SIEGFRIED PRÖSSDORF
EINIGE KLASSEN SINGULÄRER GLEICHUNGEN

MATHEMATISCHE REIHE

BAND 46

LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN

AUS DEM GEBIETE DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

EINIGE KLASSEN SINGULÄRER GLEICHUNGEN

Von Prof. Dr. rer. nat. habil. SIEGFRIED PRÖSSDORF
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt

Springer Basel AG
1974

Dieses Buch erschien auch in der Reihe
„Mathematische Lehrbücher und Monographien“,
II. Abteilung, Band 37, im Akademie-Verlag, Berlin

© Springer Basel AG 1974

Ursprünglich erschienen bei Birkhäuser Verlag Basel 1974
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1974

Nachdruck verboten

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen
und der Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten.

ISBN 978-3-0348-5828-1
DOI 10.1007/978-3-0348-5827-4

ISBN 978-3-0348-5827-4 (eBook)

MEINEM LEHRER

S. G. MICHLIN

GEWIDMET

VORWORT

Der Grundstein für den Aufbau einer allgemeinen Theorie der eindimensionalen singulären Integralgleichungen war in den fundamentalen Arbeiten von F. NOETHER [1] über Integralgleichungen mit einem HILBERTSchen Kern sowie von N. WIENER und E. HOPF [1] über Integralgleichungen mit Differenzkernen auf der Halbachse gelegt worden. Die von NOETHER betrachteten Gleichungen sowie die damit eng verwandten Integralgleichungen mit einem CAUCHYSchen Kern werden in der Literatur gewöhnlich schlechthin als „singuläre Integralgleichungen“ bezeichnet, während für Integralgleichungen mit einem Differenzkern auf der Halbachse die Bezeichnung „WIENER-HOPF-Gleichungen“ üblich ist. In diesem Buch wird der Begriff „singuläre Gleichung“ als Oberbegriff für beide Gleichungstypen und einige andere verwendet.

Die Theorie der singulären Gleichungen vom Normaltyp, an deren Entwicklung besonders die sowjetischen Mathematiker maßgeblich beteiligt waren, kann im wesentlichen als abgeschlossen angesehen werden. Eine umfassende Darstellung dieser Theorie ist in dem Werk von N. I. MUSCHELISCHWILI [1] (für Gleichungen mit CAUCHYSchen und HILBERTSchen Kernen und Räume HÖLDER-stetiger Funktionen) und in der Monographie von I. Z. GOCHBERG und I. A. FELDMAN [1] (für WIENER-HOPF-Gleichungen sowie einige allgemeinere singuläre Gleichungen) gegeben.

In den letzten Jahren hat sich in der Theorie der singulären Gleichungen eine selbständige Richtung herausgebildet, die sich mit Untersuchungen solcher Gleichungen beschäftigt, deren Symbol Nullstellen besitzt (entartete singuläre Gleichungen oder Gleichungen vom nicht normalen Typ). Für solche Gleichungen ist in der letzten Zeit sowohl das theoretische als auch das praktische Interesse stark angewachsen. Es ist eine umfangreiche Literatur erschienen, in der die genannten Gleichungen unter den verschiedensten Gesichtspunkten und mit teilweise sehr verschiedenen Methoden behandelt werden. Ich habe mir deshalb in diesem Buch die Aufgabe gestellt, für einige wichtige Klassen eindimensionaler singulärer Gleichungen vom nicht normalen Typ eine geschlossene Theorie aufzubauen, in der alle wesentlichen Ergebnisse, die auf diesem Gebiet zur gegenwärtigen Zeit vorliegen, ihren Niederschlag finden. Zu den betrachteten Gleichungen gehören die singulären Integralgleichungen mit einem CAUCHYSchen oder HILBERTSchen Kern, die WIENER-HOPFSchen Integralgleichungen, deren diskretes Analogon sowie verschiedene paarige Gleichungen mit Differenzkernen.

Auf einige wichtige Fragen, die mit der in diesem Buch behandelten Thematik in engem Zusammenhang stehen, konnte mit Rücksicht auf den Umfang des

Buches nicht eingegangen werden. Das gilt vor allem für ähnlich gelagerte (nicht elliptische) mehrdimensionale Probleme; auf diesem Gebiet sind in letzter Zeit große Fortschritte erzielt worden.¹⁾ Wir betrachten auch keine nicht linearen singulären Integralgleichungen.

