

Klemens Döpp

**Berechenbarkeit
und Unlösbarkeit**

Klemens Döpp

Berechenbarkeit und Unlösbarkeit

**Eine kurze Einführung
für Mathematiker und Informatiker**



Prof. Dr. Klemens Döpp
Lagemannstr. 3a
57258 Freudenberg

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei
Der Deutschen Bibliothek erhältlich.

1. Auflage September 2000

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 2000

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

www.vieweg.de

Konzeption und Layout des Umschlags: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN-13: 978-3-528-05715-2

e-ISBN-13: 978-3-322-83091-3

DOI: 10.1007/ 978-3-322-83091-3

Für Hans Hermes

Vorwort

Während meiner Dozententätigkeit habe ich hin und wieder Vorlesungen über Gebiete gehalten, von denen ich erst wenig wusste. Meistens geschah dies aus eigenem Antrieb, weil ich mich dem Zwang aussetzen wollte, eine bestehende Wissenslücke zu schließen. Dabei wollte ich aber nicht immer besonders weit in das fragliche Gebiet eindringen, um selbst daran zu arbeiten; vielmehr wollte ich in den meisten Fällen nur einen gewissen Einblick in die Fragestellungen, Methoden und Ergebnisse dieses Gebietes gewinnen. Bei solchen Gelegenheiten habe ich mich öfters darüber geärgert, dass ich kein für meine Zwecke geeignetes Lehrbuch fand. Gewöhnlich waren die Lehrbücher zu dick, als dass man ihren Stoff in einer einzigen Vorlesung hätte behandeln können, und meistens auch von vornherein zu breit angelegt, als dass es sinnvoll gewesen wäre, das Buch nur so weit zu besprechen, wie man eben hätte kommen können. So war ich also meistens darauf angewiesen, mir aus der greifbaren Literatur meine eigene Vorlesung zusammenzustellen, obgleich ich es eigentlich vollkommen sinnlos fand, bei der Einführung in einen Standardstoff originell zu sein. Ehrlicherweise muss ich allerdings zugeben, dass es mir sogar zweimal vergönnt gewesen ist, auf ein genügend dünnleibiges (aber nicht auch in seinem Gehalt dünnes) Werk zurückgreifen zu können.

Neben der mir inzwischen näher liegenden Sichtweise des Lehrenden steht mir aber auch noch die Zeit meines Studiums vor Augen: Damals empfand ich es immer als überaus lästig, die Vorlesungen nicht nur inhaltlich möglichst verstehen, sondern gleichzeitig auch noch alles Wesentliche mitschreiben zu müssen; liebend gern hätte ich mich allein aufs Zuhören und Mitdenken beschränkt. Das ging aber meistens nicht, weil es bedeutet hätte, in verfügbaren Büchern sich in eine oft von der Vorlesung abweichende Darstellungsweise einarbeiten und darüber hinaus einen viel umfangreicheren Stoff einverleiben zu müssen - als Lernender ist man jedoch oft schon froh, wenn man den knapperen Stoff aus der Vorlesung überhaupt erst einmal verstanden hat. Jedenfalls hätte ich als Student oft viel für ein Buch gegeben, in dem im Wesentlichen nur der Vorlesungsstoff behandelt war.

Dieses Buch soll nun die leider wohl nur kurze Reihe von Lehrbüchern der von mir - natürlich nur *neben* umfassenden Standardwerken - für wünschenswert gehaltenen Art verlängern. Es enthält in seinen ersten drei Kapiteln gerade so viel Stoff, wie ich in einer einsemestrigen Vorlesung mit vier Wochenstunden behandeln konnte. Diese drei Kapitel bilden bereits eine in sich geschlossene Einheit, die nicht unbedingt eine Ergänzung durch das vierte Kapitel erfordert. Dieses habe ich u.a. deshalb angefügt, weil mir vorschwebt, dass ich in meinen

jugen Jahren wesentlich schneller vorgegangen bin als in meinen späteren; ich wollte also einen draufgängerischeren Benutzer, als ich einer wäre, vor der Verlegenheit bewahren, sich mitten im Semester nach weiterem Material zur Fortsetzung seiner Veranstaltung umsehen zu müssen. Natürlich halte ich das vierte Kapitel aber auch für eine inhaltlich sinnvolle Ergänzung der ersten drei. -

