Anhang A: Differenzial- und Integralrechnung

In dem Buch *So einfach ist Mathematik – Basiswissen für Studienanfänger aller Disziplinen* aus demselben Verlag haben wir in den Abschn. 5.5 bis 5.8 die Begriffe der Ableitung einer Funktion, der Stammfunktion und des bestimmten Integrals motiviert und eingeführt und die grundsätzlichen Rechenregeln und -verfahren hergeleitet. In dem jetzigen Text verwenden wir Differenzieren und Integrieren als rein technische Hilfsmittel. Das entspricht ihrer Rolle in vielen Studienfächern und bei der Beschreibung realistischer Zusammenhänge.

Dadurch, dass wir beide Rechentechniken voraussetzen, können wir einige Zusammenhänge besser illustrieren. Natürlich soll man, einem systematischen Aufbau der Analysis folgend, erst differenzieren, wenn man den Grenzwertbegriff auf Funktionen übertragen hat. Für die Integration muss man genau genommen sogar noch weiter ausholen. Da unserer Erfahrung nach Ihre Vorstellung und Anschauung jedoch nicht dem systematischen Aufbau folgt, sehen wir die Differenziation und Integration als Werkzeuge an, welche nicht einzusetzen, verschwenderisch wäre.

In diesem Anhang sammeln wir deshalb sehr grundsätzliche Schritte, um auf der technischen Ebene zu differenzieren und zu integrieren. Die angesprochenen Begriffe und Zusammenhänge können Sie im erwähnten Vorgängerband und an vielen anderen Stellen nachlesen. Die technische Ausführung des Differenzierens und Integrierens enthebt natürlich keinen Studierenden davon, sich eine inhaltliche Vorstellung davon zu machen, was beim Bilden einer Ableitung oder beim Berechnen eines Integrals passiert.

A.1 Differenzieren

Die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle x beschreibt ihren Anstieg bzw. ihre Steigung an dieser Stelle. Wie wir in Kap. 5 diskutiert haben, ist die Vorstellung von einer Funktion an einer Stelle oder gar eines Zuwachses an einer Stelle schwierig. Wir nähern den Anstieg an der Stelle x deshalb durch die Steigung im Intervall $[x, x+h]$ und schieben die Stelle $x+h$ dann in Richtung x. Wir betrachten den Zuwachs im Intervall $[x, x+h]$ für $h \to 0$.

D. Langemann, *So einfach ist Mathematik – Zwölf Herausforderungen im ersten Semester*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-63720-3

Die Ableitung der durch $y = f(x)$ beschriebenen Funktion an einer festen Stelle x ist ihr Differenzialquotient

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{A.1}$$

Im Zähler des Differenzenquotienten steht die Differenz der Funktionswerte, im Nenner die Intervalllänge h von $[x, x+h]$. Insgesamt beschreibt der Differenzenquotient den Anstieg der Sekanten in diesem Intervall. Für $h \to 0$ gehen die Differenzen $f(x+h) - f(x)$ und $h = (x+h) - x$ in die Differenziale dy und dx über. Das sind jene Nullen mit Vergangenheit, die man unter der unendlichen Lupe als endlich lange Geradenstücke sieht. Lesen Sie es nach.

Mithilfe von Gl. A.1 bestimmen wir die Ableitungen der Standardfunktionen. Leicht ist dies für die Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit natürlichem Exponenten n. Wir erhalten mit der binomischen Formel und dem Verschlucken aller Terme im Landau'schen Ordnungssymbol, die mit h^2 und schneller fallen, den Ausdruck

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nhx^{n-1} + \mathcal{O}(h^2) - x^n}{h}$$

und damit nach dem Kürzen von h die Ableitung

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \left(nx^{n-1} + \mathcal{O}(h) \right) = nx^{n-1}.$$

Ganz ähnlich leiten wir die Exponentialfunktion $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ ab, denn es gilt

