

Dynamiques complexes et morphogenèse

Springer

Paris

Berlin

Heidelberg

New York

Hong Kong

Londres

Milan

Tokyo

Chaouqi Misbah

Dynamiques complexes et morphogenèse

**Introduction aux sciences
non linéaires**

 Springer

Chauqi Misbah

LIPhy (laboratoire interdisciplinaire de physique)

CNRS et université Joseph-Fourier Grenoble I

140, rue de la Physique

38402 Saint-Martin-d'Hères

ISBN : 978-2-8178-0193-3 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

© Springer-Verlag France, 2011

Imprimé en France

Springer-Verlag est membre du groupe Springer Science + Business Media

Cet ouvrage est soumis au copyright. Tous droits réservés, notamment la reproduction et la représentation, la traduction, la réimpression, l'exposé, la reproduction des illustrations et des tableaux, la transmission par voie d'enregistrement sonore ou visuel, la reproduction par microfilm ou tout autre moyen ainsi que la conservation des banques de données. La loi française sur le copyright du 9 septembre 1965 dans la version en vigueur n'autorise une reproduction intégrale ou partielle que dans certains cas, et en principe moyennant le paiement des droits. Toute représentation, reproduction, contrefaçon ou conservation dans une banque de données par quelque procédé que ce soit est sanctionnée par la loi pénale sur le copyright.

L'utilisation dans cet ouvrage de désignations, dénominations commerciales, marques de fabrique, etc. même sans spécification ne signifie pas que ces termes soient libres de la législation sur les marques de fabrique et la protection des marques et qu'ils puissent être utilisés par chacun.

La maison d'édition décline toute responsabilité quant à l'exactitude des indications de dosage et des modes d'emploi. Dans chaque cas il incombe à l'utilisateur de vérifier les informations données par comparaison à la littérature existante.



Maquette de couverture: Nadia Ouddane

Imprimé par : XL Print - 42-Saint-Etienne - V007689/00

Dépot légal : Mai 2011

À Florence, Hisham et Sammy
À mes parents et frères et soeurs

Avant-propos

La nature regorge d'illustrations de phénomènes non linéaires ouvrant la porte à une complexité que la science du XX^e siècle n'a fait qu'entrouvrir et que le XXI^e siècle se doit d'explorer. À partir d'exemples simples et communs puisés dans différentes disciplines (mécanique, hydrodynamique, chimie, dynamique de populations, etc.), cet ouvrage introduit le langage et les notions propres aux sciences non linéaires permettant d'analyser, de comprendre et de décrire tous ces phénomènes en adoptant progressivement une approche formelle à portée universelle. La théorie du chaos est abordée simplement avec une perspective statistique pour comparer et discriminer les phénomènes chaotiques des phénomènes aléatoires. La théorie des catastrophes est exposée avec le même souci de simplicité ; les sept catastrophes élémentaires sont extraites de manière qualitative avec un minimum de formalisme mathématique. Une des forces de cette théorie est en effet la faculté d'établir une classification des catastrophes sans avoir besoin de connaître le type d'équations décrivant le système ; celles-ci peuvent être arbitrairement complexes, ou même impossibles à écrire. La théorie de la morphogenèse (émergence des formes) est introduite également à partir d'exemples visualisables aisément, telle la convection ou les systèmes de réaction-diffusion chimique, la relation entre la morphogenèse chimique et celle des êtres vivants, comme le pelage de certains animaux, est alors évoquée. L'étude de l'instabilité des structures spatiales à une et deux dimensions est traitée ainsi que le changement d'états du système le faisant évoluer de solutions stables à des solutions instables ou métastables, et inversement, avec un souci pédagogique poussé. Le dilemme de la sélection d'une vitesse unique d'invasion (parmi un ensemble infini de solutions) d'une solution instable par une solution stable est présenté et résolu à l'aide de considérations élémentaires. Ainsi, ces phénomènes dits complexes sont abordés simplement dans cet ouvrage par des exemples concrets dont l'analyse et la compréhension permettent d'en extraire toute la substance universelle à l'aide d'un formalisme mathématique accessible. De par sa relative simplicité, la majeure partie de cet ouvrage est accessible aux élèves de classes préparatoires, aux étudiants de licence (L1, L2, L3), et très adaptée aux étudiants de maîtrise (M1, M2) et en doctorat, aux ingénieurs. Il s'adresse également à tout ingénieur, tout chercheur et tout enseignant-chercheur souhaitant être au fait des connaissances actuelles en sciences non linéaires.

