habens medium et duo extrema", und bis hin zu Kepler findet man entsprechend auch die Bezeichnung "Teilung im äußeren und mittleren Verhältnis".

Der Venezianer Luca PACIOLI benutzte zu Beginn des 16. Jahrhunderts vermutlich als erster den Namen **divina proportio** (göttliches Verhältnis), der auf seine große Hochachtung gegenüber dem goldenen Schnitt hindeutet. Dieser Name wurde in der Folgezeit oft verwendet; allerdings findet man daneben auch noch weitere Ausdrücke, z.B. "sectio proportionalis" (proportionale Teilung).

*

Die Untersuchung des goldenen Schnittes war in der Antike eng verbunden mit der Untersuchung des regelmäßigen Fünfecks. TIMERDING behauptet sogar, daß Euklid erst durch seine Beschäftigung mit der Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks dazu gebracht wurde, die Aufgabe der Teilung einer Strecke im goldenen Schnitt zu stellen.

Daher beschäftigt sich das zweite Kapitel mit dem Auftreten des goldenen Schnittes beim regelmäßigen Fünfeck und, damit zusammenhängend, mit dem Pentagramm (Sternfünfeck), dem vor allem im Mittelalter magische Fähigkeiten zugeschrieben wurden.

Im dritten Kapitel werden zunächst Rechtecke untersucht, deren Seiten im Verhältnis des goldenen Schnittes stehen. Es zeigt sich, daß diese "goldenen" Rechtecke mit den sogenannten platonischen Körpern in Zusammenhang stehen. Ferner gibt es, wie in Kapitel 4 gezeigt wird, auch interessante Verbindungen zwischen goldenen Rechtecken und logarithmischen Spiralen.

Der goldene Schnitt erscheint im Bereich der Geometrie sehr häufig. Manchmal tritt er hier bei der Lösung einfacher Probleme völlig überraschend auf. Eine kleine Auswahl von Beispielen dafür ist im fünften Kapitel zusammengestellt.

Die Untersuchung der Fortpflanzung von Kaninchen, ein treppensteigender Briefträger und die Ahnentafel einer Biene bilden den Auftakt zum sechsten Kapitel. Dort werden "Fibonacci-Zahlen" und einige ihrer Zusammenhänge mit dem goldenen Schnitt vorgestellt, ein Bereich, der die zahlentheoretisch orientierten Mathematiker schon lange fasziniert. Einige weitere zahlentheoretische Ergebnisse über die Kettenbruchdarstellung des goldenen Schnittes leiten dann im siebten Kapitel über zur Theorie dynamischer Systeme, bei denen sich in ganz neuer, mathematischer Weise die Frage stellt: "Der goldene Schnitt - letzte Bastion der Ordnung im Chaos?".

Im achten Kapitel wird gezeigt, daß der goldene Schnitt auch in einem Bereich erscheint, in dem man ihn kaum vermutet: Er spielt bei der Analyse gewisser Spiele eine Schlüsselrolle.

Im 19. Jahrhundert, in dem auch eine Fülle von Literatur über den goldenen Schnitt erschien, wurden goldene Proportionen überall gesucht und (nicht allzu überraschend) auch in der Natur oder bei der Anatomie des Menschen gefunden. Einige Ergebnisse aus diesem Bereich, vor allem über erstaunliche Blatt- und Kernanordnungen (**Phyllotaxis**) und über das Vorkommen des goldenen Schnittes an der "wohlproportionierten" menschlichen Gestalt, sind im neunten Kapitel zusammengefaßt.

*

Das Interesse am goldenen Schnitt richtete sich schon seit alters her nicht nur auf dessen mathematische Eigenschaften, sondern man hoffte auch, mit seiner Hilfe eine Erklärung für den ästhetischen Eindruck bestimmter Raumformen oder sogar für das Wesen der Schönheit überhaupt, *soweit es sich in der sichtbaren Erscheinung offenbart*, zu finden.

