



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Themenplan Mathematik

Mathematik griffbereit

Grundkurs

Brücke zur Höheren Mathematik

Grundbegriffe der Mathematik

Analysis

Funktionentheorie

Lineare Algebra

Analytische Geometrie

Vektoren

Wahrscheinlichkeitstheorie

Topologie

Numerische Mathematik

Einführung in die Differentialgeometrie

Ebene Geometrie

Aufbaukurs

Höhere Algebra

Funktionalanalysis

Variationsrechnung

Distributionen

Gruppentheorie

Projektive Geometrie

Höhere Geometrie (mit Differentialgeometrie)

Logik

Kombinatorische Zahlentheorie

Integral und Maß

(Über die bereits erschienenen Titel informiert
das neueste Rowohlt-Verzeichnis)



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

«rororo vieweg» wird vom Rowohlt Taschenbuch Verlag in Zusammenarbeit mit dem Verlag Vieweg herausgegeben. Das Programm umfaßt die Gebiete Mathematik, Physik, Chemie und Biologie und wird abgerundet durch die Bände «Basiswissen», in denen fachübergreifende Themen und wissenschaftstheoretische Grundlagen behandelt werden. Die Studienkomplexe der einzelnen Fächer gliedern sich in Grundkurse, Aufbaukurse und begleitende Kompendien, in denen der Stoff «griffbereit» dargestellt ist.

«rororo vieweg» wendet sich vor allem an den Studenten der mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächer, aber auch an den Schüler der Sekundarstufe II, der sich auf sein Studium vorbereiten will. Darüber hinaus möchte «rororo vieweg» auch dem Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieur in Lehre und Praxis die Möglichkeit bieten, sein Wissen anhand einer organisch aufgebauten Arbeitsbibliothek ständig zu ergänzen und es über das eigene Spezialgebiet hinaus auf dem neuesten Stand zu halten.

R

Ernst Kunz

Ebene Geometrie

Axiomatische Begründung
der euklidischen und
nichteuklidischen Geometrie

Mit 15 Bildern und 97 Figuren

Mathematik
Grundkurs



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Dr. rer. nat. Ernst Kunz ist ord. Professor am
Mathematischen Institut der Universität Regensburg

(Eine Kurzbiographie des Autors steht auf Seite 146)

Redaktion: Verlag Vieweg, Wiesbaden

Veröffentlicht im Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH,

Reinbek bei Hamburg, Mai 1976

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1976

Ursprünglich erschienen bei Vieweg Verlag 1976

Alle Rechte vorbehalten

Umschlagentwurf Werner Rebhuhn

Satz Vieweg, Braunschweig

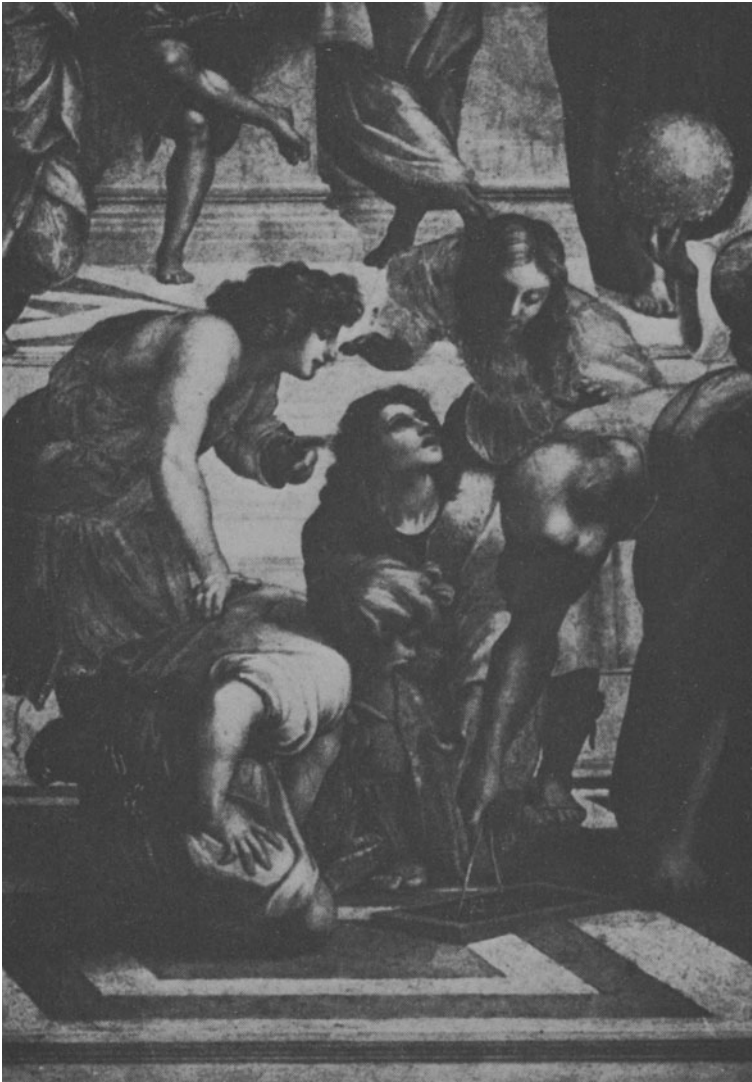
ISBN 978-3-528-07226-1

ISBN 978-3-322-85031-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-85031-7