Table des matières

Table des illustrations	xvii
1 Présentation des grandes lignes	1
2 Introduction élémentaire aux bifurcations à une dimension	15
2.1 Un exemple mécanique simple	15
2.1.1 Énergie potentielle et position d'équilibre	15
2.1.2 Une explication intuitive de l'existence d'une bifurcation	18
2.1.3 Analyse de la bifurcation	19
2.1.4 Universalité au voisinage d'un point de bifurcation	19
2.2 Analogie entre une bifurcation fourche et une transition de phase du deuxième ordre	21
2.3 Considérations dynamiques	22
2.3.1 Analyse de stabilité linéaire	23
2.3.2 Ralentissement critique	24
2.3.3 Élimination adiabatique des modes rapides – réduction du nombre de degrés de liberté	25
2.3.4 Équation d'amplitude	27
2.3.5 Forme canonique de l'équation d'amplitude	28
2.3.6 Attracteurs de la dynamique	29
2.3.7 Fonction de Lyapunov	30
2.3.8 Brisure de symétries	30
2.4 Systèmes dynamiques et importance de la bifurcation fourche	31
3 Les autres bifurcations génériques	33
3.1 Bifurcation imparfaite ; brisure extrinsèque de symétrie	33
3.1.1 Un avant-goût de la théorie des catastrophes	38
3.2 Bifurcation sous-critique et multistabilité	40
3.2.1 Métastabilité et rôle des fluctuations	45
3.2.2 Cycle d'hystérésis	46
3.3 Bifurcation transcritique	47

3.3.1	Stabilité linéaire des points fixes	49
3.4	Bifurcation col-nœud	51
3.4.1	Rappel du pendule simple	51
3.4.2	Pendule simple en présence d'une nouvelle force extérieure	52
3.4.3	Stabilité linéaire	53
3.4.4	Forme universelle de la bifurcation col-nœud	55
3.4.5	Origine de la dénomination col-nœud	55
3.4.6	Mouvement de bascule ou de <i>tumbling</i>	58
3.4.7	Digressions vers la biologie	62
3.5	Définition d'une bifurcation	63
3.6	Théorie des catastrophes et stabilité structurelle	64
3.6.1	Quelle différence entre stabilité structurelle et stabilité dynamique?	65
3.6.2	Stabilité structurelle et subjectivité	65
3.7	En quoi consiste la théorie des catastrophes?	66
3.7.1	Illustration de la théorie des catastrophes	67
3.8	Stabilité structurelle avec un nombre infini d'exceptions : les lieux des catastrophes!	71
3.9	Problèmes	72
3.9.1	Problème : le plateau de Maxwell	72
3.9.2	Problème : exemple d'une bifurcation sous-critique	73
3.9.3	Problème : bifurcation sous-critique imparfaite	77
3.9.4	Problème : Euler et le film de savon	77
3.9.5	Problème : une bifurcation sous-critique possède une branche col-nœud	84
4	Classification des sept catastrophes élémentaires	87
4.1	Catastrophe pli ou point tournant	88
4.1.1	Déploiement des singularités en des termes simples	89
4.1.2	Comment le nombre de paramètres indépendants affecte- t-il la puissance de la singularité?	91
4.1.3	Notion de codimension	93
4.2	La catastrophe <i>cusp</i>	94
4.3	La catastrophe queue d'aronde	97
4.4	La catastrophe papillon	98
4.5	Qu'en est-il des problèmes à plusieurs degrés de liberté?	99
4.6	La catastrophe ombilic hyperbolique	101
4.7	La catastrophe ombilic elliptique	102
4.8	La catastrophe ombilic parabolique	104
4.9	Résumé des sept catastrophes élémentaires	104
4.10	Remarques générales	104
4.11	Problèmes	106

