Birkhäuser

Progress in Mathematics
Volume 317

More information about this series at http://www.springer.com/series/4848

Colette Moeglin • Jean-Loup Waldspurger

Stabilisation de la formule des traces tordue

Volume 2

Birkhäuser

Colette Moeglin
CNRS/Institut de Mathématiques
de Jussieu-Paris-Rive-Gauche
Paris, France

Jean-Loup Waldspurger
CNRS/Institut de Mathématiques
de Jussieu-Paris-Rive-Gauche
Paris, France

ISSN 0743-1643 ISSN 2296-505X (electronic)
Progress in Mathematics
ISBN 978-3-319-30057-3 ISBN 978-3-319-30058-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-319-30058-0

Library of Congress Control Number: 2016959578

Mathematics Subject Classification (2010): 11F70, 11F72, 22E50, 22E55

Printed on acid-free paper

This book is published under the trade name Birkhäuser, www.birkhauser-science.com
The registered company is Springer International Publishing AG
The registered company address is: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

Table des matières

Volume 2

Volume 1

Préface

Ainsi qu'on l'a dit dans l'introduction du premier volume, notre but est de stabiliser la formule des traces tordue en toute généralité, en suivant la méthode utilisée par Arthur dans ses trois articles [18], [19], [20]. Notre résultat élimine l'hypothèse essentielle posée par le même Arthur dans son livre [23] où il décrit le spectre discret des groupes classiques à partir de celui des groupes linéaires généraux.

Nos données de départ sont un corps de nombres F, un groupe réductif connexe G défini sur F, un espace tordu $\tilde{G}$ sur G et un caractère automorphe ω de $G(\mathbb{A}_F)$ (où $\mathbb{A}_F$ est l'anneau d'adèles de F). Si l'on préfère, on peut fixer un automorphisme θ de G défini sur F. L'espace tordu associé est l'ensemble $\tilde{G} = G\theta$, qui est muni des actions de G à gauche et à droite définies par $(g, \gamma = x\theta, g') \mapsto \gamma' = gx\theta(g')\theta$. En particulier, à tout élément γ de $\tilde{G}$ est associé un automorphisme ad_γ de G : si $\gamma = x\theta$, $ad_\gamma = ad_x \circ \theta$, où ad_x est la conjugaison par x. Dans cette situation, la formule des traces ω-équivariante permet d'étudier les représentations automorphes π de $G(\mathbb{A}_F)$ telles que $\pi \circ ad_\gamma \simeq \pi \otimes \omega$, où γ est un élément quelconque de $\tilde{G}(\mathbb{A}_F)$. Elle se présente de la façon suivante. On fixe un ensemble fini V de places de F, assez grand (contenant toutes les«mauvaises» places). On note F_V le produit des localisés F_v pour $v \in V$. Pour $f_V \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$, on a une égalité

$$I^{\tilde{G}}_{\text{géom}}(\omega, f_V) = I^{\tilde{G}}_{\text{spec}}(\omega, f_V),$$

le premier terme étant le côté «géométrique» de la formule et le second étant son côté «spectral». Cette égalité a été établie par Arthur, cf. [8], à partir de la version non-ω-équivariante démontrée dans le fameux «Morning Seminar». Celui-ci a été enfin rédigé il y a quelques années par Labesse et l'un de ses collaborateurs [55].

Comme dans le cas local, on introduit la notion de donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \omega)$. Une telle donnée $\mathbf{G}'$ est un objet assez riche et détermine en tout cas un groupe G' réductif connexe défini sur F et quasi-déployé et un espace tordu $\tilde{G}'$ sur G'. Il n'y a plus de caractère et l'espace tordu $\tilde{G}'$ est assez simple : la torsion se fait par automorphismes intérieurs de G'. Cela étant, la stabilisation de la formule des traces tordue se fait par récurrence sur la dimension de G selon le schéma assez simple suivant. On considère d'abord le cas où G est quasi-déployé, $\tilde{G}$ est «à torsion intérieure» et $\omega = 1$ (comme on vient de le dire, ces conditions sont remplies si l'on remplace la donnée de départ $(G, \tilde{G}, \omega)$ par celle issue d'une donnée endoscopique). Dans ce cas, pour un indice $\star =$ géom ou $\star =$ spec, on pose

$$SI_\star^{\tilde{G}}(f_V) = I_\star^{\tilde{G}}(f_V) - \sum_{\mathbf{G}';G'\neq G} i(\tilde{G},\mathbf{G}')SI_\star^{\tilde{G}'}(f_V^{\tilde{G}'}).$$