Die Theorie der algorithmischen Berechenbarkeit ist mir immer als ein besonders reizvoller Zweig der mathematischen Grundlagenforschung erschienen und als der in gewissermaßen *erkenntnistheoretischer* Hinsicht interessanteste Teil der theoretischen Informatik. Ihr *praktischer* Nutzen für einen Informatiker ist sicher nicht ganz so groß; sie verschafft diesem aber die Einsicht, dass nicht jeder Problemkreis algorithmisch lösbar ist, und vermittelt vielleicht auch eine gewisse Vorstellung davon, welche Art von Aufgabenstellung zu algorithmisch unlösbaren Problemklassen führen kann, wodurch er später vielleicht vor von vornherein zur Fruchtlosigkeit verurteilten Bemühungen bewahrt bleibt.

Von dieser Theorie ist in den ersten drei Kapiteln des Buches so viel enthalten, wie nach meinem subjektiven Dafürhalten zu einer grundlegenden und soliden Einführung sowohl Mathematiker als auch Informatiker mit einem Interesse an den Grundlagen ihres Fachs wissen sollten, um mit den grundsätzlichen Fragestellungen und Lösungsansätzen vertraut zu sein. Bei weitem nicht beansprucht wird jedoch, dass das Buch auch nur annähernd einen Überblick über die mit dem behandelten Gebiet zusammenhängenden Fragestellungen und Ergebnisse geben soll. Insbesondere konnte aufgrund der gewählten Beschränkung des Umfangs nur auf einen winzigen Bruchteil der zahllosen Anwendungen der allgemeinen Theorie eingegangen werden. Die grundlegenden Ansätze und Methoden werden aber so weit vorgeführt, dass es von dieser Basis aus nicht schwer fallen dürfte, bei Bedarf oder Neigung tiefer in das eröffnete Gebiet einzudringen.

Als behandeltes Thema kann das - in grundsätzlicher Hinsicht erörterte - Leistungsvermögen von informationsverarbeitenden Maschinen betrachtet werden; deshalb lässt sich das Buch - neben der mathematischen Grundlagenforschung - auch der *Informatik* zuordnen. Von der Methodik der dargestellten Untersuchungen her (sowie aus wissenschaftshistorischen Gründen) gehört es aber zugleich zur *Mathematik*. Was Mathematik ausmacht, lässt sich wohl kaum zufrieden stellend von den behandelten Gegenständen her bestimmen, jedoch sehr einfach von der angewendeten Methodik her, die nämlich in *logischer Deduktion* besteht. Das Thema des Buches muss somit zur *Mathematik informatischer Phänomene* gerechnet werden, und dies ist gerade die theoretische Informatik

(wie etwa die Geometrie in ihren verschiedenen Spielarten die Mathematik räumlicher Phänomene ist). -

Weil die Mathematiker sich wohl darin einig sind, dass man mathematische Sachverhalte nicht richtig verstehen kann, ohne zugehörige *Beweise* verstanden zu haben, habe ich großen Wert auf eine sorgfältige und ausführliche Darstellung der Beweise gelegt. Da man andererseits aber auch nicht gut ausnahmslos die Feinmaschigkeit von formalen Logikkalkülen durchhalten kann, habe ich natürlich bei vielen Gelegenheiten einfache Schlüsse dem Leser überlassen. Solche Gelegenheiten habe ich in aller Regel durch Wendungen wie "offenbar" oder "ersichtlich" usw. angekündigt. Zumindest bei mathematischen Erörterungen haben derartige Floskeln hier niemals die Funktion von bloßen Ausschmückungen; vielmehr deuten sie immer darauf hin, dass es eine Kleinigkeit zu überlegen gibt. Ich hoffe aber, dass es mir wenigstens weitgehend gelungen ist zu vermeiden, solche Wendungen in der Bedeutung von "es wäre noch viel mühsamer, den fraglichen Sachverhalt ordentlich darzustellen, als es schon schwierig ist, ihn einzusehen" zu benutzen, in der sie ja auch manchmal gebraucht werden.