4.11.1	Problème : plus de détail sur la catastrophe ombilic hyperbolique	106
5	Bifurcation de Hopf	109
5.1	L'oscillateur de van der Pol	109
5.1.1	Discussion qualitative	112
5.1.2	Étude de la dynamique non linéaire	113
5.1.3	Bifurcation de Hopf	114
5.1.4	Espace des phases et cycle limite	115
5.2	Le modèle proie-prédateur, un exemple de dynamique de population	118
5.2.1	Résultats essentiels issus du modèle Lotka-Voltera (LV)	118
5.2.2	Un modèle plus réaliste de la dynamique de populations conduisant à un cycle limite	121
5.3	Réactions chimiques	124
5.3.1	La loi d'action et de masse	124
5.3.2	Cinétique de réaction	125
5.3.3	Équations d'évolution non linéaires	126
5.3.4	Le Bruxellateur	127
6	Équation d'amplitude pour une bifurcation de Hopf	129
6.1	Dérivation de l'équation d'amplitude complexe	129
6.1.1	Analyse multi-échelle	130
6.1.2	Condition de solubilité ou de solvabilité	134
6.1.3	Quelques précisions utiles sur l'équation d'amplitude	137
6.1.4	Dérivation de l'équation d'amplitude à partir des symétries	138
6.1.5	Propriétés de l'équation d'amplitude complexe	138
6.2	Cycle limite instable	140
6.3	Précisons davantage la notion de cycle limite	142
6.4	Problèmes	142
6.4.1	Problème : solution dépendante du temps de l'équation d'amplitude complexe	142
6.4.2	Problème : dérivation de l'équation d'amplitude complexe pour le modèle « Bruxellateur »	144
7	Instabilité paramétrique et autres instabilités	149
7.1	Exemple simple d'une excitation paramétrique	149
7.2	Instabilité sous-harmonique	150
7.3	Image intuitive de la résonance paramétrique	152

7.4	Équation d'amplitude universelle au voisinage d'une résonance sous-harmonique	154
7.4.1	Détermination de l'équation non linéaire à partir des propriétés de symétrie	156
7.5	Instabilité non linéaire	157
7.6	Accrochage de la phase	158
7.6.1	Forçage non résonant	159
7.6.2	Forçage résonant	160
7.6.3	Forme de l'équation et symétrie	161
7.6.4	Accrochage d'ordre supérieur : équation générale obtenue par les symétries	161
7.7	Problèmes	164
7.8	Problème : instabilités des harmoniques supérieures, et effet du frottement	164
8	Introduction au chaos	169
8.1	Un exemple typique	169
8.2	Où l'avenir d'une population dépend d'un seul individu!	170
8.2.1	D'un point fixe simple au chaos	172
8.3	Origine et signification de l'application $f(x) = 4ax(1 - x)$	173
8.4	Quelle différence entre hasard et chaos?	176
8.5	Quelques commentaires sur la dynamique de populations et courbe logistique	178
8.5.1	Temps continu et temps discret, application retour et sec- tion de Poincaré	179
8.6	Approche géométrique de la section de Poincaré	179
8.7	Attracteurs étranges	180
8.8	Les trois scénarios de transition vers le chaos	180
8.9	Transition vers le chaos par cascade sous-harmonique	184
8.10	Transition vers le chaos par un scénario de quasi-périodicité	184
8.11	Transition vers le chaos par intermittence	186
8.12	Étude détaillée du chaos par cascade sous-harmonique	188
8.12.1	Point fixe de l'application logistique $x_{n+1} = f(x_n) =$ $4ax_n(1 - x_n)$	188
8.12.2	Stabilité des points fixes	188
8.12.3	Point d'accumulation de la cascade	191
8.12.4	Diagramme de bifurcation et notion d'autosimilarité	193
8.13	Dimension critique pour obtenir du chaos	193
8.14	Exposants de Lyapunov	196

