W. GÄHLER

GRUNDSTRUKTUREN DER ANALYSIS I

MATHEMATISCHE REIHE

BAND 58

LEHRBÜCHER UND MONOGRAPHIEN

AUS DEM GEBIETE DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

GRUNDSTRUKTUREN DER ANALYSIS I

von

Dr. habil. Werner Gähler
Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik
der Akademie der Wissenschaften der DDR

1977
SPRINGER BASEL AG

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Gähler, Werner
Grundstrukturen der Analysis. – Basel, Stuttgart: Birkhäuser.
1. – 1. Aufl. – 1977.
(Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften:
Math. Reihe; Bd. 58)
ISBN 978-3-7643-0901-5 ISBN 978-3-0348-5572-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-0348-5572-3

Erschienen im Akademie-Verlag, 108 Berlin, Leipziger Straße 3—4

Ursprünglich erschienen bei Birkhäuser Verlag, Basel 1977
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1977

ISBN 978-3-7643-0901-5

VORWORT

In der Monographie wird ein systematischer Aufbau der Analysis unter Benutzung des Limitierungsbegriffs vorgenommen. Insbesondere werden die Theorie der Limesräume und limesuniformen Räume, die limitierte Algebra und die allgemeine Differentialrechnung entwickelt.

Die Notwendigkeit, den Topologiebegriff abzuschwächen und ihn durch den — wie sich zeigt — bedeutend leistungsfähigeren Begriff der Limitierung zu ersetzen, ergibt sich bei einer Reihe von Problemen in Abbildungsräumen. Wir führen zwei Beispiele an. Bekanntlich existiert zu topologischen, ja sogar zu separierten topologischen Räumen X und Y im allgemeinen keine gröbste Topologie von $C(X, Y)$, bezüglich der die Evaluationsabbildung ω von $C(X, Y) \times X$ in Y stetig ist, was zur Folge hat, daß die Kategorien aller topologischen Räume und aller HAUSDORFF-Räume nicht cartesisch abgeschlossen sind. Es existiert aber stets eine gröbste Limitierung von $C(X, Y)$, bezüglich der ω stetig ist, und die Kategorien aller pseudotopologischen und aller separierten pseudotopologischen Räume sind cartesisch abgeschlossen. Nach dem Satz von KELLER-MAISSEN gibt es zu separierten lokalkonvexen topologischen Vektorräumen X und Y nur dann eine Vektorraumtopologie von $L(X, Y)$, bezüglich der die Evaluationsabbildung von $L(X, Y) \times X$ in Y stetig ist, wenn X normierbar ist, weshalb zum Beispiel die Kategorien aller topologischen Vektorräume und aller separierten lokalkonvexen topologischen Vektorräume bezüglich Tensorprodukte keine abgeschlossenen Kategorien bilden. Die Kategorien aller pseudotopologischen Vektorräume und aller in einem engeren Sinne separierten lokalkonvexen pseudotopologischen Vektorräume sind hingegen, als symmetrische monoidale Kategorien bezüglich Tensorprodukte, abgeschlossen. Die konsequente Benutzung des Limitierungsbegriffs führt zu wichtigen Fortschritten in einer Reihe von Teilgebieten der Analysis, etwa der allgemeinen Differentialrechnung und der Dualitätstheorie. Wir gehen auf die erwähnten Probleme im Kapitel über Abbildungsräume im zweiten Band der Monographie genauer ein.

Der erste Band besteht aus vier Kapiteln. Das erste Kapitel enthält die Mengenlehre. Sie wird relativ ausführlich dargestellt. Unter anderem werden in ihr Hilfsmittel für die Filtertheorie bereitgestellt und Grundlagen für die in den späteren Kapiteln vorgenommenen kategorientheoretischen Untersuchungen gebracht. Im zweiten Kapitel wird auf den Begriff des $\wedge$-Ideals und den dualen Begriff des $\vee$-Ideals eingegangen. $\wedge$- und $\vee$-Ideale im Teilmengenverband einer Menge sind gerade die Filter und Dualfilter in dieser Menge. Der allgemeine Konvergenzbegriff wird mittels $\wedge$-Idealen im Filterverband einer Menge und eine Verallgemeinerung des Bornologiebegriffs, der Begriff der Hypobornologie, mittels $\wedge$-Idealen im Dualfilterverband einer Menge definiert. In dem dritten und vierten Kapitel wird die Theorie der Limesräume und der limesuniformen Räume entwickelt, und zwar weitgehend in Anlehnung an die Kategorientheorie.

Eine Orientierung über die umfangreiche vorhandene Literatur ist durch das Literaturverzeichnis möglich, es bezieht sich auch auf den zweiten Band. In wichtigen Fällen sind im Text Literaturhinweise angeführt.

Der Autor ist mehreren Kollegen für wertvolle Hilfe und Verbesserungsvorschläge zu Dank verpflichtet, insbesondere Herrn G. Kneis für die kritische Durchsicht des gesamten Manuskripts und den Herren M. Kühnrich und K.-P. Rudolph für die kritische Durchsicht von Teilen des Manuskripts. Dankbar erwähnt sei, daß mehrere Fachkollegen, insbesondere die sowjetischen Kollegen W. I. Awerbuch und O. G. Smoljanow, mit dem Autor wertvolle Gespräche über das im Buch behandelte Gebiet geführt haben. Schließlich möchte der Autor dem Verlag danken, der stets den Wünschen des Autors mit freundlicher Bereitwilligkeit entgegengekommen ist.

Berlin, 1976 W. Gähler

INHALTSVERZEICHNIS

Grundstrukturen der Analysis II

INHALTSÜBERSICHT