

Progress in Mathematics

Volume 317

Series Editors

Antoine Chambert-Loir, *Université Paris-Diderot, Paris, France*

Jiang-Hua Lu, *The University of Hong Kong, Hong Kong SAR, China*

Yuri Tschinkel, *Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, USA*

More information about this series at <http://www.springer.com/series/4848>

Colette Moeglin • Jean-Loup Waldspurger

Stabilisation de la formule des traces tordue

Volume 2

 Birkhäuser

Colette Moeglin
CNRS/Institut de Mathématiques
de Jussieu-Paris-Rive-Gauche
Paris, France

Jean-Loup Waldspurger
CNRS/Institut de Mathématiques
de Jussieu-Paris-Rive-Gauche
Paris, France

ISSN 0743-1643 ISSN 2296-505X (electronic)
Progress in Mathematics
ISBN 978-3-319-30057-3 ISBN 978-3-319-30058-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-319-30058-0

Library of Congress Control Number: 2016959578

Mathematics Subject Classification (2010): 11F70, 11F72, 22E50, 22E55

© Springer International Publishing Switzerland 2016

This work is subject to copyright. All rights are reserved by the Publisher, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, reuse of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in any other physical way, and transmission or information storage and retrieval, electronic adaptation, computer software, or by similar or dissimilar methodology now known or hereafter developed.

The use of general descriptive names, registered names, trademarks, service marks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.

The publisher, the authors and the editors are safe to assume that the advice and information in this book are believed to be true and accurate at the date of publication. Neither the publisher nor the authors or the editors give a warranty, express or implied, with respect to the material contained herein or for any errors or omissions that may have been made.

Printed on acid-free paper

This book is published under the trade name Birkhäuser, www.birkhauser-science.com
The registered company is Springer International Publishing AG
The registered company address is: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

Table des matières

Volume 2

Préface	xxv
VI La partie géométrique de la formule des traces tordue	
Introduction	589
VI.1 Les définitions	591
VI.1.1 Groupes et espaces tordus	591
VI.1.2 Remarque sur les hypothèses	595
VI.1.3 Mesures sur les espaces $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$	595
VI.1.4 Formule de descente des (\tilde{G}, \tilde{M}) -familles	596
VI.1.5 Caractères pondérés	598
VI.1.6 L'application $\phi_{\tilde{M}}$	599
VI.1.7 Une propriété globale de l'application $\phi_{\tilde{M}}$	601
VI.1.8 Espaces de distributions	602
VI.1.9 Intégrales orbitales pondérées	602
VI.1.10 Système de fonctions B	604
VI.1.11 Intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes	605
VI.1.12 Une propriété de support	606
VI.1.13 Le cas non ramifié	607
VI.1.14 Intégrales orbitales pondérées invariantes et systèmes de fonctions B	607
VI.1.15 Variante avec caractère central	613
VI.1.16 K -espaces	615
VI.1.17 K -espaces de Levi	618
VI.2 La partie géométrique de la formule des traces	621
VI.2.1 La partie géométrique de la formule des traces non invariante	621
VI.2.2 Le terme unipotent de la formule des traces non invariante	623
VI.2.3 Les distributions associées à une classe rationnelle semi-simple	625

VI.2.4	Développement de la partie géométrique de la formule des traces non invariante	630
VI.2.5	Variante avec caractère central	630
VI.2.6	Variante avec caractère central, suite	639
VI.2.7	La partie géométrique de la formule des traces ω -équivariante	641
VI.2.8	La partie géométrique de la formule des traces invariante, variante avec caractère central	643
VI.2.9	Variante pour les K -espaces	643
VI.3	Endoscopie	644
VI.3.1	Données endoscopiques	644
VI.3.2	Plongements de tores et ramification	645
VI.3.3	Données auxiliaires	648
VI.3.4	Levi	650
VI.3.5	La partie géométrique de la formule des traces invariante pour une donnée endoscopique	651
VI.3.6	Facteur de transfert global, cas particulier	652
VI.3.7	Utilisation du facteur de transfert global, cas particulier	664
VI.3.8	Une construction auxiliaire	666
VI.3.9	Facteur de transfert global, cas général	671
VI.3.10	Adaptation aux K -espaces	676
VI.4	Intégrales orbitales pondérées et endoscopie	677
VI.4.1	Intégrales orbitales pondérées invariantes stables	677
VI.4.2	Formules de décomposition	678
VI.4.3	Une propriété de support	683
VI.4.4	Le système de fonctions $B^{\tilde{G}}$	684
VI.4.5	Intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes endoscopiques	685
VI.4.6	Le résultat de comparaison des intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes	691
VI.4.7	Une autre forme du résultat de comparaison	691
VI.4.8	Le cas quasi-déployé et à torsion intérieure	692
VI.5	La formule des traces stable	692
VI.5.1	Quelques définitions	692
VI.5.2	Les distributions $SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O})$	694
VI.5.3	Propriétés des distributions $SA^{\tilde{G}}(V, \mathcal{O})$	695
VI.5.4	Les distributions $A^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(V, \mathcal{O}, \omega)$	696
VI.5.5	Le théorème d'Arthur	697
VI.5.6	Un théorème complémentaire concernant l'endoscopie non standard	697

VI.5.7	Réduction du théorème 5.6	700
VI.5.8	Insertion du théorème 5.6 dans les hypothèses de récurrence	703
VI.5.9	La formule stable	704
VI.5.10	Le théorème principal	705
VI.6	Preuve conditionnelle du théorème 5.10	705
VI.6.1	Rappel	705
VI.6.2	Au sujet des constantes	706
VI.6.3	Combinatoire des sommes	707
VI.6.4	Remarque sur l'action des groupes d'automorphismes de données endoscopiques	708
VI.6.5	La combinatoire	708
VI.6.6	Un résultat d'annulation	710
VI.6.7	Une première proposition auxiliaire	712
VI.6.8	Une deuxième proposition auxiliaire	714
VI.6.9	Réduction de la proposition 6.6	714
VI.6.10	Preuve de la proposition 6.8	719
VI.6.11	Le théorème 5.10	745
VII Descente globale		
	Introduction	747
VII.1	Coefficients et classes de conjugaison stable	749
VII.1.1	Ensemble de paramètres	749
VII.1.2	Classes de conjugaison stable semi-simples	751
VII.1.3	Le cas quasi-déployé à torsion intérieure	756
VII.1.4	Le cas local	757
VII.1.5	Rappels sur le cas local non ramifié	757
VII.1.6	Paramètres dans le cas local non ramifié	760
VII.1.7	Paramètres et endoscopie	763
VII.1.8	Retour sur la correspondance entre classes de conjugaison stable	765
VII.1.9	Distributions associées à un paramètre	767
VII.1.10	Distributions stables et endoscopiques associées à un paramètre	768
VII.1.11	Formules dans la situation avec caractère central	770
VII.1.12	Relation avec les distributions associées aux classes de conjugaison stable locales	772
VII.2	Formules de scindage	774
VII.2.1	Complément sur le lemme fondamental pondéré	774
VII.2.2	Version globale du lemme fondamental pondéré	777
VII.2.3	Enoncé des formules de scindage	779