8.14.1	Définition	196
8.14.2	Propriétés des exposants de Lyapunov	197
8.15	Autosimilarité et fractales	198
8.16	Crises	202
8.17	Hasard et déterminisme	205
8.17.1	L'application tente	205
8.17.2	Sensibilité de l'application tente aux conditions initiales	207
8.17.3	Jouer à la roulette ou au chaos?	208
8.17.4	Mesure invariante	209
8.18	Le contrôle du chaos	211
9	Naissance de l'ordre spatial unidimensionnel	213
9.1	Introduction	213
9.2	Le système de Turing	215
9.2.1	Image qualitative de l'instabilité de Turing	216
9.3	Analyse de stabilité linéaire du système de Turing	218
9.4	Définition d'une instabilité de Turing	219
9.4.1	Naissance de l'ordre	220
9.4.2	Condition de Turing pour la naissance de l'ordre	221
9.5	Introduction de quelques modèles donnant lieu aux structures de Turing	223
9.5.1	Le modèle de Schnackenberg	224
9.5.2	Le modèle de Lengyel-Epstein	225
9.6	Quelles conditions pour obtenir un inhibiteur qui diffuse suffisamment rapidement par rapport à l'activateur?	226
9.7	Au-delà de l'instabilité linéaire de Turing	228
9.8	Diverses formes de l'instabilité de Turing rencontrées dans la nature	229
9.9	Quel est l'impact des structures de Turing sur la morphogenèse dans la nature?	231
9.10	Convection de Rayleigh-Bénard	232
9.10.1	Argument heuristique pour la détermination du seuil de la convection de Rayleigh-Bénard	235
9.11	Relation de dispersion pour la convection Rayleigh-Bénard	239
9.11.1	Analyse de stabilité linéaire	242
9.11.2	Rouleaux de convection	248
10	Universalité au voisinage du seuil	251
10.1	Équation d'amplitude universelle	252
10.1.1	Introduction des échelles multiples	254
10.1.2	Dérivation de l'équation d'amplitude	257

10.2	Quelques propriétés de l'équation d'amplitude	259
10.2.1	La forme de l'équation d'amplitude obtenue à partir des symétries	259
10.2.2	Les coefficients sont réels : conséquence de la symétrie d'inversion	260
10.2.3	Forme canonique et autres formes équivalentes de l'équation d'amplitude	260
10.2.4	Dynamique variationnelle de l'équation d'amplitude	261
10.3	Instabilité d'Eckhaus	263
10.3.1	L'instabilité d'Eckhaus : une instabilité de la phase	265
10.4	Instabilité d'Eckhaus : mort et création de cellules	267
10.5	Quelques remarques sur les instabilités des structures unidimensionnelles	268
11	Fronts entre domaines	271
11.1	Invasion d'une solution métastable par une solution stable	273
11.1.1	Notion de front	273
11.1.2	Analogie avec la mécanique de Newton	275
11.1.3	Détermination de la vitesse d'invasion d'une solution métastable par une solution stable	277
11.2	Invasion de la solution instable par une solution stable	279
11.3	L'approximation du front précurseur	281
11.3.1	Instabilité de la solution correspondant à $v < v^*$	283
11.3.2	Stabilité marginale	287
11.4	Conclusion	288
11.5	Problèmes	289
11.5.1	Problème : détermination explicite de la vitesse d'invasion d'une solution métastable par une solution stable	289
12	Ordre et désordre spatial et temporel	291
12.1	Équation d'amplitude à coefficients complexes	292
12.1.1	Quelques préliminaires	292
12.1.2	Dérivation de l'équation d'amplitude à partir des symétries	295
12.2	Dynamique non variationnelle	297
12.3	Quelques propriétés de l'équation d'amplitude complexe	298
12.3.1	Ondes planes et stabilité	298
12.3.2	Instabilité de Benjamin-Feir	300

12.4	Illustration de la dynamique pour certains cas typiques : analyse numérique	301
12.4.1	Ondes planes	301
12.4.2	Turbulence de phase et turbulence médiée par des défauts topologiques	302
12.4.3	Intermittence spatio-temporelle	305
12.4.4	Les trous de Bekki-Nozaki	305
12.5	Problèmes	306
12.5.1	Problème : équation de Kuramoto-Sivashinsky au voisinage de l'instabilité de Benjamin-Feir	306
13	Structures bidimensionnelles	309
13.1	Ordre à deux dimensions	309
13.1.1	Les différents types d'ordre spatial à deux dimensions	311
13.2	Raison de l'abondance des structures hexagonales dans la nature	313
13.2.1	émergence des structures hexagonales : non-linéarité quadratique et phénomène de résonance	315
13.2.2	Inhibition des structures hexagonales : cas de la convection de Rayleigh-Bénard	318
13.3	Forme générale de l'équation d'amplitude à deux dimensions spatiales	320
13.3.1	Symétrie hexagonale	320
13.3.2	Symétrie carrée	322
13.4	Stabilité des structures en bandes, carrées et hexagonales	323
13.4.1	Stabilité des bandes	326
13.4.2	Stabilité des hexagones	327
13.4.3	Stabilité des structures carrées	330
13.5	Équation d'amplitude de structures bidimensionnelles à symétrie hexagonale	331
13.6	Problèmes	332
13.6.1	Problème : dérivation formelle de l'équation d'amplitude	332
13.6.2	Problème : dérivation de l'équation d'amplitude à partir de considérations des harmoniques	333
14	Conclusion	335
14.1	Instabilités secondaires	336
14.2	Structures à deux dimensions et bifurcation de Hopf	337
14.3	Systèmes non réductibles à une équation d'amplitude	338
14.4	Mûrissement des structures hors équilibre	339