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{(x+h) \ln a} - \mathrm{e}^{x \ln a}}{h} = \mathrm{e}^{x \ln a} \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{h \ln a} - 1}{h}.$$

Die Exponentialreihe beschert uns $\mathrm{e}^{h \ln a} = 1 + h \ln a + \mathcal{O}(h^2)$, und wir finden $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$. Insbesondere bemerken wir, dass sich die Exponential- und die Potenzialfunktionen ganz wesentlich unterscheiden. Man kann es daran erahnen, dass die Variable x an unterschiedlichen Stellen steht. Und selbstverständlich folgen sie nicht denselben Umformungsvorschriften bei der Bestimmung der Ableitung.

Als Drittes nehmen wir uns die Funktion $f(x) = \sin x$ vor. Mithilfe der Additionstheoreme, die wir in Kap. 3 hergeleitet haben, gelingt die Umformung

$$(\sin x)' = \lim_{h \to \infty} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to \infty} \frac{\sin x \cdot (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}.$$

Hier verwenden wir die Regel von de l'Hospital oder die Reihenentwicklung der Kosinusfunktion, um beispielsweise den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1 - \mathcal{O}(h^2) - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\mathcal{O}(h) = 0$$

zu bestimmen. Allerdings laufen wir Gefahr, uns in einem Zirkelschluss zu verrennen, weil wir den Grenzwert, den wir zur Bestimmung der Ableitung der Sinusfunktion brauchen, mithilfe der Taylor-Entwicklung ermitteln, zu deren Bestimmung wir wiederum die Ableitung der Kosinusfunktion brauchen. Diesen Zirkelschluss umgeht man, indem man die benötigten Grenzwerte aus geometrischen Überlegungen herleitet. Hier erinnern wir nur an das technische Werkzeug des Ableitens. Wir haben ein paar Ableitungen in Tab. A.1 zusammengefasst. Die Tabelle enthält absichtlich nicht besonders viele Funktionen, weil Sie für alle komplizierteren Ableitungen die Ableitungsregeln oder Computeralgebrasysteme verwenden werden.

Zu den Ableitungen der Standardfunktionen gibt es zwei Ableitungsregeln, nämlich die Produkt- und die Kettenregel. Die Produktregel fragt nach der Ableitung des Produkts der Funktionen $u = u(x)$ und $v = v(x)$. Und nein, es ist nicht das Produkt der Ableitungen, sondern

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot v + u\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{A.2}$$

Die Kettenregel fragt nach der Ableitung einer Verkettung $u = u(v(x))$ zweier Funktionen $u = u(v)$ und $v = v(x)$. Hier muss man aufpassen, wonach abgeleitet wird. Die Kettenregel lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(v(x)) = u'(v(x))\cdot v'(x) \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{A.3}$$

In der zweiten Schreibweise erkennt man noch deutlicher, wonach man ableitet, nämlich auf der linken Seite das ganze u direkt nach x und auf der rechten Seite über den Zwischenschritt v. Auf geheimnisvolle Weise scheint man das Differenzial $\mathrm{d}v$ kürzen zu können. Wir haben dies im erwähnten Vorgängerband ausführlich diskutiert.

Zusätzlich notieren wir die Linearität der Ableitung, also $(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$ für alle differenzierbaren Funktionen $u = u(x)$ und $v = v(x)$ und alle reellen Koeffi-

Tab. A.1 Ableitungen der Standardfunktionen im jeweiligen Definitionsbereich

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1} für $n \neq 0$
a^x	$\ln a \cdot a^x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

zienten λ und μ. Die meisten Studierenden nutzen diese Umformung intuitiv. Es lohnt sich jedoch, einen kleinen Moment darüber nachzudenken. Zum einen ist der Hinweis $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ hier wichtig, denn sollten dies – in ungewöhnlicher Bezeichnung – selbst Funktionen sein, so muss natürlich die Produktregel Anwendung finden. Zum anderen enthält die Linearität den seltenen Fall der Vertauschbarkeit von zwei Handlungen, hier der Bildung der Ableitung und der Linearkombination, vgl. Kap. 8.