Im vorliegenden Buch werden vornehmlich funktionalanalytische Methoden benutzt. Wir setzen voraus, daß der Leser mit den Elementen der Theorie der linearen Operatoren in BANACH-Räumen sowie mit den Grundbegriffen der Theorie der linearen topologischen Räume vertraut ist. Die wichtigsten aus diesen Gebieten benötigten Hilfsmittel sind im ersten Abschnitt des Kapitels I zusammengestellt. An einigen wenigen Stellen des Buches werden außerdem Grundkenntnisse über BANACHSche Algebren benötigt (etwa im Umfange des Kapitels I des Buches von I. M. GELFAND, D. A. RAIKOW und G. E. SCHILLOW [1]).

Das Interesse an den Methoden der Funktionalanalysis und insbesondere am Gegenstand dieses Buches verdanke ich meinem geschätzten Lehrer, Herrn Professor S. G. MICHLIN (Leningrad). Durch zahlreiche Gespräche mit Herrn Professor I. Z. GOCHBERG (Kischinjaw) in den letzten Jahren wurde ich angeregt, dieses Buch zu schreiben. Die Herren Professor S. G. MICHLIN und Professor I. Z. GOCHBERG haben sich auch große Teile des Manuskriptes angesehen und mir eine Reihe wertvoller Hinweise gegeben, wofür ich ihnen an dieser Stelle meinen herzlichen Dank ausspreche.

Ferner möchte ich Herrn Dr. B. SILBERMANN (Karl-Marx-Stadt) danken, der das Manuskript im ganzen gelesen hat. Nicht zuletzt gilt mein Dank dem Akademie-Verlag Berlin, insbesondere den Fachredakteuren für Mathematik, Frau Dipl.-Math. R. HELLE und Herrn Dipl.-Math. R. HÖPPNER, für die verständnisvolle Berücksichtigung aller meiner Wünsche und die sorgfältige Ausstattung des Buches.

Karl-Marx-Stadt, im Dezember 1972

S. PRÖSSDORF

¹⁾ Literaturhinweise bis zum Jahre 1969 findet der Leser hierzu im Übersichtsartikel [15] des Verfassers.

INHALTSVERZEICHNIS

	Einführung	1
<i>Kapitel 1: NOETHERsche Operatoren</i>		7
1.1.	Einige Grundbegriffe und Bezeichnungen	7
1.2.	Projektoren und normal auflösbare Operatoren	11
1.3.	NOETHERsche Operatoren	16
1.4.	Operatoren mit beschränktem Regularisator	29
1.5.	Operatoren mit nicht beschränktem Regularisator	30
1.6.	Bemerkungen und Literaturhinweise	38
<i>Kapitel 2: Abstrakte singuläre Gleichungen vom Normaltyp</i>		41
2.1.	Eine Algebra von Operatorfunktionen	41
2.1.1.	Der Begriff des Symbols	41
2.1.2.	Polynome von invertierbaren Operatoren	42
2.1.3.	Stetige Funktionen von invertierbaren Operatoren	43
2.1.4.	Umkehrung stetiger Funktionen von invertierbaren Operatoren	45
2.1.5.	WIENER-HOPFSche Operatoren	47
2.2.	Abstrakte singuläre Operatoren	50
2.2.1.	Paarige Operatoren	50
2.2.2.	Der abstrakte singuläre Operator	53
2.2.3.	Singuläre Operatoren mit Koeffizienten aus $\mathfrak{H}(U)$	54
2.3.	Faktorisierung von Funktionen	58
2.3.1.	Faktorisierung in R -Algebren	58
2.3.2.	Faktorisierung in Algebren mit zwei Normen	62
2.3.3.	Faktorisierung von Funktionen auf der reellen Achse	64
2.3.4.	Eine spezielle Funktionenalgebra	65
2.4.	Anwendung der Faktorisierung auf die Lösung von singulären Gleichungen	68
2.4.1.	WIENER-HOPFSche Gleichungen	68
2.4.2.	Abstrakte singuläre Gleichungen.	70
2.5.	Bemerkungen und Literaturhinweise	72
<i>Kapitel 3: Spezielle singuläre Gleichungen vom Normaltyp</i>		73
3.1.	Diskrete WIENER-HOPF-Gleichungen	73
3.2.	WIENER-HOPFSche Integralgleichungen	79
3.3.	Paarige WIENER-HOPF-Gleichungen	89
3.3.1.	Paarige Systeme.	89
3.3.2.	Paarige Integralgleichungen.	91
3.4.	Singuläre Integralgleichungen	93

