H.-J. KOWALSKY

—
TOPOLOGISCHE RÄUME

MATHEMATISCHE REIHE

BAND 26

LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN AUS DEM GEBIETE
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

TOPOLOGISCHE RÄUME

VON

H.-J. KOWALSKY

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ERLANGEN

SPRINGER BASEL AG 1961

Nachdruck verboten. Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten.

© Springer Basel AG 1961

Ursprünglich erschienen bei Birkhäuser Verlag Basel, 1961

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1961

ISBN 978-3-0348-6907-2

ISBN 978-3-0348-6906-5

DOI 10.1007/978-3-0348-6906-5

VORWORT

Die Theorie der topologischen Räume, auch mengentheoretische oder allgemeine Topologie genannt, gehört heute mit zu den Grundlagen weiter Teile der Mathematik. Topologische Begriffsbildungen und Methoden haben zahlreiche Gebiete befruchtet und deren Entwicklung maßgebend beeinflusst. Die topologischen Räume bilden daher eine der Grundstrukturen, die erst den Zugang zu moderner mathematischer Forschung eröffnen.

Die gesamte mengentheoretische Topologie stellt ein außerordentlich umfangreiches und weitverzweigtes Gebiet dar, das viele selbständige Teilgebiete umfasst. Ein umfangmässig beschränktes Lehrbuch bedingt daher von vornherein eine eng begrenzte Stoffauswahl. So werden in diesem Buch nur die Grundlagen der allgemeinen Theorie der topologischen Räume behandelt, ohne dass hierbei in irgend einer Weise Vollständigkeit angestrebt wird. Viele wichtige Dinge mussten unberücksichtigt bleiben oder konnten lediglich in kurzen Ergänzungen erwähnt werden.

Darstellungsmässig weicht dieses Buch vom Üblichen durch die weitgehende Verwendung des Filterbegriffs ab. Bereits bei der Einführung der topologischen Räume wird im Hinblick auf die Anwendungen in der Analysis an einen geeigneten Konvergenzbegriff für Filter angeknüpft. Aber auch weiterhin ermöglichen die Filter bisweilen begriffliche Vereinfachungen und vielfach eine formale Beweisführung, die an das gewohnte Rechnen mit Ungleichungen anschliesst. Bei dem Leser bedingt diese Art der Darstellung allerdings zunächst einen kurzen Gewöhnungsprozess.

Allen, die mich bei der Arbeit an diesem Buch durch Ratschläge und Hinweise unterstützt haben, möchte ich hier herzlich danken. In besonderem Mass gilt mein Dank jedoch den Herren H. BAUER, F. HOFMANN und E. LUFT, die die mühevollen Korrekturarbeiten auf sich genommen und mir mit wertvollen Verbesserungsvorschlägen entscheidende Hilfe geleistet haben.

Dem Birkhäuser Verlag bin ich für manches Entgegenkommen und für die sorgfältige Ausstattung dieses Buches zu großem Dank verpflichtet.

Erlangen, im Oktober 1960

H.-J. KOWALSKY

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	9

Erstes Kapitel: Grundlagen

§ 1. Grundbegriffe der Mengenlehre	11
§ 2. Geordnete Mengen und Verbände	19
§ 3. Filter	29

Zweites Kapitel: Topologische Räume

§ 4. Topologie und Grenzwert	40
§ 5. Einfache Begriffe und äquivalente Kennzeichnungen	45
§ 6. Ordnungstopologie und metrische Räume	54
§ 7. Der Verband der Topologien	59
§ 8. Trennungsaxiome	61
§ 9. Unterräume	70
§ 10. Mächtigkeitsbedingungen	73

Drittes Kapitel: Kompaktheit und Zusammenhang

§ 11. Kompaktheit	80
§ 12. Lokale Kompaktheit	88
§ 13. Parakompakte Räume	91
§ 14. Zusammenhang	100
§ 15. Lokaler Zusammenhang	106

Viertes Kapitel: Abbildungen

§ 16. Topologische Abbildungen, Homöomorphie	113
§ 17. Stetige Abbildungen	117
§ 18. Vollständig reguläre Räume	123
§ 19. Eigenschaften stetiger Abbildungen	130
§ 20. Übertragung von Topologien	135
§ 21. Quotientenräume	138
§ 22. Produkträume	143
§ 23. Abbildungsräume	150
§ 24. Summenräume	153

Fünftes Kapitel: Erweiterung und Kennzeichnung topologischer Räume

§ 25. Erweiterung topologischer Räume	158
§ 26. Die Wallmansche Erweiterung	163
§ 27. Die Stone-Čechsche Erweiterung	166
§ 28. Einbettungssätze	170
§ 29. Darstellungssätze	174

Sechstes Kapitel: Metrische und uniforme Räume

§ 30. Metrische Räume	183
§ 31. Metrisierung	189
§ 32. Erweiterung und Vervollständigung metrischer Räume	194
§ 33. Uniforme Strukturen	200
§ 34. Gleichmässige Stetigkeit und gleichmässige Konvergenz	207
§ 35. Erweiterung und Vervollständigung uniformer Räume	216

Siebentes Kapitel: Topologische Gruppen. Anwendungen

§ 36. Topologische Gruppen	226
§ 37. Erweiterung und Vervollständigung topologischer Gruppen	234
§ 38. Topologische Ringe und Körper	239
§ 39. Topologische Vektorräume, Approximationssatz von STONE-WEIER- STRASS	245
§ 40. Induktiver und projektiver Limes	253
Bezeichnungsübersicht	262
Bibliographie	264
Namen- und Sachverzeichnis	266