VII.2.4	Preuve de la proposition 2.3	781
VII.2.5	Extension de l'ensemble fini de places	787
VII.3	Enoncés de nouveaux théorèmes	787
VII.3.1	Le théorème d'Arthur	787
VII.3.2	Définition d'une autre distribution stable	788
VII.3.3	Enoncé du théorème principal	790
VII.3.4	Le théorème 3.3 implique les théorèmes 3.2, 1.10(ii) et [VI] 5.2	790
VII.3.5	Le théorème 3.3 implique presque les théorèmes 1.10(i) et [VI] 5.4	792
VII.3.6	Le théorème [VI] 5.4 implique le théorème 1.10(i) et étend le théorème 3.3	793
VII.3.7	Quelques cas faciles	794
VII.4	Distributions à support unipotent	795
VII.4.1	Mesures de Tamagawa	795
VII.4.2	Compatibilité des mesures	796
VII.4.3	Coefficients et revêtement	799
VII.4.4	Preuve de la proposition 4.3	800
VII.4.5	Données endoscopiques et revêtement	806
VII.4.6	Coefficients stables et revêtement	809
VII.5	Descente	811
VII.5.1	Une première transformation	811
VII.5.2	Descente des données endoscopiques	814
VII.5.3	La sous-somme attachée à une donnée endoscopique \mathbf{H}	817
VII.5.4	Propriétés de relevance	818
VII.5.5	Les places hors de V	820
VII.5.6	Une conséquence	822
VII.5.7	Facteurs de transfert	825
VII.5.8	Début du calcul	826
VII.5.9	Utilisation du théorème [VI] 5.6	830
VII.6	Calculs de facteurs de transfert	833
VII.6.1	Rappels cohomologiques	833
VII.6.2	Groupes de cohomologie abélienne	835
VII.6.3	Un lemme de densité	836
VII.6.4	Fibres de la descente	837
VII.6.5	Dualités	844
VII.6.6	Description d'un annulateur	847
VII.6.7	L'ensemble $D_{\mathbb{A}_F}$	849
VII.6.8	L'ensemble D_F	854
VII.6.9	Un résultat d'annulation	857

VII.6.10	Comparaison de deux facteurs de transfert	868
VII.7	Le cas où $D_F[d_V]$ est non vide	871
VII.7.1	Une proposition de nullité	871
VII.7.2	Premier calcul d'une expression intervenant en 5.9	873
VII.7.3	Mise en place de la situation	873
VII.7.4	Une première propriété de nullité	876
VII.7.5	Description de l'ensemble $\mathcal{Y}_*[d_V]$	878
VII.7.6	Définition d'un homomorphisme \mathbf{q}_∞	881
VII.7.7	L'image de l'homomorphisme \mathbf{q}_∞	886
VII.7.8	Un caractère de Q_∞	894
VII.7.9	Preuve de la proposition 7.1	899
VII.7.10	Calcul d'une constante	900
VII.7.11	Calcul de $ P^0 $	900
VII.7.12	Un premier calcul de $ P^0 \mathbb{U} ^{-1}$	903
VII.7.13	Comparaison de deux mesures de Tamagawa	907
VII.7.14	Calcul de $d(I_*, G)$	910
VII.7.15	Preuve de la proposition 7.10	915
VII.7.16	Calcul final	915
VII.8	Preuve du théorème 3.3	916
VII.8.1	Suite du calcul de la section 5	916
VII.8.2	Élimination de la somme en \mathbf{H}	917
VII.8.3	Élimination des revêtements simplement connexes	918
VII.8.4	Fin de la preuve	919
VII.9	Preuve du théorème [VI] 5.6	923
VII.9.1	Rappel de l'énoncé du théorème	923
VII.9.2	Le lemme fondamental pondéré non standard	923
VII.9.3	Extension aux Levi	925
VII.9.4	Globalisation	926
VII.9.5	Généralisation du théorème 9.1	928
VII.9.6	Extension de l'ensemble fini de places	930
VII.9.7	Preuve du théorème 9.1	931
VIII	L'application $\epsilon_{\tilde{M}}$ sur un corps de base local non-archimédien	
	Introduction	933
VIII.1	L'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}$	935
VIII.1.1	Définition de fonctions combinatoires	935
VIII.1.2	Fonctions rationnelles	936
VIII.1.3	L'application ${}^c\phi_{\tilde{M}}$	938
VIII.1.4	Propriétés de l'application ${}^c\phi_{\tilde{M}}$	941
VIII.1.5	Définition de l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}$	945
VIII.1.6	Propriétés de l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^G$	947

VIII.1.7	Fonctions de Schwartz	950
VIII.1.8	Une propriété d'annulation	952
VIII.1.9	Une variante des intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes	954
VIII.2	Stabilisation de l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}$	956
VIII.2.1	Fonctions $\omega_{\tilde{S}}$ et endoscopie	956
VIII.2.2	Les applications ${}^cS\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$	957
VIII.2.3	Commutation à l'induction	959
VIII.2.4	Une propriété d'annulation	959
VIII.2.5	Une variante des intégrales orbitales pondérées stables	960
VIII.3	L'application endoscopique ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}$	961
VIII.3.1	Définition d'une première application endoscopique	961
VIII.3.2	Action d'un groupe d'automorphismes	962
VIII.3.3	Commutation à l'induction	962
VIII.3.4	Définition de ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}$	963
VIII.3.5	Commutation à l'induction	964
VIII.3.6	${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{f})$ est de Schwartz	965
VIII.3.7	Une propriété d'annulation	967
VIII.3.8	Egalité de deux applications linéaires	968
VIII.3.9	Variante des intégrales orbitales pondérées elliptiques	968
VIII.4	Les preuves et l'application $\epsilon_{\tilde{M}}$	970
VIII.4.1	Lien entre les intégrales orbitales pondérées stables ou endoscopiques et leurs variantes	970
VIII.4.2	Preuves des propositions 2.2 et 2.5	972
VIII.4.3	Preuve conditionnelle des propositions 3.8 et 3.9	973
VIII.4.4	L'application $\epsilon_{\tilde{M}}$	974
IX Propriétés des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes sur le corps réel		
Introduction		979
IX.1	Stabilisation d'une famille d'équations différentielles	982
IX.1.1	Opérateurs différentiels	982
IX.1.2	Les équations différentielles	983
IX.1.3	Propriétés des opérateurs $\delta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(z)$	985
IX.1.4	Rappels sur l'action adjointe	986
IX.1.5	Une application d'Harish-Chandra	988
IX.1.6	Preuve de la proposition 1.3	992
IX.1.7	L'opérateur de Casimir	994
IX.1.8	Variante avec caractère central	997
IX.2	Endoscopie et opérateurs différentiels	1001
IX.2.1	Version stable des opérateurs différentiels	1001