Der reizvolle ästhetische Eindruck des goldenen Schnittes kommt unter anderem darin zum Ausdruck, daß eine große Zahl von Architekten und Künstlern aus verschiedenen Epochen ihn bei der Gestaltung ihrer Werke bewußt oder unbewußt benutzt hat. Dies werden wir im zehnten Kapitel an einer Reihe von Beispielen veranschaulichen. Die entsprechenden Künstler (bzw. ihre Interpreten) sind der Überzeugung, daß bei einem nach goldenen Verhältnissen gestalteten Kunstwerk das Ganze in einem so ausgewogenen Verhältnis zu seinen Teilen steht, daß sich beim Betrachter ein besonderes Wohlgefallen einstellt. Die Verwendung der "göttlichen Proportion" bei vielen kirchlichen Bauten deutet darauf hin, daß dem goldenen Schnitt daneben oft auch religiöse Bedeutung zugesprochen wurde. Kritisch anzumerken wird sein, daß wahrscheinlich schon die Magie des Wortes "golden" ein Garant für die hervorzurufende Wirkung ist.

Einige bemerkenswerte Beispiele für das Auftreten des goldenen Schnittes in den Bereichen Musik und Literatur runden das Bild zur Ästhetik des goldenen Schnittes ab.

Trotz vieler eindrucksvoller Beispiele und vieler theoretischer Untersuchungen wurde eine einfache rationale Erklärung für einen Zusammenhang zwischen goldenem Schnitt und Ästhetik bisher nicht gefunden. Der goldene Schnitt hat daher *immer wieder gelockt, den Weg in das Zauberland der Metaphysik zu suchen.*

*

Wir danken unzähligen Freunden für ihre zahlreichen und unschätzbaren Hinweise.

Unser Dank gilt ferner Karl von Holtei für den Titel des letzten Kapitels. Klaus Müller und Michael Gundlach haben eine ganze Reihe von Tippfehlern gefunden.

Last but not least danken wir Herrn Engesser vom B.I.-Wissenschaftsverlag für die Geduld und Beharrlichkeit, mit der er dieses Buchprojekt begleitet hat.

München, im Juni 1988

Albrecht Beutelspacher und Bernhard Petri

Für die 2. Auflage haben wir versucht, alle uns bekannt gewordenen Druckfehler zu korrigieren. Wir danken allen Lesern für Hinweise und Anregungen. Außerdem wurde das Literaturverzeichnis erheblich erweitert und ein Abschnitt über Penrose-Parkette hinzugefügt. Für die Mitarbeit an diesem Abschnitt danken wir Meike Stamer.

Wir hoffen, daß das Buch auch weiterhin Leser und Freunde findet.

Gießen und München, im August 1994

Albrecht Beutelspacher und Bernhard Petri

Vorbemerkungen und Bezeichnungen

Wenn wir geometrisch arbeiten, bewegen wir uns immer in der euklidischen Ebene oder im euklidischen Raum, also in der uns von Kindheit an vertrauten Geometrie. Axiomatik, Grundlagenforschung und ähnliche Disziplinen (die von manchen als Strategien zur Verwirrung der Leser aufgefasst werden) sind *nicht* das Thema dieses Buches.

Wir verwenden so weit wie möglich Standardbezeichnungen. Einige von ihnen seien zur Sicherheit hier wiederholt.

Punkte werden mit großen lateinischen Buchstaben, **Geraden** in der Regel mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Die **Gerade** durch die Punkte A und B wird auch AB genannt; die **Strecke** zwischen A und B wird mit $\overline{AB}$ bezeichnet, ihre **Länge** ist $|AB|$.

Ein **Vieleck** mit den Ecken $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wird abkürzend mit $A_1A_2\ldots A_n$ bezeichnet; $ABCD$ ist also ein **Viereck** mit den Eckpunkten A, B, C und D. Abweichend davon ist ΔABC das **Dreieck** mit den Ecken A, B, C.

Der **Winkel** mit den Schenkeln OA und OB wird mit $\sphericalangle AOB$ (oder $\sphericalangle BOA$) bezeichnet.

Großgeschriebene Autorennamen wie etwa COXETER verweisen auf das Literaturverzeichnis.

Querverweise wird es selten geben. Abschnitt **3** aus Kapitel **4** wird mit **4.3** zitiert. Entsprechend ist die vierte Übungsaufgabe aus Kapitel **1** die Aufgabe **1.4**.