14.5	Branches et formes variées en matière inerte et vivante	340
14.6	Vers une science des systèmes complexes	345
	Remerciements	347
	Bibliographie	348
	Sources des illustrations	355
	Index	356

Table des illustrations

1.1	Catastrophe papillon	5
1.2	Image mécanique de stabilité et de métastabilité.	6
1.3	Bifurcation col-nœud	7
1.4	Rides éoliennes	9
1.5	Cellules de Bénard-Marangoni.	10
1.6	Une structure organisée de type Bénard-Marangoni à la surface de la terre	11
2.1	Schéma d'un ressort donnant lieu à une bifurcation fourche. . .	16
2.2	Comportement qualitatif de l'énergie potentielle	18
2.3	Une vue schématique des positions d'équilibre	20
2.4	Un diagramme de bifurcation fourche.	26
2.5	L'amplitude en fonction du temps pour différentes conditions initiales pour une bifurcation fourche.	30
3.1	Schéma d'un ressort présentant une bifurcation imparfaite. . .	34
3.2	Comportement typique de la fonction P pour $\epsilon < 0$	37
3.3	Comportement typique de la fonction P pour $\epsilon > 0$	37
3.4	Le comportement typique de $V(A)$ pour différentes valeurs de ϵ . . .	39
3.5	Le diagramme d'une bifurcation imparfaite	39
3.6	Le diagramme d'une bifurcation imparfaite après changement du signe de l'imperfection.	39
3.7	Bifurcation imparfaite duale.	42
3.8	Potentiel pour une bifurcation sous-critique.	43
3.9	Le diagramme d'une bifurcation sous-critique.	43
3.10	Schéma expliquant la notion de stabilité et de métastabilité. . .	47
3.11	Diagramme de bifurcation montrant le cycle d'hystérésis	48
3.12	Diagramme de bifurcation transcritique obtenue à partir d'une équation d'amplitude quadratique.	49
3.13	Diagramme de bifurcation transcritique obtenue à partir d'une équation d'amplitude cubique.	50
3.14	Schéma du système pendulaire.	52
3.15	Le pendule en présence d'une force \vec{f} tangente à la trajectoire. . .	53