IX.2.2	Propriétés des versions stables des opérateurs différentiels	1005
IX.2.3	Variante endoscopique des opérateurs différentiels	1007
IX.2.4	Propriétés des opérateurs différentiels endoscopiques	1012
IX.2.5	Le résultat de stabilisation	1017
IX.3	Majorations	1019
IX.3.1	Quelques considérations formelles	1019
IX.3.2	Majoration des intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes	1021
IX.3.3	Majoration des intégrales orbitales pondérées stables	1022
IX.3.4	Majoration des intégrales orbitales endoscopiques	1023
IX.4	Propriétés locales	1025
IX.4.1	Sauts des intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes	1025
IX.4.2	Sauts des intégrales orbitales pondérées stables	1027
IX.4.3	Sauts des intégrales orbitales pondérées endoscopiques	1043
IX.4.4	Formules d'inversion	1044
IX.4.5	Preuve de la proposition 4.3	1048
IX.5	Des variantes de l'application $\phi_{\tilde{M}}$	1062
IX.5.1	Normalisation partielle des opérateurs d'entrelacement	1062
IX.5.2	Caractères pondérés rationnels	1065
IX.5.3	L'application $\phi_{\tilde{M}}^{\text{rat},\tilde{G}}$	1067
IX.5.4	Relation entre les applications $\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$ et $\phi_{\tilde{M}}^{\text{rat},\tilde{G}}$	1067
IX.5.5	L'application $\theta_{\tilde{M}}^{\text{rat},\tilde{G}}$	1070
IX.5.6	Un lemme auxiliaire	1071
IX.5.7	Propriétés de l'application $\theta_{\tilde{M}}^{\text{rat},\tilde{G}}$	1074
IX.5.8	L'application ${}^c\phi_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$	1078
IX.5.9	L'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\text{rat},\tilde{G}}$	1080
IX.5.10	Propriétés de l'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\text{rat},\tilde{G}}$	1080
IX.5.11	L'application ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$	1081
IX.5.12	Relation entre les applications $\theta_{\tilde{M}}^{\text{rat},\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\text{rat},\tilde{G}}$ et ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$	1082
IX.5.13	Une variante des intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes	1083
IX.5.14	Preuve des propositions 5.9, 5.11 et de l'assertion 5.13(2)	1084
IX.5.15	Une propriété de l'espace $U_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$	1085
IX.6	Endoscopie et applications $\theta_{\tilde{M}}^{\text{rat},\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\text{rat},\tilde{G}}$, ${}^c\theta_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$	1091
IX.6.1	Les applications stables	1091

IX.6.2	Propriétés de l'application ${}^c S\theta_{\tilde{M}}^{\text{rat}, \tilde{G}}$	1092
IX.6.3	Propriétés de l'application $S\theta_{\tilde{M}}^{\text{rat}, \tilde{G}}$	1093
IX.6.4	Stabilité de l'application $\sigma_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}$	1094
IX.6.5	Une variante des intégrales orbitales pondérées stables . . .	1094
IX.6.6	Les applications endoscopiques	1094
IX.6.7	Egalité d'applications linéaires	1096
IX.6.8	Propriétés de l'application $\theta_{K\tilde{M}}^{\text{rat}, K\tilde{G}, \mathcal{E}}$	1096
IX.6.9	Egalité des fonctions $\rho_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}}$ et $\rho_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}, \mathcal{E}}$	1099
IX.6.10	Variante des intégrales orbitales pondérées elliptiques . . .	1099
IX.6.11	Reformulation des énoncés dans le cas quasi-déployé et à torsion intérieure	1100
IX.7	Les preuves des assertions de la section 6	1101
IX.7.1	Lien entre les intégrales orbitales pondérées endoscopiques et leurs variantes	1101
IX.7.2	Relation entre les applications $\theta_{K\tilde{M}}^{\text{rat}, K\tilde{G}, \mathcal{E}}$, ${}^c\theta_{K\tilde{M}}^{\text{rat}, K\tilde{G}, \mathcal{E}}$, ${}^c\theta_{K\tilde{M}}^{K\tilde{G}, \mathcal{E}}$	1103
IX.7.3	Preuves des propositions 6.1, 6.5 et du lemme 6.4	1105
IX.7.4	Preuve conditionnelle des propositions 6.7 et 6.10 et du lemme 6.9	1107
IX.7.5	Variante dans le cas quasi-déployé et à torsion intérieure	1110
IX.8	L'application $\epsilon_{\tilde{M}}$	1111
IX.8.1	Un lemme élémentaire	1111
IX.8.2	Définition locale	1112
IX.8.3	Définition globale	1116
IX.8.4	Retour sur la formule des traces locale symétrique	1118
IX.8.5	Stabilisation de la formule précédente	1124
IX.8.6	Version endoscopique de la proposition 8.4	1127
IX.8.7	Expression de $\epsilon_{K\tilde{M}}(f)$	1129
IX.8.8	Description des fonctions $\xi_{K\tilde{R}, \tilde{\sigma}, H}$	1135
IX.8.9	K -finitude	1140
X Stabilisation spectrale		
X.1	Introduction	1145
X.2	Notations générales	1148
X.3	Stabilisation de la formule des traces locales tordues	1149
X.3.1	Le côté géométrique de la formule des traces locales	1149
X.3.2	Stabilisation du côté géométrique de la formule des traces locales et stabilisation des intégrales orbitales pondérées	1152

X.3.3	Le côté spectral de la formule des traces locales et sa stabilisation	1155
X.3.4	Elimination de certaines conditions	1161
X.3.5	Stabilisation géométrique sous hypothèses	1164
X.3.6	Une construction uniforme d'extensions de corps de nombres	1170
X.3.7	Une réduction étonnamment simple	1170
X.3.8	Le cas des tores déployés	1171
X.3.9	Fin des réductions	1173
X.4	Les caractères pondérés et leur stabilisation	1174
X.4.1	Caractère pondéré aux places non ramifiées et stabilisation	1174
X.4.2	Caractères pondérés invariants	1183
X.4.3	Le cas de la torsion intérieure	1188
X.4.4	Les caractères pondérés endoscopiques	1191
X.4.5	La stabilisation géométrique et la stabilisation spectrale	1195
X.4.6	Caractères pondérés semi-globaux	1197
X.4.7	Caractères pondérés semi-globaux et endoscopie, théorème d'annulation	1198
X.4.8	Caractères pondérés semi-globaux et endoscopie, théorème de transfert	1200
X.4.9	Caractères pondérés globaux	1200
X.5	Le côté spectral de la formule des traces	1203
X.5.1	Rappel des termes discrets	1203
X.5.2	Rappel des termes continus	1206
X.5.3	Représentations semi-finies	1207
X.5.4	Autres définitions des représentations semi-finies	1208
X.5.5	Représentation semi-finie et stabilité	1213
X.5.6	Enoncé du lemme fondamental tordu	1215
X.5.7	Transfert d'une représentation semi-finie stable	1215
X.5.8	La variante stable de la partie discrète de la formule des traces	1216
X.5.9	Enoncé de la stabilisation spectrale	1218
X.5.10	L'hypothèse spectrale de récurrence	1218
X.5.11	Réduction de la stabilisation spectrale	1219
X.6	Digression, automorphismes de la situation	1220
X.6.1	Action du groupe adjoint ou de son analogue dans le cas tordu	1220
X.6.2	Fonction caractéristique du compact et action du groupe adjoint	1222