Ganz im Gegenteil habe ich - zumindest im Hauptstrang der Darstellung - dem Leser das selbstständige Ausfüllen von kleinen Lücken nur in solchen Fällen überlassen, wo dies wirklich in offenkundiger Weise geschehen kann und keinerlei Eingebung mehr erfordert. Demgegenüber viel näher zu liegen scheint mir die Vorhaltung, ich sei streckenweise etwas weitschweifig vorgegangen. Dies ist jedoch nicht ohne Absicht erfolgt: Aus meiner Studienzeit weiß ich noch gut, dass auch Studierende der Mathematik, denen man ja ein Interesse an mathematischen Dingen unterstellen darf, auf eine vollständige Darstellung der Gedankengänge Wert legen und es nicht besonders schätzen, wenn ihnen zum Verständnis des Vorgetragenen zuviel an Eigenarbeit aufgebürdet wird. In viel größerem Ausmaß gilt dies jedoch für Studierende der Informatik: Viele Informatiker betrachten nämlich die mathematischen Anteile ihres Studiums - einschließlich der Mathematik informatischer Phänomene - als lästiges Übel, das sie möglichst rasch hinter sich bringen möchten. Bei meiner Lehrtätigkeit hatte ich jedoch verschiedentlich den Eindruck, dass diese Abneigung gegen Mathematik häufig nur am Fehlen jeglicher Geschicklichkeit im Umgang mit Mathematischem liegt. Wenn ich gelegentlich in Übungen dazu kam, einen mathematischen Gedankengang so breit zu walzen, dass es mir fast schon peinlich wurde, schien mir bei manchen Teilnehmenden ein sonst nicht beobachtetes Interesse aufzuglimmen, weil endlich einmal nicht gänzlich über ihre Köpfe hinweg geredet wurde. Leider sind solche Gelegenheiten ziemlich selten geblieben, weil ich ja auch an bestimmte Vorgaben gebunden war und das überkommene Verhältnis von Ver-

anstellungsaufwand und Eigenarbeit nicht auf eigene Faust durchgehend verändern konnte. Deshalb kann ich auch nicht als gesicherte Erfahrung behaupten, dass sich die unter Informatikern verbreitete Mathematikverdrossenheit durch unübliche Ausführlichkeit wenigstens weitgehend beheben ließe; aufgrund meiner Eindrücke habe ich mir aber oft gewünscht, über die dreifache Zeit verfügen zu können, unter der strikten Auflage, auch nicht mehr an Stoff zu behandeln als sonst. Dies mag als Begründung für gelegentlich vielleicht unüblich große Ausführlichkeit dienen. -

Zur Einführung der *Turingmaschinen* im ersten Kapitel möchte ich noch anmerken, dass ich eigentlich gern eine Darstellung gewählt hätte, die sich der Automatenhierarchie aus der theoretischen Informatik besser einfügt als die tatsächlich gegebene. Dass es nicht dazu gekommen ist, liegt an den *Gödelisierungen* zum Beweis des *Normalformentheorems* im zweiten Kapitel. Ich habe nämlich die Vorstellung, dass diese Gödelisierungen bei der gewählten Darstellung erheblich weniger Aufwand erfordern als bei der erwähnten "automatentheoretischen". Allerdings ist dies eine bloße Vermutung. Ich hätte gern einmal die vollständige Durchführung des Alternativprogramms als Diplomarbeit vergeben, um wenigstens einen empirisch begründeten Vergleich ziehen zu können, aber von den Informatikern, mit denen ich zu tun hatte, hat sich leider niemand so recht für diese Aufgabe erwärmt. Mir selbst war dies natürlich auch zu mühsam, und da es ja grundsätzlich nur darauf ankommt, irgendeine geeignete Präzisierung der intuitiven Algorithmuskonzeption vorzunehmen, ist es bei der nur mutmaßlich bequemer Version geblieben. -