On a supprimé le ω dans $I_\star^{\tilde{G}}(f_V)$ puisqu'il est trivial. La somme porte sur les données endoscopiques de $(G,\tilde{G},\omega=1)$ qui vérifient diverses conditions : ellipticité, non-ramification hors de V etc... Il n'y en a qu'un nombre fini. Le terme $i(\tilde{G},\mathbf{G}')$ est une constante explicite. Puisqu'on impose de plus $G'\neq G$, les groupes G' qui apparaissent sont de dimension strictement plus petite que celle de G. On peut donc supposer définies les distributions $SI_\star^{\tilde{G}'}(.)$. La fonction $f_V^{\tilde{G}'}$ est le transfert de f_V. L'existence de ce transfert endoscopique est conséquence des travaux de Shelstad dans le cas des places archimédiennes (cf. [74]), de Ngo Bao Chau dans le cas des places finies. Le théorème que nous prouverons dans cette situation est que la distribution $f_V\mapsto SI^{\tilde{G}}(f_V)$ est stable, c'est-à-dire qu'elle annule les fonctions dont toutes les intégrales orbitales stables sont nulles. Revenons maintenant à un triplet $(G,\tilde{G},\omega)$ quelconque. On définit la version endoscopique $I_\star^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\omega,f_V)$ du terme géométrique ou spectral de la formule des traces par l'égalité

$$I_\star^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\omega,f_V) = \sum_{\mathbf{G}'} i(\tilde{G},\mathbf{G}')SI_\star^{\tilde{G}'}(f_V^{\tilde{G}'}),$$

avec les mêmes explications que ci-dessus. Le théorème principal que nous prouverons est l'égalité $I_\star^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\omega,f_V) = I_\star^{\tilde{G}}(\omega,f_V)$. Pour $\star =$ spec, celle-ci relie les représentations automorphes π de $G(\mathbb{A}_F)$ vérifiant la condition $\pi\circ ad_\gamma \simeq \pi\otimes\omega$ aux représentations automorphes des groupes associés aux données endoscopiques de $(G,\tilde{G},\omega)$. Un travail assez facile, fait en [X] 5.7 et fortement inspiré de [24], sépare la partie discrète de la partie continue de $I_{\text{spec}}^{\tilde{G}}(\omega,f_V)$. La partie discrète voit vraiment des traces de ω-représentations, même si se glissent des opérateurs d'entrelacement, tandis que la partie continue voit des intégrales de caractères pondérés parfaitement incalculables. La stabilisation vaut encore en ne gardant que les parties discrètes des deux membres de l'égalité ci-dessus. Celles-ci sont alors indépendantes, en un sens assez clair, du choix de l'ensemble de places V, grâce au lemme fondamental pour toute l'algèbre de Hecke sphérique (cf. [60]).

Signalons tout de suite que la présentation ci-dessus est grandement simplifiée. D'abord, les places réelles nécessitent parfois de considérer ensemble plusieurs formes intérieures du groupe G : ce sont les K-groupes d'Arthur, ici les K-espaces. On a expliqué au chapitre I pourquoi leur introduction est utile, cf. [I] 1.11 et [I] 4.9. D'autre part, les transferts que l'on a noté ici $f_V^{\tilde{G}'}$ vivent en général non pas sur $\tilde{G}'$, mais sur une donnée auxiliaire $\tilde{G}'_1$, laquelle est un espace tordu sur une extension G'_1 de G' par un tore central.

Le terme géométrique $I_{\text{géom}}^{\tilde{G}}(\omega,f_V)$ se présente comme une somme sur les espaces de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ de sommes de termes $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(A^{\tilde{M}}(\mathcal{O},\omega),f_V)$. Ici, $A^{\tilde{M}}(\mathcal{O},\omega)$

est une somme finie de ω-intégrales orbitales sur des classes de conjugaison par $M(F_V)$ d'éléments de $\tilde{M}(F)$ (c'est un objet essentiellement global) et $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,.)$ est une intégrale orbitale pondérée ω-équivariante (c'est un objet essentiellement local, fortement relié aux distributions que l'on a étudiées dans le premier volume). On doit stabiliser ces deux types d'ingrédients. La stabilisation des termes globaux $A^{\tilde{M}}(\mathcal{O},\omega)$ a été l'objet de plusieurs travaux successifs de Langlands, Kottwitz, Kottwitz et Shelstad, Arthur et Labesse. Arthur a traité entièrement le problème, cf. [19], mais dans le cas non tordu. Labesse a traité le cas tordu, cf [53], mais seulement dans le cas des orbites semi-simples. Nous reprenons les méthodes de ces deux auteurs pour traiter le cas général dans le chapitre VII, en utilisant une technique de descente. Toutefois, comme dans Arthur, certaines classes de conjugaison exceptionnelles ne se traitent pas directement et leur stabilisation ne sera obtenue que dans le chapitre X. La stabilisation des termes «locaux» $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,.)$ est plus difficile (pour $\tilde{M} \neq \tilde{G}$). La raison en est que la méthode d'Arthur qui rend invariante la formule des traces est très dissymétrique : elle concentre les difficultés du côté géométrique. En fait, ces distributions $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(.,.)$ n'ont de «géométrique» que leur ensemble d'indexation (des classes de conjugaison dans $\tilde{M}(F_V)$). Leur définition fait intervenir des objets spectraux et en fait, ces distributions sont à peu près incalculables en toute généralité. Leur stabilisation, obtenue au chapitre X, se fait par voie globale c'est-à-dire en utilisant toute la force de la formule des traces (bien que quelques résultats préparatoires aient déjà été prouvés dans le premier volume). C'est donc ce chapitre X qui contient l'essentiel de la preuve de la stabilisation géométrique. C'est aussi celui où sera abordé le côté spectral de la formule. Sa stabilisation résulte de celle de la partie géométrique mais, comme on vient de le dire, par une démonstration qui effectue un va-et-vient entre les deux côtés de la formule. Signalons que notre présentation de la formule spectrale est quelque peu simplifiée par rapport à celle d'Arthur quant aux questions de convergence car on dispose aujourd'hui des résultats sur ce sujet de Müller [65] et Finis, Lapid et Müller [35].