X.6.3	Action globale du groupe adjoint et de son analogue dans le cas tordu	1223
X.7	Fin de la stabilisation locale géométrique	1225
X.7.1	Mise en place des objets	1225
X.7.2	Stabilisation de la formule des traces pour certaines fonctions	1228
X.7.3	Propriété de convergence absolue pour la formule des traces	1231
X.7.4	Globalisation	1233
X.7.5	Propriétés de finitude du nombre de certaines données endoscopiques	1234
X.7.6	Globalisation fine	1236
X.7.7	Preuve de la stabilisation géométrique locale	1237
X.8	Stabilisation de la formule des traces	1241
X.8.1	Stabilisation spectrale	1241
X.8.2	Une décomposition parfois plus fine de l'égalité de stabilisation	1243
X.8.3	Un exemple, le cas de $GL(n)$ tordu	1244
X.8.4	Une remarque sur la finitude de $\pi_{\text{disc},\nu}(c^V)$ et son calcul pour les groupes classiques	1245
X.8.5	Vérification de toutes les hypothèses de récurrence, récapitulatif	1247
X.8.6	Stabilisation géométrique	1248
X.8.7	Stabilisation de la formule des traces locale	1248
X.9	Preuve de 7.4	1249

XI Appendice : représentations elliptiques ; caractérisation et formule de transfert de caractères

Introduction	1255
XI.1 Quelques définitions de base	1256
XI.2 Caractérisation des représentations elliptiques	1256
XI.2.1 Rappel des définitions de [81]	1256
XI.2.2 La théorie du R -groupe	1257
XI.2.3 Caractérisation des représentations elliptiques	1258
XI.2.4 Calcul de modules de Jacquet dans le cas non-archimédien	1259
XI.2.5 Calcul de la trace tordue sur les modules de Jacquet	1260
XI.2.6 Le calcul en général	1262
XI.2.7 Le cas archimédien	1262
XI.2.8 Calcul des modules de Jacquet dans le cas archimédien	1264
XI.2.9 Une formule d'induction	1264

XI.2.10	Preuve du théorème de XI.2.3	1268
XI.2.11	Transfert de représentations elliptiques	1269
XI.2.12	Preuve du corollaire dans le cas archimédien	1269
XI.3	Stabilité	1270
XI.3.1	Décomposition des représentations stables de \tilde{G}	1271
XI.4	Représentations elliptiques comme transfert	1272
XI.4.1	Une propriété de finitude des représentations elliptiques	1273
XI.4.2	Globalisation et approximation	1275
XI.4.3	Preuve de la première partie du théorème	1275
XI.4.4	Prolongement des formules de transfert entre représentations elliptiques et fin de la preuve	1283
XI.5	Conséquences	1284
XI.5.1	Prolongement des formules de transfert	1284
XI.5.2	Un critère spectral de nullité pour le transfert d'une fonction	1284
XI.6	Transfert et ramification	1285
XI.7	Calculs cohomologiques	1287
XI.7.1	Préliminaires sur les classes de conjugaisons stables modulo le centre	1287
XI.7.2	Action centrale et classe de conjugaison stable	1288
XI.8	Approximation	1291
XI.8.1	Enoncé	1291
XI.8.2	Rappel des globalisations	1292
XI.8.3	Globalisation fine	1293
XI.8.4	Début de la preuve du théorème	1294
XI.8.5	Preuve du lemme	1294
XI.9	La formule des traces simple	1297
XI.10	La formule des traces simple avec caractère	1297
	Index des notations	1303
	Bibliographie	1311

Volume 1

Préface	xxv
I Endoscopie tordue sur un corps local	
Introduction	1
I.1 Les définitions de base	2
I.1.1 Groupes et espaces tordus	2
I.1.2 Paires de Borel	3
I.1.3 Éléments semi-simples	5
I.1.4 L -groupes	7
I.1.5 Données endoscopiques	8
I.1.6 Systèmes de racines	10
I.1.7 Espace endoscopique tordu	10
I.1.8 Correspondance entre classes de conjugaison semi-simples	11
I.1.9 Remarques sur le cas quasi-déployé et à torsion intérieure	13
I.1.10 Correspondance entre éléments semi-simples	13
I.1.11 K -espaces	15
I.1.12 L'ensemble $\tilde{G}_{ab}(F)$	17
I.1.13 Caractères de $G(F)$, $G_{0,ab}(F)$, $G_{0,ab}(F)/N^G(G_{ab}(F))$	23
I.1.14 Image de la correspondance	24
I.2 Transfert	27
I.2.1 Facteurs de transfert	27
I.2.2 Définition du bifacteur de transfert	28
I.2.3 Bifacteur de transfert et K -groupes	33
I.2.4 Transfert	34
I.2.5 Recollement de données auxiliaires	35
I.2.6 Action de groupes d'automorphismes	39
I.2.7 Une propriété de transformation du facteur de transfert	41
I.2.8 Le cas $F = \mathbb{R}$	44
I.3 Levi et image du transfert	51
I.3.1 Espaces paraboliques, espaces de Levi	51
I.3.2 Données endoscopiques d'espace de Levi	58
I.3.3 Données endoscopiques de \tilde{G} associées à une donnée endoscopique d'un espace de Levi	59
I.3.4 Levi de données endoscopiques	62
I.3.5 K -espaces	63
I.3.6 Preuve du lemme 3.5	67
I.4 Stabilité et image du transfert	74