3.16	Courbe de points fixes (courbe de bifurcation) du pendule en présence de la force \vec{f}	54
3.17	Évolution du potentiel pour une bifurcation col-nœud.	56
3.18	Schéma montrant deux positions d'équilibre possibles, \mathbf{t} est le vecteur unité tangent à la trajectoire.	58
3.19	Schéma montrant la stabilité du point fixe.	59
3.20	Schéma montrant la stabilité du point fixe.	59
3.21	Schéma montrant l'instabilité du point fixe.	60
3.22	Schéma montrant l'instabilité du point fixe.	60
3.23	Comportement de l'angle $\theta(t)$ dans le régime <i>tumbling</i>	61
3.24	Photos de <i>tumbling</i> de globules rouges.	63
3.25	Branche de point fixe de l'équation (3.34).	64
3.26	(a) Bifurcation fourche. (b) Bifurcation imparfaite. (c) Représentation schématique de résultats expérimentaux entachés d'incertitude.	66
3.27	Potentiels $V = \epsilon A^2 + A^4$, et $V = \nu A + \epsilon A^2 + A^4$	69
3.28	La catastrophe <i>cuspl</i> et la forme du potentiel dans chacune des régions.	70
3.29	Construction de Maxwell.	73
3.30	Schéma d'un système de ressort donnant lieu à une bifurcation sous-critique.	74
3.31	Énergie potentielle d'un système de ressort donnant lieu à une bifurcation sous-critique.	76
3.32	Diagramme de la bifurcation sous-critique imparfaite pour un signe donné de l'imperfection.	78
3.33	Film de savon : problème d'Euler	79
3.34	Représentation graphique de l'existence d'une bifurcation col-nœud	81
3.35	Images des deux solutions stables et instables du film de savon.	82
3.36	L'énergie relaxée de la solution stable.	83
3.37	La bifurcation sous-critique a la forme d'une bifurcation col-nœud au voisinage du point tournant.	84
4.1	La catastrophe pli et la forme du potentiel	90
4.2	(a) $V = A^3$. (b) $V = A^3 + \epsilon A$, avec $\epsilon < 0$	90
4.3	Catastrophe pli en convection.	93
4.4	Représentation qualitative de la catastrophe <i>cuspl</i>	96
4.5	Surface de bifurcation dans le cas d'une catastrophe <i>cuspl</i>	96
4.6	Catastrophe queue d'aronde et ses projections	98
4.7	Catastrophe papillon en projection.	99
4.8	Catastrophe ombilic hyperbolique en projection et dans l'espace.	101
4.9	La catastrophe ombilic elliptique en projection et dans l'espace.	103
4.10	La catastrophe ombilic parabolique en projection et dans l'espace.	103
5.1	Un circuit <i>RLC</i> classique.	110

5.2	Courbe de tension-courant pour un circuit comprenant une diode tunnel.	111
5.3	Diagramme qualitatif de bifurcation pour l'instabilité de Hopf.	115
5.4	Cycle limite.	117
5.5	Cycle limite de l'oscillateur de van der Pol.	117
5.6	Le portrait dans l'espace des phases du modèle de Lotka-Voltera	121
6.1	Représentation d'un cycle limite.	141
6.2	Diagramme de bifurcation pour l'amplitude ρ pour une bifurcation de Hopf.	141
6.3	Orbites dans le cas hamiltonien	143
7.1	Diagramme de l'instabilité paramétrique sans frottement.	153
7.2	Image intuitive de la résonance sous-harmonique	154
7.3	Diagramme de l'instabilité paramétrique obtenu à partir de l'équation d'amplitude	157
7.4	Diagramme de bifurcation issue de l'équation d'amplitude	158
7.5	Diagramme de bifurcation de l'oscillateur non linéaire	160
7.6	Diagramme des solutions possibles, QP : quasi périodique, AC : état accroché, et F : état forcé.	164
7.7	Diagramme de l'instabilité paramétrique en présence de frottement	168
8.1	Illustration de l'évolution de la cascade sous-harmonique à partir de la courbe logistique.	174
8.2	Dynamique de Rössler et introduction à la section de Poincaré.	175
8.3	Courbe logistique issue du système de Rössler.	176
8.4	Signal issu d'une loi gaussienne et une section de Poincaré	177
8.5	Quelques illustrations de la section de Poincaré pour certaines trajectoires dans l'espace de phase.	181
8.6	Un attracteur étrange et sa section.	182
8.7	Trajectoire dans l'espace de phase du système de Rössler.	182
8.8	Représentation schématique d'une trajectoire dans l'espace de phase montrant une auto-similarité.	183
8.9	Un tore idéal et un tore réel obtenus par simulation numérique d'un problème de croissance cristalline.	185
8.10	Section de Poincaré d'une dynamique chaotique d'un problème de croissance cristalline.	186
8.11	Une dynamique chaotique typique par intermittence.	187
8.12	Points fixes de la courbe logistique et ses différentes compositions d'ordre élevé.	192
8.13	Le diagramme de bifurcation montrant l'accumulation de la cascade sous-harmonique et la structure self-similaire	194
8.14	Une condition initiale telle que (x_0, y_0) peut appartenir à l'une ou l'autre branche de la trajectoire. Ceci est en contradiction avec la dynamique déterministe.	196

