Teil II
Mengenlehre

Alle Gegenstände der Mathematik sind Mengen oder auch Klassen von Mengen: Ein metrischer Raum zum Beispiel besteht aus einer Menge X und einer *Funktion* $d: X \times X \to \mathbb{R}$. Dabei ist $X \times X$ die Menge aller *Paare* (x, y) von Elementen $x, y \in X$. Ein Paar ist eine Menge, nämlich das Kuratowski-Paar

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Eine Funktion d ist die Menge aller Argument/Wert-Paare $(y, d(y))$.

Eine *reelle* Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ ist eine Äquivalenzklasse von Cauchyfolgen *rationaler* Zahlen. Eine *Folge* ist eine Abbildung, die auf der Menge der *natürlichen* Zahlen definiert ist. Eine rationale Zahl r kann aufgefaßt werden als die Menge aller *Tripel* $(m, n, s) = (m, (n, s))$ von natürlichen Zahlen mit $r = \frac{m-n}{s}$.

Inwiefern sind nun natürliche Zahlen Mengen? Die Zahl n sollte eine möglichst einfache Menge mit genau n Elementen sein. Also bietet sich die folgende rekursive Definition an:

$$n = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Das ist jeweils eine Definition für jede Zahl. Eine Definition für die Klasse aller natürlichen Zahlen geben wir in Kap. 9.

Das alles wird in der Zermelo-Fränkelschen Mengenlehre (ZFC) geschehen, der heute allgemein verwendeten Axiomatisierung der Mengenlehre. Für ein weiterführendes Lehrbuch verweise ich auf [16].