I.4.1	Rappels sur la descente d'Harish-Chandra et la transformation de Fourier	74
I.4.2	Filtration de $I(\tilde{G}(F), \omega)$	76
I.4.3	Image de la restriction	80
I.4.4	Conjugaison stable	81
I.4.5	Conjugaison stable et application $N^{\tilde{G}}$	83
I.4.6	Description locale des classes de conjugaison stable	84
I.4.7	Conjugaison stable et K -espaces tordus	85
I.4.8	Descente d'Harish-Chandra et stabilité	86
I.4.9	Conjugaison stable et endoscopie	89
I.4.10	Rappels sur la transformation de Fourier et l'endoscopie	94
I.4.11	Image du transfert	95
I.4.12	Preuve de la proposition 4.11 dans le cas non-archimédien	96
I.4.13	Preuve de la proposition 4.11 dans le cas réel	101
I.4.14	Un corollaire de la preuve dans le cas réel	105
I.4.15	Filtration de l'espace $SI(\tilde{G}(F))$	106
I.4.16	Un corollaire	107
I.4.17	Produit scalaire	108
I.5	Distributions «géométriques»	119
I.5.1	Distributions «géométriques» dans le cas non-archimédien	119
I.5.2	Distributions «géométriques» dans le cas archimédien	120
I.5.3	Filtration de $D_{\text{géo}}(\tilde{G}(F), \omega)$	125
I.5.4	Distributions géométriques stables dans le cas non-archimédien	129
I.5.5	Distributions géométriques stables dans le cas archimédien	130
I.5.6	Constructions formelles	131
I.5.7	Transfert de distributions «géométriques»	134
I.5.8	Preuve dans le cas non-archimédien	136
I.5.9	Preuve dans le cas archimédien	138
I.5.10	Localisation	141
I.5.11	Induction et classes de conjugaison stable	142
I.5.12	Un résultat de réduction	144
I.5.13	Induction et stabilité	147
I.5.14	Suite de la preuve, cas F non-archimédien	150
I.5.15	Suite de la preuve, cas F archimédien	152
I.6	Le cas non ramifié	156
I.6.1	La situation non ramifiée	156

I.6.2	Données endoscopiques non ramifiées	157
I.6.3	Facteur de transfert	159
I.6.4	Le lemme fondamental	165
I.7	Unitarité, conjugaison complexe	166
I.7.1	Données auxiliaires et unitarité	166
I.7.2	Unitarité du facteur de transfert	168
I.7.3	Conjugaison complexe et intégrales orbitales	169
I.7.4	Conjugaison des données endoscopiques	170
I.7.5	Données auxiliaires	172
I.7.6	Conjugaison complexe et transfert	179
I.7.7	Formalisation du résultat	179
II Intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; définitions et énoncés des résultats		
	Introduction	181
II.1	Intégrales orbitales pondérées	184
II.1.1	Les hypothèses	184
II.1.2	Définition des intégrales pondérées d'après Arthur	185
II.1.3	Propriétés des termes $\rho^{\text{Art}}(\beta, u)\tilde{\beta}$	189
II.1.4	Définition d'un nouveau terme $\rho(\beta, u)$	191
II.1.5	Modification de la définition des intégrales orbitales pondérées	194
II.1.6	Définition des intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes	197
II.1.7	Propriétés des intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes	198
II.1.8	Variantes des termes $\rho(\beta, u)$	203
II.1.9	Variantes des intégrales orbitales pondérées dans le cas quasi-déployé à torsion intérieure	209
II.1.10	Intégrales orbitales pondérées invariantes stables	213
II.1.11	Définition d'un système de fonctions $B^{\tilde{G}}$	226
II.1.12	Intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes et endoscopie	229
II.1.13	Action d'un groupe d'automorphismes	232
II.1.14	Formules de descente	233
II.1.15	Intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes endoscopiques	257
II.1.16	Le théorème principal	259
II.2	Germes de Shalika	259
II.2.1	Germes de Shalika ordinaires	259
II.2.2	Germes de Shalika et stabilité	261

II.2.3	Intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes	262
II.2.4	Définition des germes stables	263
II.2.5	Intégrales orbitales pondérées invariantes stables	264
II.2.6	Développement en germes d'intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes endoscopiques	267
II.2.7	Une égalité de germes	271
II.2.8	Relation entre la proposition 2.7 et le théorème 1.16	271
II.2.9	Relation entre la proposition 2.4 et le théorème 1.10	272
II.2.10	Premières conséquences	273
II.2.11	Une formule d'induction	274
II.2.12	Une formule d'induction, cas endoscopique	275
II.2.13	Une formule d'induction, cas stable	276
II.3	Développements des intégrales orbitales pondérées	276
II.3.1	Des espaces associés au couple (\tilde{G}, \tilde{M})	276
II.3.2	Un développement des intégrales pondérées ω -équivariantes	279
II.3.3	Développement des intégrales orbitales pondérées invariantes et fonction B	282
II.3.4	Développement des intégrales orbitales pondérées invariantes et système de fonctions B	284
II.3.5	Termes d'un développement stable	285
II.3.6	Quelques formalités	286
II.3.7	Développement des intégrales orbitales pondérées stables	289
II.3.8	Termes d'un développement endoscopique	292
II.3.9	Développement des intégrales orbitales pondérées endoscopiques	294
II.3.10	Termes ρ_J et induction	296
II.3.11	Termes σ_J et induction	299
II.3.12	Termes $\rho_J^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(\mathbf{M}', \delta, a)$ et induction	300
II.4	Le cas non ramifié	300
II.4.1	Intégrales orbitales pondérées de la fonction caractéristique d'un espace hyperspécial	300
II.4.2	L'avatar stable	301
II.4.3	L'avatar endoscopique	303
II.4.4	Le lemme fondamental pondéré	304
II.4.5	Développement en germes	304
II.4.6	Un espace de germes sous hypothèses sur p	306
II.4.7	Développement des fonctions $r_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\cdot, \tilde{K})$ et $s_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\cdot, \tilde{K})$	307
II.4.8	Preuve du théorème 4.4	309

III Intégrales orbitales et endoscopie sur un corps local non-archimédien ; réductions et preuves

Introduction	311
III.1 Le cas des groupes non tordus	314
III.1.1 Rappel des résultats d'Arthur	314
III.1.2 Intégrales orbitales pondérées stables	314
III.1.3 Germes stables	318
III.1.4 Intégrales orbitales pondérées endoscopiques	318
III.1.5 Germes endoscopiques	320
III.2 Cas quasi-déployé et à torsion intérieure	321
III.2.1 Un lemme sur les groupes abéliens finis	321
III.2.2 Un lemme sur les tores	322
III.2.3 Détordre un triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quasi-déployé et à torsion intérieure	325
III.2.4 Fonctions, intégrales orbitales, représentations	326
III.2.5 Endoscopie	332
III.2.6 L'application $\phi_{\tilde{M}}$	335
III.2.7 Intégrales orbitales pondérées équivariantes	338
III.2.8 Intégrales orbitales pondérées stables	339
III.2.9 Intégrales orbitales pondérées endoscopiques	341
III.3 Passage à un revêtement	343
III.3.1 Définition des homomorphismes de passage	343
III.3.2 Les termes ρ_J^G	347
III.3.3 Intégrales orbitales pondérées et revêtement	348
III.3.4 Germes de Shalika et revêtement	350
III.3.5 Revêtement et stabilité	351
III.3.6 Les termes σ_J	353
III.3.7 Revêtement et germes stables	355
III.4 Germes et descente d'Harish-Chandra	358
III.4.1 Formule de descente pour les termes $\rho_J^{\tilde{G}}$	358
III.4.2 Descente des germes d'intégrales orbitales pondérées	361
III.4.3 Formule de descente pour les termes σ_J	362
III.4.4 Formule de descente pour les germes des intégrales orbitales pondérées stables	363
III.5 Descente et endoscopie	363
III.5.1 Descente de données endoscopiques	363
III.5.2 Transfert des fonctions et des distributions	366
III.5.3 Levi et descente de données endoscopiques	368
III.5.4 Facteurs de transfert et transfert des distributions	372
III.5.5 Applications de transition	374

