

ELEMENTE DER MATHEMATIK  
VOM HÖHEREN STANDPUNKT AUS

---

Herausgegeben von L. Locher-Ernst †

# Primzahlen

von

DR. ERNST TROST

Professor am Technikum des Kantons Zürich in Winterthur

Zweite, überarbeitete Auflage



---

Springer Basel AG

**Nachdruck verboten. Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten**

ISBN 978-3-7643-0387-7      ISBN 978-3-0348-6889-1 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-0348-6889-1

© Springer Basel AG

Ursprünglich erschienen bei Birkhäuser Verlag Basel 1968.

## VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE

Die Primzahlen werden als Bausteine der natürlichen Zahlen in jedem Lehrbuch der Zahlentheorie mehr oder weniger ausführlich behandelt, wobei man aber mit relativ wenigen Sätzen auskommt. Die selbständige Primzahltheorie ist ein weniger bekanntes Spezialgebiet der Arithmetik, das sich durch leichtverständliche Fragestellungen, aber oft komplizierte, zum Teil analytische Beweise auszeichnet. Manche Probleme harren hier noch der Lösung.

Wir haben uns die Aufgabe gestellt, einige Ergebnisse der «elementaren» Primzahltheorie abzuleiten und daneben über verschiedene interessante Resultate zu berichten, um dem Leser einen Einblick in dieses an ingeniosen Methoden reiche Gebiet zu vermitteln. Mit Rücksicht auf den beschränkten Umfang musste allerdings vieles wegbleiben, insbesondere haben wir auch mit Literaturhinweisen gespart. Der Leser findet in den Werken von LANDAU [12], INGHAM [9] und DICKSON [5] eine Fülle von weiteren Informationen (vgl. das Literaturverzeichnis auf Seite 94).

Ausser einigen einfachen Tatsachen aus der Differential- und Integralrechnung und der Mittelschulalgebra wird an Vorkenntnissen nichts vorausgesetzt; die notwendigen zahlentheoretischen Hilfsmittel sind in den ersten zwei Abschnitten entwickelt.

Eine Sensation ersten Ranges war 1948 die Entdeckung eines elementaren, das heisst von funktionentheoretischen Hilfsmitteln freien Beweises für den Primzahlsatz durch P. ERDÖS und A. SELBERG. Der gemeinsame, indirekte Beweis dieser Autoren (vgl. ERDÖS [6]) ist von VAN DER CORPUT und NAGELL [17] allgemein zugänglich gemacht worden. Wir geben hier eine leichte Abwandlung des Selbergschen konstruktiven Beweises (SELBERG [22]).

Die von VIGGO BRUN 1920 entwickelten höchst originellen Ideen zur Nutzbarmachung des Eratosthenischen Siebes haben sich als eines der kräftigsten Hilfsmittel der Primzahltheorie erwiesen und bis heute nichts von ihrer Fruchtbarkeit eingebüsst. Die von uns dargestellte Brunsche Methode gibt in gleicher Weise Abschätzungen nach oben und unten, während die neuere Siebmethode SELBERGS, auf die wir mangels Platz nur

hinweisen können, erst bei der Abschätzung nach oben zu abschliessenden, aber dafür bestmöglichen Resultaten geführt hat.

Verschiedene Herren haben mich durch Mitteilungen oder Zusendung von Arbeiten unterstützt. Mein Dank gilt vor allem N. G. W. H. BEEGER (Amsterdam), V. BRUN (Oslo), P. ERDÖS (Los Angeles), H. MEIER (Zürich), B. VAN DER POL (Genf), A. RENYI (Budapest), G. RICCI (Mailand), H. E. RICHERT (Göttingen), A. SELBERG (Princeton), W. SIERPIŃSKI (Warschau). Für die Anregung zur Abfassung dieses Büchleins und zahlreiche wertvolle Diskussionen danke ich dem Herausgeber dieser Sammlung, meinem Kollegen L. LOCHER-ERNST, herzlich.

Zürich, im April 1953

ERNST TROST

### VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE

Diese zweite deutsche Auflage (eine russische Übersetzung mit einem Anhang von A. O. GELFOND erschien 1959 in Moskau) unterscheidet sich im Aufbau, der in den Besprechungen durchwegs als gut befunden wurde, nicht von der ersten Auflage. In diesen Rahmen liessen sich zahlreiche Angaben über neue Ergebnisse der Primzahlforschung einfügen. Der Bestand an bewiesenen Sätzen ist gleich geblieben, doch hoffe ich, einige Beweise verbessert zu haben. Die grösste Änderung erfuhr Kapitel VII, das jetzt einen indirekten Beweis des Primzahlsatzes enthält. Dankbar sei erwähnt, dass mir die Ausarbeitung einer Vorlesung von K. CHANDRASEKHARAN (ETH Zürich, 1964) zur Verfügung stand, der ich am Schluss des Beweises gefolgt bin und dabei eine graphische Darstellung (§ 49) benutzte. Der neu hinzugefügte kürzere Beweis des Brunschen Satzes über die Primzahlzwillinge wird vielleicht denjenigen Lesern dienen, die die Ausführungen über das allgemeine Brunsche Sieb zu mühsam finden. Der Ersatz dieses Siebverfahrens durch das moderne Selbergsche Sieb kam aus verschiedenen Gründen nicht in Frage.

Verschiedene Leser haben mir Versehen mitgeteilt, für die ich mich hier entschuldigen möchte. Ich danke besonders Herrn J. STEINIG (Zürich), der die ersten sechs Kapitel einer kritischen Durchsicht unterzogen und auch die Korrekturabzüge gelesen hat.

Es sei betont, dass dieses Büchlein nicht mehr sein will, als eine erste Einführung in das faszinierende Gebiet der Primzahlen, über die man in der angeführten Lehrbuchliteratur weitere Informationen finden kann.

Mein bester Dank gilt auch dem Birkhäuser Verlag, der diese Neuauflage ermöglicht und ausgezeichnet betreut hat.

Zürich, im August 1967

ERNST TROST

## INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort zur ersten Auflage . . . . .	3
Vorwort zur zweiten Auflage . . . . .	4
I. Grundlagen und erste Übersicht . . . . .	7
II. Zahlentheoretische Funktionen . . . . .	19
III. Allgemeine Primzahlkriterien . . . . .	24
IV. Spezielle Primzahlen . . . . .	34
V. Primzahlsummen . . . . .	44
VI. Allgemeine Aussagen über $\pi(x)$ und $p_n$ . . . . .	51
VII. Elementarer Beweis des Primzahlsatzes . . . . .	68
VIII. Elementarer Beweis des Satzes über die arithmetische Progression . . . . .	75
IX. Die Siebmethode . . . . .	80
X. Die Goldbachsche Vermutung . . . . .	92
Literaturverzeichnis . . . . .	98