Le chapitre VI présente la partie géométrique de la formule et énonce les résultats concernant sa stabilisation. On y énonce aussi les hypothèses de récurrence générales qui vaudront pour toute la suite de la démonstration. Toutefois, dans bien des chapitres, une partie seulement de ces hypothèses sera utilisée et on expliquera selon les cas quelles sont les hypothèses vraiment utiles. On a déjà dit que le chapitre VII est consacré à la stabilisation de presque toutes les intégrales orbitales $A^{\tilde{G}}(\mathcal{O},\omega)$. C'est l'équivalent dans le cas tordu du deuxième article [19] d'Arthur. Le chapitre VIII commence la démonstration de la stabilisation des intégrales orbitales pondérées ω-équivariantes. On y démontre l'analogue de la proposition 3.1 de [20]. Le chapitre IX démontre une proposition analogue mais sur le corps de base réel. En effet, contrairement à Arthur, nous utilisons la même méthode pour traiter les problèmes locaux, que le corps de base soit archimédien ou non. Les preuves sont toutefois assez différentes dans les deux cas. En particulier, les questions de K-finitude sont nettement plus compliquées sur un corps de base archimédien. Le chapitre X contient l'énoncé de la partie spectrale de la formule des traces et celui de sa stabilisation. Il contient aussi un énoncé de stabilisation de la formule des traces locale tordue. Enfin, comme on l'a dit, il contient l'essentiel des démonstrations. On y suit dans ses grandes lignes le troisième article d'Arthur [20]. Comme il s'agit de la partie la plus consistante de notre travail, on a choisi de renoncer dans ce chapitre à certains formalismes mis au point dans le premier chapitre. Ceux-ci n'auraient fait qu'obscurcir la rédaction et leur rétablissement ne serait qu'un exercice facile. Enfin, on a adjoint un appendice en guise de chapitre XI. Il contient des résultats sur les représentations supertempérées ainsi qu'une extension au cas tordu des résultats d'Arthur contenus dans son très bel article à Selecta [13]. Cet appendice n'utilise pas les résultats des chapitres précédents mais, au contraire, est utilisé dans ceux-ci.

Comme dans le premier volume, nous énoncerons certains résultats comme «théorèmes à prouver». Nous les démontrerons bel et bien mais souvent beaucoup plus tard. La raison d'être de ces énoncés est la méthode de récurrence que nous utilisons. Pour démontrer les résultats pour un espace $\tilde{G}$, nous avons besoin d'utiliser toutes les conséquences de ceux-ci pour des espaces plus petits. On essaiera d'indiquer à chaque fois où se trouvent les démonstrations finales des résultats en question.

Enfin, puisque c'est le point qui nous a valu le plus de commentaires, signalons qu'il reste un «trou» dans la démonstration. En effet, nous utilisons des résultats sur le lemme fondamental pondéré qui ont été annoncés par Chaudouard et Laumon mais qui n'ont été publiés par ces auteurs que sous des hypothèses restrictives. A nos yeux, ce problème n'est pas sérieux car il n'y a pas de doute que les méthodes des textes publiés permettent de traiter le cas général. Mais ce ne semble pas être l'opinion générale. En ce qui nous concerne, à notre regret, les lois de notre pays ne nous donnent pas les moyens de contraindre Chaudouard et Laumon à publier la partie manquante de leurs résultats.

La partie «géométrique» de nos résultats a été exposée au congrès international de Séoul, on peut se référer à [82] pour une présentation condensée.

Les renvois aux différents chapitres sont indiqués par des chiffres romains entre crochets : [VI] pour le chapitre VI par exemple.