III.6	Triplets endoscopiques non standard	375
III.6.1	Apparition des triplets endoscopiques non standard	375
III.6.2	Définition de triplets $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ particuliers	379
III.6.3	Mise en place des récurrences	383
III.6.4	Quelques définitions	383
III.6.5	Les termes σ_J	385
III.6.6	Germes de Shalika	387
III.6.7	Réduction des propositions 6.5 et 6.6	388
III.7	Preuves conditionnelles de deux théorèmes	393
III.7.1	Les termes $\rho_J^{\tilde{G}, \mathcal{E}}$	393
III.7.2	Les termes $\rho_J^{\tilde{G}, \mathcal{E}}$, variante	400
III.7.3	Les termes σ_J	400
III.7.4	Preuve conditionnelle des propositions [II] 2.7, [II] 3.8 et du théorème [II] 1.16(i)	401
III.7.5	Preuve du théorème [II] 1.16(ii)	405
III.7.6	Preuve des propositions [II] 2.4, [II] 3.5 et du théorème [II] 1.10	405
III.7.7	Preuve de la proposition 6.5	406
III.8	Descente des germes de Shalika endoscopiques	409
III.8.1	La proposition [II] 2.7 dans un cas particulier	409
III.8.2	Début de la preuve	409
III.8.3	Calcul de $x(\bar{s}, y)$	412
III.8.4	Fin de la preuve de la proposition 8.1	419
III.8.5	Egalité de germes et de germes endoscopiques	421
III.8.6	Preuve de la proposition 4.4	421
III.8.7	Preuve de la proposition 6.6	422
IV Transfert spectral archimédien		
	Introduction	423
IV.1	Théorème de Paley–Wiener	424
IV.1.1	La situation	424
IV.1.2	Rappels sur les ω -représentations	427
IV.1.3	Espaces de Paley–Wiener	429
IV.1.4	Enoncé du théorème	433
IV.1.5	La transition entre le théorème de Renard et le théorème 1.4	434
IV.1.6	Extension au cas $\omega \neq 1$	438
IV.2	Stabilité	440
IV.2.1	Quelques considérations formelles	440
IV.2.2	Les espaces $I_{\text{cusp}}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ et $SI_{\text{cusp}}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$	443

IV.2.3	Un théorème de Paley–Wiener décrivant l’espace $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}))$	447
IV.2.4	Un résultat d’instabilité	447
IV.2.5	Un lemme sur les fonctions de Paley–Wiener	449
IV.2.6	Fonctions f_φ à support assez régulier	452
IV.2.7	Utilisation de la propriété : une représentation elliptique est supertempérée	454
IV.2.8	L’espace $D_{\text{spec}}^{\text{st}}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$	456
IV.2.9	L’espace $SI(\tilde{G}(\mathbb{R}), K)$	456
IV.3	Transfert	456
IV.3.1	Définition d’un transfert spectral elliptique	456
IV.3.2	Le théorème	457
IV.3.3	Le transfert spectral	460
IV.3.4	Transfert K -fini	461
IV.3.5	Transfert K -fini, version générale	464
IV.3.6	Le cas du corps de base \mathbb{C}	464
V Intégrales orbitales et endoscopie sur le corps réel		
	Introduction	465
V.1	Intégrales orbitales pondérées	467
V.1.1	La situation	467
V.1.2	L’application $\phi_{\tilde{M}}$	468
V.1.3	Définition des intégrales orbitales pondérées	474
V.1.4	Intégrales orbitales pondérées invariantes stables	477
V.1.5	Preuve du théorème 1.4	482
V.1.6	Une formule d’induction	482
V.1.7	Intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes et endoscopie	483
V.1.8	Intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes endoscopiques	485
V.1.9	Une propriété locale des intégrales orbitales ω -équivariantes endoscopiques	486
V.1.10	Le théorème principal	489
V.1.11	Réduction au cas des intégrales orbitales régulières	489
V.1.12	Élimination des K -espaces	490
V.1.13	Le cas quasi-déployé et à torsion intérieure	491
V.2	Un nouvel espace de distributions	491
V.2.1	Définition de l’espace $D_{\text{tr-orb}}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$	491
V.2.2	Premières propriétés de l’espace $D_{\text{tr-orb}}(\tilde{G}(\mathbb{R}), \omega)$	497
V.2.3	Un lemme de séparation	499
V.2.4	Programme d’extension des définitions	502

V.2.5	Réduction des conditions imposées dans le cas (A)	507
V.2.6	Réduction des conditions imposées dans le cas (C)	511
V.2.7	Réduction des conditions imposées dans le cas (B)	513
V.3	Extension des définitions, cas des groupes non tordus	513
V.3.1	Rappel des résultats d'Arthur	513
V.3.2	Réalisation du programme de 2.4	513
V.3.3	Passage à un revêtement	514
V.3.4	Revêtement et applications ρ_J et σ_J	519
V.3.5	Un résultat d'induction	520
V.3.6	Un corollaire	527
V.4	Extension des définitions, cas quasi-déployé	528
V.4.1	Descente et endoscopie	528
V.4.2	Localisation	530
V.4.3	Localisation des espaces $D_{\text{tr-orb}}(\mathcal{O})$	531
V.4.4	Un résultat d'induction	533
V.4.5	Définition des termes $\rho_J^{\tilde{G}}$ et $\sigma_J^{\tilde{G}}$, premier cas	535
V.4.6	Définition des termes $\rho_J^{\tilde{G}}$ et $\sigma_J^{\tilde{G}}$, deuxième cas	537
V.5	Extension des définitions, cas général	541
V.5.1	Un résultat complémentaire pour l'endoscopie non standard	541
V.5.2	Réalisation conditionnelle du programme de 2.4	544
V.5.3	Preuve de la proposition 5.2, premier cas	545
V.5.4	Comparaison des espaces $K\tilde{G}$ et $K\tilde{G}_J$	547
V.5.5	Preuve de la proposition 5.2, deuxième cas	549
V.5.6	Preuve du lemme 5.5	553
V.5.7	Preuve du lemme 5.1	561
V.6	Un résultat d'approximation	564
V.6.1	Un espace de germes de fonctions	564
V.6.2	Approximation des intégrales orbitales pondérées invariantes	565
V.6.3	Approximation des intégrales orbitales pondérées invariantes stables	568
V.6.4	Approximation des intégrales orbitales pondérées invariantes associées aux éléments de $D_{\text{tr-orb}}(\tilde{M}(\mathbb{R})) \otimes \text{Mes}(M(\mathbb{R}))^*$	569
V.6.5	Preuve de la proposition 6.3	571
V.7	Le cas des groupes complexes	573
	Index des notations	575
	Bibliographie	583

Préface

Ainsi qu'on l'a dit dans l'introduction du premier volume, notre but est de stabiliser la formule des traces tordue en toute généralité, en suivant la méthode utilisée par Arthur dans ses trois articles [18], [19], [20]. Notre résultat élimine l'hypothèse essentielle posée par le même Arthur dans son livre [23] où il décrit le spectre discret des groupes classiques à partir de celui des groupes linéaires généraux.