Das Buch ist in *Kapitel* gegliedert, die mit arabischen Ziffern nummeriert und wiederum in ebenso nummerierte *Paragrafen* unterteilt sind. Die Bezeichnungen "Kapitel" bzw. "Paragraf" werden jedoch nur bei Verweisen im Text gebraucht und tauchen in den Überschriften nicht auf. Die arabisch geschriebene Nummerierung der einzelnen *Definitionen* und *Sätze* beginnt in jedem Paragrafen von Neuem jeweils gewöhnlich mit 1; gelegentlich weist allerdings die Nummer 0 darauf hin, dass der fragliche Satz bzw. die betroffene Definition aus einem allgemeineren, nicht spezifisch berechenbarkeitstheoretischen Zusammenhang stammt und hauptsächlich der Geschlossenheit halber nochmals aufgeführt wird. Gelegentlich werden verschiedene Fassungen desselben Satzes angegeben; dann erhält die später genannte Fassung dieselbe Nummer mit einem zusätzlichen Stern. Entsprechendes gilt auch für Definitionen. - Innerhalb desselben Paragrafen wird auf einen Satz bzw. eine Definition nur mit der einfachen Nummer verwiesen, in einem anderen Paragrafen desselben Kapitels wird die zugehörige Paragrafennummer vorangestellt, und erst bei Verweisen aus einem anderen Kapitel wird die volle Nummerierung benutzt. Beispielsweise

wird Satz 3 aus §4 des zweiten Kapitels ggf. in §2.4 als Satz 3 angeführt, in den anderen Paragraphen desselben Kapitels als Satz 4.3 und in den übrigen Kapiteln als Satz 2.4.3. -

Eine Reihe der gestellten *Aufgaben* enthält Ergänzungen des im Text behandelten Stoffs; einige andere dienen lediglich zur Einübung des Gelernten, und ihre Lösungen ergeben sich beinahe von selbst aus später erarbeiteten Sachverhalten. Zumindest mit den gegebenen Hinweisen auf mögliche Lösungsansätze dürften die Aufgaben nicht allzu schwierig sein, einige sind jedoch etwas aufwendig. -

Schließlich möchte ich dem Verlag Vieweg für seine freundliche Förderung dieses Vorhabens und die stets angenehme Zusammenarbeit herzlich danken.

Freudenberg, im Dezember 1999

Klemens Döpp

Inhaltsverzeichnis

1. Turing-Berechenbarkeit	1
1.1. Turingmaschinen.....	1
1.2. Programmierung von Turingmaschinen.....	23
1.3. Turing-berechenbare Funktionen.....	39
2. Partiiell-rekursive Funktionen	73
2.1. Rekursive Funktionen.....	73
2.2. Folgezahlen.....	85
2.3. Definition durch Rekursion.....	94
2.4. Rekursivität der Turing-berechenbaren Funktionen.....	100
2.5. Indexfunktionen.....	116
3. Unlösbarkeit	127
3.1. Aufzählbarkeit.....	127
3.2. Arithmetische Prädikate.....	133
3.3. Unlösbare Problemklassen.....	147
4. Abstrakte Berechenbarkeitsbegriffe	165
4.1. Axiomatische Kennzeichnung.....	165
4.2. Verwandtschaft von Berechenbarkeitsbegriffen.....	186
Aufgaben	210
Anhang 1: Zur Bedeutung der verwendeten logischen Symbole.....	220
Anhang 2: Zu den Begriffen der Funktion und der Relation.....	229
Anhang 3: Erklärung einiger Bezeichnungen.....	236
Literaturhinweise	237
Stichwörterverzeichnis	239