8.15	Illustration de la contraction des aires dans l'espace de phases pour un système dissipatif.	198
8.16	Fractale de Mandelbrot.	199
8.17	Figure exliquant la notion de dimension fractale.	200
8.18	La fractale flocon de neige.	201
8.19	Fractale de Sierpinski.	203
8.20	Une figure auto-similaire mais non fractale.	203
8.21	Explication intuitive de la dimension fractale.	204
8.22	Le signal $\dot{x}(t)$ montrant l'emergence d'une crise.	206
8.23	L'application tente.	207
8.24	L'application tente composée deux fois, $f^2(x_n)$, et l'application tente composée m fois, $f^m(x_n)$ (m assez grand).	208
8.25	Densité invariante $\rho(x)$ associée à la courbe logistique.	211
9.1	Une structure assez organisée de cumulonimbus.	214
9.2	Explication qualitative de l'instabilité de Turing.	217
9.3	Illustration de la relation de dispersion	219
9.4	Relation de dispersion générique dans le cas de la naissance de l'ordre.	221
9.5	Un motif chimique typique observé expérimentalement.	228
9.6	Des motifs chimiques de léopard et de jaguar reproduits par des variantes du modèle de Turing.	230
9.7	Vue schématique de la cellule de Rayleigh-Bénard.	235
9.8	Explication qualitative de la convection de Rayleigh-Bénard.	236
9.9	Courbe neutre de la convection de Rayleigh-Bénard.	248
9.10	Vue schématique de la structure en rouleaux du champ de vitesse.	249
10.1	Relation de dispersion générique.	254
10.2	Diagramme d'une bifurcation fourche.	261
10.3	Le potentiel $V(A)$ en fonction de A . Pour $\epsilon > 0$, la solution $A = 0$ devient instable.	262
10.4	Courbe neutre et la courbe délimitant l'instabilité d'Eckhaus.	267
10.5	Illustration schématique de l'instabilité d'Eckhaus.	268
11.1	Schéma de l'invasion d'une solution par une autre.	272
11.2	Solution à front obtenu de (11.5) pour $\epsilon = 1$	274
11.3	Analogie mécanique du problème à front unique et à fronts multiples.	276
11.4	Analogie mécanique de l'invasion d'une solution métastable par une solution stable.	278
11.5	Explication mécanique de l'existence d'un nombre infini de solutions dans le problème d'invasion d'une solution instable par une solution stable.	280
11.6	La solution stationnaire pour différentes valeurs de la vitesse.	281

11.7	Représentation des solutions possibles dans l'approximation du front précurseur.	282
11.8	Explication schématique de la compétition entre solutions.	283
11.9	Analogie avec la croissance d'un cristal facetté.	284
12.1	Portrait spatio-temporel dans le cas stable vis-à-vis de l'instabilité Benjamin-Feir.	302
12.2	Diagramme de phase des solutions de l'équation de Landau-Ginzburg à coefficients complexes.	303
12.3	Portrait spatio-temporel dans la région instable de Benjamin-Feir : cas de la turbulence initiée par les défauts.	304
12.4	Portrait spatio-temporel et module de A dans le cas de la turbulence de phase.	305
12.5	Portrait spatio-temporel, et module de A dans le cas d'une intermittence spatio-temporelle.	306
12.6	Portrait spatio-temporel, et module de A en présence de trous de Bekki-Nozaki	307
13.1	Schéma montrant l'existence de 5 réseaux périodiques à deux dimensions.	312
13.2	Modes instables et exemples de l'ordre à deux dimensions.	312
13.3	Les cinq types de réseaux possibles à deux dimensions.	313
13.4	Des exemples de motifs périodiques : carré, rectangulaire, rectangulaire centré, hexagonal et oblique.	314
13.5	Motifs hexagonaux rencontrés dans la nature : des colonnes de basalte et sol d'argile	316
13.6	Schémas montrant la présence ou l'absence de résonance.	318
13.7	Diagramme de bifurcation des structures hexagonales et des structures en bandes et leur stabilité.	324
13.8	Représentation des bifurcation par un potentiel.	329
13.9	Le diagramme de bifurcation pour les hexagones.	329
14.1	Un cristal de neige, une figure obtenue par croissance limitée par la diffusion, et un doigt de Saffmann-Taylor.	342
14.2	Une population de bactéries (connue sous le nom <i>Bacillus subtilis</i>).	343
14.3	Organisation de protéines en astres. Ces protéines sont impliquées dans le processus de division cellulaire.	344