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
Einleitung	3
§ 1 Punkte und Geraden	7
§ 2 Strecken	19
§ 3 Bewegungen	39
§ 4 Kongruenz	57
§ 5 Strecken- und Winkelmessung	67
§ 6 Einige Folgerungen aus dem Parallelenaxiom	83
§ 7 Einführung von Koordinaten	95
§ 8 Die Poincarésche Halbebene als Modell der nichteuklidischen Geometrie . . .	103
§ 9 Nichteuklidische Bewegungen	111
§ 10 Nichteuklidische Abstandsmessung	125
Liste der verwendeten Symbole	137
Zusammenstellung der im Text als bekannt vorausgesetzten mathematischen Grundbegriffe	138
Lösung der Schachaufgabe auf Seite 51	140
Literaturhinweise	141
Quellennachweis der Bilder	142
Sachregister	144
Kurzbiographie des Autors	146



Raffael: Euklid mit vier Schülern (vier Stufen der Erkenntnis darstellend)
Ausschnitt aus dem Fresko «Die Schule von Athen» (1509–1510)

Der aller scharff sinnigst Euclides / hat den grundt
der Geometria zusamē gefest wer den selben woll versteht / der darff diser
hernach geschriben ding gar nit / dann sie sind alleyn den
jungē vnd denen so sonst niemandt haben
der sie trewlich vnderweyßt geschriben.

A. Dürer: Einleitung zu [6]

Vorwort

Dieses Taschenbuch ist aus einer Vorlesung hervorgegangen, die ich an der Universität Regensburg für Studierende gehalten habe, die Lehrer an Gymnasien oder Realschulen werden wollen. In dieser Vorlesung hatte ich mir vorgenommen, einen strengen axiomatischen Aufbau der euklidischen Geometrie zu geben, wobei die Beziehung zur Schulgeometrie immer sehr eng bleiben sollte. Es sollte ein Axiomensystem angegeben werden, durch das die ebene euklidische Geometrie eindeutig festgelegt wird, und es sollte versucht werden, ausgehend von den Axiomen, rigorose Beweise für einige klassische Sätze zu geben, die in der Schulgeometrie eine wichtige Rolle spielen. Darüber hinaus war beabsichtigt, die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome zu diskutieren und insbesondere – als ein Hauptanliegen der Vorlesung – die Unabhängigkeit des euklidischen Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie zu beweisen durch Konstruktion des Poincaréschen Modells für die nichteuklidische (hyperbolische) Geometrie. Ausblicke auf andere Geometrien, meist in Übungen behandelt, sollten den Vorlesungsstoff ergänzen.

Bei den Hörern der Vorlesung handelte es sich um Studierende, die bereits ein Studienjahr in Mathematik absolviert hatten und bei denen Vertrautheit mit der modernen mathematischen Denkweise, der mengentheoretischen Sprache und Grundtatsachen der Analysis und linearen Algebra vorausgesetzt werden konnte.

Das Taschenbuch, das den Inhalt der Vorlesung wiedergibt, richtet sich an einen ähnlichen Personenkreis. (Beim Schreiben des Textes hatte der Autor als typischen Leser einen Studierenden der Mathematik im dritten Fachsemester vor Augen). Entsprechend der Intention dieser Taschenbuchreihe, ein ziemlich breites Publikum anzusprechen, ist die Darstellung sehr ausführlich und möglichst elementar gehalten; gewisse Teile des Textes können mit ganz geringen Vorkenntnissen gelesen werden. Über den logischen Aufbau des Buches informiert die Einleitung. Eine Liste der ohne Erläuterung verwendeten Begriffe aus der Mengenlehre, der Analysis und der linearen Algebra befindet sich auf Seite 138 f.

Im Zusammenhang mit der Reform des Unterrichts in der Oberstufe der Gymnasien wird seit einiger Zeit die Einführung neuer Unterrichtsgegenstände diskutiert, zu denen u. a. die „Inzidenzgeometrie“ und die „nichteuclidische Geometrie“ gehören und die in „Leistungskursen“ für Mathematik unterrichtet werden sollen. Das Taschenbuch soll dem Leser eine erste Einführung in diese Gebiete vermitteln. Es enthält, was nach Meinung des Autors jedem Lehrer an einer höheren Schule über die axiomatische Grundlegung der Geometrie bekannt sein sollte. Es möchte ferner dazu beitragen, daß der Leser die Diskussion um den neuen Unterrichtsstoff sachkundig zu verfolgen vermag und daß er ihn als Lehrer auch unterrichten kann, sofern diese Gegenstände in den Lehrplan übernommen werden.

Nach Ansicht des Autors sollte dies jedoch nur dann geschehen, wenn die gründliche Behandlung wichtiger traditioneller Unterrichtsgebiete wie z. B. der Infinitesimalrechnung und analytischen Geometrie nicht beeinträchtigt wird, da diese Gebiete mehr mathematische Substanz und viel mehr Anwendungen innerhalb und außerhalb der Mathematik besitzen als es z. B. für die Inzidenzgeometrie der Fall ist.

Bei der Vorbereitung dieses Taschenbuchs haben mir die Herren Dipl.-Math. A. Axenbeck und H. Pöschl geholfen, die viele Verbesserungsvorschläge beitrugen. Frau K. Zirngibl hat das Manuskript ebenso schnell wie sorgfältig druckfertig gemacht. Diesen Mitarbeitern spreche ich für Ihre Mühe meinen herzlichen Dank aus.

Regensburg, Oktober 1975

Ernst Kunz