Nos données de départ sont un corps de nombres F , un groupe réductif connexe G défini sur F , un espace tordu \tilde{G} sur G et un caractère automorphe ω de $G(\mathbb{A}_F)$ (où \mathbb{A}_F est l'anneau d'adèles de F). Si l'on préfère, on peut fixer un automorphisme θ de G défini sur F . L'espace tordu associé est l'ensemble $\tilde{G} = G\theta$, qui est muni des actions de G à gauche et à droite définies par $(g, \gamma = x\theta, g') \mapsto \gamma' = gx\theta(g')\theta$. En particulier, à tout élément γ de \tilde{G} est associé un automorphisme ad_γ de G : si $\gamma = x\theta$, $ad_\gamma = ad_x \circ \theta$, où ad_x est la conjugaison par x . Dans cette situation, la formule des traces ω -équivariante permet d'étudier les représentations automorphes π de $G(\mathbb{A}_F)$ telles que $\pi \circ ad_\gamma \simeq \pi \otimes \omega$, où γ est un élément quelconque de $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$. Elle se présente de la façon suivante. On fixe un ensemble fini V de places de F , assez grand (contenant toutes les «mauvaises» places). On note F_V le produit des localisés F_v pour $v \in V$. Pour $f_V \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$, on a une égalité

$$I_{\text{géom}}^{\tilde{G}}(\omega, f_V) = I_{\text{spec}}^{\tilde{G}}(\omega, f_V),$$

le premier terme étant le côté «géométrique» de la formule et le second étant son côté «spectral». Cette égalité a été établie par Arthur, cf. [8], à partir de la version non- ω -équivariante démontrée dans le fameux «Morning Seminar». Celui-ci a été enfin rédigé il y a quelques années par Labesse et l'un de ses collaborateurs [55].

Comme dans le cas local, on introduit la notion de donnée endoscopique de (G, \tilde{G}, ω) . Une telle donnée \mathbf{G}' est un objet assez riche et détermine en tout cas un groupe G' réductif connexe défini sur F et quasi-déployé et un espace tordu \tilde{G}' sur G' . Il n'y a plus de caractère et l'espace tordu \tilde{G}' est assez simple : la torsion se fait par automorphismes intérieurs de G' . Cela étant, la stabilisation de la formule des traces tordue se fait par récurrence sur la dimension de G selon le schéma assez simple suivant. On considère d'abord le cas où G est quasi-déployé, \tilde{G} est «à torsion intérieure» et $\omega = 1$ (comme on vient de le dire, ces conditions sont remplies si l'on remplace la donnée de départ (G, \tilde{G}, ω) par celle issue d'une

donnée endoscopique). Dans ce cas, pour un indice $\star = \text{géom}$ ou $\star = \text{spec}$, on pose

$$SI_{\star}^{\tilde{G}}(f_V) = I_{\star}^{\tilde{G}}(f_V) - \sum_{\mathbf{G}': \mathbf{G}' \neq \mathbf{G}} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') SI_{\star}^{\tilde{G}'}(f_V^{\tilde{G}'}).$$

On a supprimé le ω dans $I_{\star}^{\tilde{G}}(f_V)$ puisqu'il est trivial. La somme porte sur les données endoscopiques de $(G, \tilde{G}, \omega = 1)$ qui vérifient diverses conditions : ellipticité, non-ramification hors de V etc. . . Il n'y en a qu'un nombre fini. Le terme $i(\tilde{G}, \mathbf{G}')$ est une constante explicite. Puisqu'on impose de plus $G' \neq G$, les groupes G' qui apparaissent sont de dimension strictement plus petite que celle de G . On peut donc supposer définies les distributions $SI_{\star}^{\tilde{G}'}(\cdot)$. La fonction $f_V^{\tilde{G}'}$ est le transfert de f_V . L'existence de ce transfert endoscopique est conséquence des travaux de Shelstad dans le cas des places archimédiennes (cf. [74]), de Ngo Bao Chau dans le cas des places finies. Le théorème que nous prouverons dans cette situation est que la distribution $f_V \mapsto SI_{\star}^{\tilde{G}}(f_V)$ est stable, c'est-à-dire qu'elle annule les fonctions dont toutes les intégrales orbitales stables sont nulles. Revenons maintenant à un triplet (G, \tilde{G}, ω) quelconque. On définit la version endoscopique $I_{\star}^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(\omega, f_V)$ du terme géométrique ou spectral de la formule des traces par l'égalité

$$I_{\star}^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(\omega, f_V) = \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G}, \mathbf{G}') SI_{\star}^{\tilde{G}'}(f_V^{\tilde{G}'}),$$

avec les mêmes explications que ci-dessus. Le théorème principal que nous prouverons est l'égalité $I_{\star}^{\tilde{G}, \mathcal{E}}(\omega, f_V) = I_{\star}^{\tilde{G}}(\omega, f_V)$. Pour $\star = \text{spec}$, celle-ci relie les représentations automorphes π de $G(\mathbb{A}_F)$ vérifiant la condition $\pi \circ \text{ad}_{\gamma} \simeq \pi \otimes \omega$ aux représentations automorphes des groupes associés aux données endoscopiques de (G, \tilde{G}, ω) . Un travail assez facile, fait en [X] 5.7 et fortement inspiré de [24], sépare la partie discrète de la partie continue de $I_{\text{spec}}^{\tilde{G}}(\omega, f_V)$. La partie discrète voit vraiment des traces de ω -représentations, même si se glissent des opérateurs d'entrelacement, tandis que la partie continue voit des intégrales de caractères pondérés parfaitement incalculables. La stabilisation vaut encore en ne gardant que les parties discrètes des deux membres de l'égalité ci-dessus. Celles-ci sont alors indépendantes, en un sens assez clair, du choix de l'ensemble de places V , grâce au lemme fondamental pour toute l'algèbre de Hecke sphérique (cf. [60]).