3.4.1.	Eigenschaften des CAUCHYSchen singulären Integrals in $H^\mu(\Gamma)$	93
3.4.2.	Die singuläre Integralgleichung mit CAUCHYSchem Kern in $H^\mu(\Gamma)$	100
3.4.3.	Das HILBERTSche singuläre Integral und die Integralgleichung mit HILBERT- schem Kern	102
3.4.4.	Das singuläre Integral in $L^p(\Gamma)$	104
3.4.5.	Der Fall des Einheitskreises	106
3.4.6.	Die singuläre Integralgleichung in $L^p(\Gamma)$	107
3.4.7.	Lösung der charakteristischen Gleichung	110
3.4.8.	Das RIEMANN-HILBERTSche Randwertproblem	112
3.4.9.	Über die Stetigkeit der Lösung	112
3.5.	Bemerkungen und Literaturhinweise	113

Kapitel 4: Abstrakte singuläre Gleichungen vom nicht normalen Typ 114

4.1.	Die Methode einer speziellen Faktorisierung.	114
4.2.	WIENER-HOPFSche Gleichungen	118
4.3.	Abstrakte singuläre Gleichungen	124
4.4.	Eine Algebra singulärer Operatoren	131
4.5.	Die Methode der linken Regularisierung	136
4.6.	Bemerkungen und Literaturhinweise	142

Kapitel 5: WIENER-HOPFSche Integralgleichungen vom nicht normalen Typ und ihr diskretes Analogon 143

5.1.	Diskrete WIENER-HOPF-Gleichungen	143
5.1.1.	Die durch Nullstellen des Symbols erzeugten Folgenräume	143
5.1.2.	Symbole mit Nullstellen ganzzahliger Ordnungen	150
5.1.3.	Symbole mit Nullstellen nicht ganzzahliger Ordnungen	156
5.2.	WIENER-HOPFSche Integralgleichungen	157
5.2.1.	Die durch Nullstellen des Symbols erzeugten Funktionenräume	157
5.2.2.	Symbole mit Nullstellen ganzzahliger Ordnungen	166
5.2.3.	Gleichungen erster Art	174
5.2.4.	Symbole mit Nullstellen nicht ganzzahliger Ordnungen.	180
5.2.5.	Beispiele	182
5.3.	Paarige diskrete WIENER-HOPF-Gleichungen	185
5.3.1.	Die durch Nullstellen des Symbols erzeugten Folgenräume	185
5.3.2.	Symbole mit Nullstellen beliebiger endlicher Ordnung	188
5.4.	Paarige WIENER-HOPFSche Integralgleichungen	191
5.4.1.	Die durch Nullstellen des Symbols erzeugten Funktionenräume	191
5.4.2.	Symbole mit endlich vielen Nullstellen	194
5.5.	Nicht beschränkte Regularisierung von paarigen WIENER-HOPF-Gleichungen	197
5.6.	Bemerkungen und Literaturhinweise	199

Kapitel 6: Singuläre Integralgleichungen vom nicht normalen Typ 201

6.1.	Hilfssätze	201
6.1.1.	Bezeichnungen	201
6.1.2.	Einige Ungleichungen	203
6.1.3.	Weitere Eigenschaften des singulären Integrals	206

6.1.4.	Mittlere Ableitungen	210
6.2.	Die durch Nullstellen des Symbols erzeugten Räume	213
6.3.	Symbole mit Nullstellen ganzzahliger Ordnungen	218
6.4.	Symbole mit Nullstellen nicht ganzzahliger Ordnungen	225
6.5.	Einige allgemeine Fälle von Entartungen	227
6.6.	Die Lösung einer singulären Integralgleichung vom nicht normalen Typ mittels Faktorisierung	233
6.7.	Nicht beschränkte Regularisierung singulärer Integralgleichungen vom nicht normalen Typ	234
6.7.1.	Nicht beschränkte Regularisierung	234
6.7.2.	Äquivalente nicht beschränkte Regularisierung	239
6.8.	Bemerkungen und Literaturhinweise	240