Signalons tout de suite que la présentation ci-dessus est grandement simplifiée. D'abord, les places réelles nécessitent parfois de considérer ensemble plusieurs formes intérieures du groupe G : ce sont les K -groupes d'Arthur, ici les K -espaces. On a expliqué au chapitre I pourquoi leur introduction est utile, cf. [I] 1.11 et [I] 4.9. D'autre part, les transferts que l'on a noté ici $f_V^{\tilde{G}'}$ vivent en général non pas sur \tilde{G}' , mais sur une donnée auxiliaire \tilde{G}'_1 , laquelle est un espace tordu sur une extension G'_1 de G' par un tore central.

Le terme géométrique $I_{\text{géom}}^{\tilde{G}}(\omega, f_V)$ se présente comme une somme sur les espaces de Levi \tilde{M} de \tilde{G} de sommes de termes $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A^{\tilde{M}}(\mathcal{O}, \omega), f_V)$. Ici, $A^{\tilde{M}}(\mathcal{O}, \omega)$

est une somme finie de ω -intégrales orbitales sur des classes de conjugaison par $M(F_V)$ d'éléments de $\tilde{M}(F)$ (c'est un objet essentiellement global) et $I_M^{\tilde{G}}(\cdot, \cdot)$ est une intégrale orbitale pondérée ω -équivariante (c'est un objet essentiellement local, fortement relié aux distributions que l'on a étudiées dans le premier volume). On doit stabiliser ces deux types d'ingrédients. La stabilisation des termes globaux $A^{\tilde{M}}(\mathcal{O}, \omega)$ a été l'objet de plusieurs travaux successifs de Langlands, Kottwitz, Kottwitz et Shelstad, Arthur et Labesse. Arthur a traité entièrement le problème, cf. [19], mais dans le cas non tordu. Labesse a traité le cas tordu, cf [53], mais seulement dans le cas des orbites semi-simples. Nous reprenons les méthodes de ces deux auteurs pour traiter le cas général dans le chapitre VII, en utilisant une technique de descente. Toutefois, comme dans Arthur, certaines classes de conjugaison exceptionnelles ne se traitent pas directement et leur stabilisation ne sera obtenue que dans le chapitre X. La stabilisation des termes «locaux» $I_M^{\tilde{G}}(\cdot, \cdot)$ est plus difficile (pour $\tilde{M} \neq \tilde{G}$). La raison en est que la méthode d'Arthur qui rend invariante la formule des traces est très dissymétrique : elle concentre les difficultés du côté géométrique. En fait, ces distributions $I_M^{\tilde{G}}(\cdot, \cdot)$ n'ont de «géométrie» que leur ensemble d'indexation (des classes de conjugaison dans $\tilde{M}(F_V)$). Leur définition fait intervenir des objets spectraux et en fait, ces distributions sont à peu près incalculables en toute généralité. Leur stabilisation, obtenue au chapitre X, se fait par voie globale c'est-à-dire en utilisant toute la force de la formule des traces (bien que quelques résultats préparatoires aient déjà été prouvés dans le premier volume). C'est donc ce chapitre X qui contient l'essentiel de la preuve de la stabilisation géométrique. C'est aussi celui où sera abordé le côté spectral de la formule. Sa stabilisation résulte de celle de la partie géométrique mais, comme on vient de le dire, par une démonstration qui effectue un va-et-vient entre les deux côtés de la formule. Signalons que notre présentation de la formule spectrale est quelque peu simplifiée par rapport à celle d'Arthur quant aux questions de convergence car on dispose aujourd'hui des résultats sur ce sujet de Müller [65] et Finis, Lapid et Müller [35].

Le chapitre VI présente la partie géométrique de la formule et énonce les résultats concernant sa stabilisation. On y énonce aussi les hypothèses de récurrence générales qui vaudront pour toute la suite de la démonstration. Toutefois, dans bien des chapitres, une partie seulement de ces hypothèses sera utilisée et on expliquera selon les cas quelles sont les hypothèses vraiment utiles. On a déjà dit que le chapitre VII est consacré à la stabilisation de presque toutes les intégrales orbitales $A^{\tilde{G}}(\mathcal{O}, \omega)$. C'est l'équivalent dans le cas tordu du deuxième article [19] d'Arthur. Le chapitre VIII commence la démonstration de la stabilisation des intégrales orbitales pondérées ω -équivariantes. On y démontre l'analogie de la proposition 3.1 de [20]. Le chapitre IX démontre une proposition analogue mais sur le corps de base réel. En effet, contrairement à Arthur, nous utilisons la même méthode pour traiter les problèmes locaux, que le corps de base soit archimédien ou non. Les preuves sont toutefois assez différentes dans les deux cas. En particulier, les questions de K -finitude sont nettement plus compliquées sur un corps de base

archimédien. Le chapitre X contient l'énoncé de la partie spectrale de la formule des traces et celui de sa stabilisation. Il contient aussi un énoncé de stabilisation de la formule des traces locale tordue. Enfin, comme on l'a dit, il contient l'essentiel des démonstrations. On y suit dans ses grandes lignes le troisième article d'Arthur [20]. Comme il s'agit de la partie la plus consistante de notre travail, on a choisi de renoncer dans ce chapitre à certains formalismes mis au point dans le premier chapitre. Ceux-ci n'auraient fait qu'obscurcir la rédaction et leur rétablissement ne serait qu'un exercice facile. Enfin, on a adjoint un appendice en guise de chapitre XI. Il contient des résultats sur les représentations supertempérées ainsi qu'une extension au cas tordu des résultats d'Arthur contenus dans son très bel article à *Selecta* [13]. Cet appendice n'utilise pas les résultats des chapitres précédents mais, au contraire, est utilisé dans ceux-ci.

Comme dans le premier volume, nous énoncerons certains résultats comme «théorèmes à prouver». Nous les démontrerons bel et bien mais souvent beaucoup plus tard. La raison d'être de ces énoncés est la méthode de récurrence que nous utilisons. Pour démontrer les résultats pour un espace \tilde{G} , nous avons besoin d'utiliser toutes les conséquences de ceux-ci pour des espaces plus petits. On essaiera d'indiquer à chaque fois où se trouvent les démonstrations finales des résultats en question.

Enfin, puisque c'est le point qui nous a valu le plus de commentaires, signalons qu'il reste un «trou» dans la démonstration. En effet, nous utilisons des résultats sur le lemme fondamental pondéré qui ont été annoncés par Chaudouard et Laumon mais qui n'ont été publiés par ces auteurs que sous des hypothèses restrictives. A nos yeux, ce problème n'est pas sérieux car il n'y a pas de doute que les méthodes des textes publiés permettent de traiter le cas général. Mais ce ne semble pas être l'opinion générale. En ce qui nous concerne, à notre regret, les lois de notre pays ne nous donnent pas les moyens de contraindre Chaudouard et Laumon à publier la partie manquante de leurs résultats.

La partie «géométrique» de nos résultats a été exposée au congrès international de Séoul, on peut se référer à [82] pour une présentation condensée.

Les renvois aux différents chapitres sont indiqués par des chiffres romains entre crochets : [VI] pour le chapitre VI par exemple.