Kapitel 7: Systeme singulärer Gleichungen vom Normaltyp 243

7.1.	Ein Satz über Operatorenmatrizen	243
7.2.	Faktorisierung von Matrixfunktionen	246
7.3.	Systeme von abstrakten singulären Gleichungen	254
7.4.	Systeme von WIENER-HOPFSchen Gleichungen	256
7.4.1.	Systeme von diskreten WIENER-HOPF-Gleichungen	256
7.4.2.	Systeme von WIENER-HOPFSchen Integralgleichungen	257
7.4.3.	Systeme von paarigen WIENER-HOPF-Gleichungen	258
7.5.	Systeme von singulären Integralgleichungen	259
7.6.	Bemerkungen und Literaturhinweise	262

Kapitel 8: Systeme singulärer Gleichungen vom nicht normalen Typ 263

8.1.	Darstellungen singulärer Matrixfunktionen	263
8.2.	Systeme von diskreten WIENER-HOPF-Gleichungen	268
8.2.1.	Die durch Nullstellen des Symbols erzeugten Räume	268
8.2.2.	Symbole mit Nullstellen ganzzahliger Ordnungen	270
8.3.	Systeme von WIENER-HOPFSchen Integralgleichungen	271
8.3.1.	Die durch Nullstellen des Symbols erzeugten Räume	271
8.3.2.	Gleichungssysteme zweiter Art	273
8.3.3.	Gleichungssysteme erster Art	274
8.4.	Systeme von paarigen WIENER-HOPF-Gleichungen	275
8.4.1.	Die durch Nullstellen des Symbols erzeugten Räume	275
8.4.2.	Gleichungssysteme zweiter Art	278
8.4.3.	Gleichungssysteme erster Art	280
8.4.4.	Nicht beschränkte Regularisierung	280
8.5.	Systeme von singulären Integralgleichungen	281
8.5.1.	Die durch Nullstellen des Symbols erzeugten Räume	281
8.5.2.	Symbole mit Nullstellen ganzzahliger Ordnungen	283
8.5.3.	Symbole mit Nullstellen nicht ganzzahliger Ordnungen	285
8.5.4.	Lösung eines Systems singulärer Integralgleichungen vom nicht normalen Typ mittels Faktorisierung	289
8.6.	Nicht beschränkte Regularisierung von Systemen singulärer Integral- gleichungen	292
8.6.1.	Nicht beschränkte Regularisierung	292
8.6.2.	Äquivalente nicht beschränkte Regularisierung	294
8.7.	Bemerkungen und Literaturhinweise	295

<i>Kapitel 9: Singuläre Gleichungen in einigen abzählbar-normierten Räumen und Distributionsräumen.</i>	297
9.1. Operatorengleichungen in Distributionsräumen	297
9.2. Diskrete WIENER-HOPF-Gleichungen	302
9.2.1. Einige Folgenräume	302
9.2.2. Gleichungen in Grundräumen	303
9.2.3. Gleichungen in Distributionsräumen	309
9.3. WIENER-HOPFSche Integralgleichungen	311
9.3.1. Einige Funktionenräume	311
9.3.2. Gleichungen zweiter Art	312
9.3.3. Gleichungen erster Art	315
9.4. Singuläre Integralgleichungen	316
9.4.1. Hilfssätze	316
9.4.2. Gleichungen im Grundraum	318
9.4.3. Gleichungen im Distributionsraum	320
9.5. Bemerkungen und Literaturhinweise	321
<i>Anhang A: Über singuläre Gleichungen mit unstetigem Symbol</i>	323
<i>Anhang B: Ein Projektionsverfahren zur Lösung singulärer Gleichungen vom nicht normalen Typ</i>	329
<i>Literatur</i>	337
<i>Symbolverzeichnis</i>	347
<i>Namen- und Sachverzeichnis</i>	349