Jetzt üben wir die Anwendung der beiden Ableitungsregeln zuerst an Potenzfunktionen, die wir so gestalten, dass wir das Ergebnis schon kennen und damit überprüfen können. Nehmen wir beispielsweise $u(x) = x^3$ und $v(x) = x^4$. Wir kennen die Ableitungen $u'(x) = 3x^2$ und $v'(x) = 4x^3$ spätestens nach einem Blick in Tab. A.1. Das Produkt von u und v ist $(uv)(x) = x^7$, und seine Ableitung ist $(uv)'(x) = 7x^6$. Die Produktregel liefert uns wie erwartet

$$u'v + uv' = 3x^2 \cdot x^4 + 4x^3 \cdot x^3 = 7x^6.$$

Die Verkettung $u(v(x))$ fällt typischerweise etwas schwerer. Die Funktion $u = u(x) = x^3$ erhebt ihr Argument – was immer es auch sei – in die dritte Potenz. Würde u auf einen Prinzen angewandt, so würde sie auf ihr Bild „Prinz hoch drei“ abgebildet, vgl. Kap. 4. So wird auch das Argument $v(x)$ der äußeren Funktion in die dritte Potenz gesetzt, und es ist $u(v(x)) = v(x)^3$. Mit der inneren Funktion $v(x) = x^4$ entsteht

$$u(v(x)) = \left(x^4\right)^3 = x^{12} \ \text{ mit } \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(v(x)) = 12x^{11}.$$

Die Kettenregel braucht $u'(v(x))$, also die Ableitung von u an der Stelle $v(x)$ und die innere Ableitung $v'(x)$. Wir erhalten

$$u'(v(x)) \cdot v'(x) = 3v(x)^2 \cdot 4x^3 = 3\left(x^4\right)^2 \cdot 4x^3 = 12x^{11},$$

was glücklicherweise dasselbe ist. Auf diese Art kann man beliebig viele Übungsaufgaben zu den Ableitungsregeln generieren, deren Ergebnisse man kennt und zur Kontrolle nutzen kann.

Wir beschließen den Abschnitt zum Differenzieren mit einem länglicheren, technisch aufwendigeren Beispiel. Wir nehmen die Funktion $f(x) = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, sprich area sinus hyperbolicus. Wir haben diese Funktion ausgewählt, weil man an ihr den Umgang mit der oft als schwieriger empfundenen Kettenregel demonstrieren kann.

Um $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ abzuleiten, betrachten wir zuerst den Aufbau des Funktionsterms. Wenn wir uns vorstellen, dass die Funktion von innen nach außen aufgebaut ist, so beschreiben wir die Verwandlung des Arguments x in den Funktionswert $f(x)$. Ganz innen quadrieren wir x, addieren 1 dazu, ziehen die Wurzel, addieren wiederum x und bilden dann den Logarithmus des entstandenen

Ausdrucks. Für die Anwendung der Kettenregel ist jedoch die Lesart von außen nach innen oft praktischer.

Die äußere Funktion ist der Logarithmus, der auf den Ausdruck $x + \sqrt{1 + x^2}$ angewandt wird. Somit hat $x + \sqrt{1 + x^2}$ die Rolle der inneren Funktion v und der Logarithmus die von u. Bei einmaliger Anwendung der Kettenregel entsteht

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

Schreiben Sie sich die Ableitung einer verketteten Funktion zur Übung mindestens einmal so ausführlich wie hier auf, und Sie werden sehen, dass die Technik viel übersichtlicher wird. Im nächsten Schritt müssen wir die innere Funktion in der Klammer ableiten, die eben noch v hieß. Wir haben eine neue Teilaufgabe, die wir unabhängig von dem bisher Gewonnenen bearbeiten. Unabhängig heißt hierbei, dass wir das bisher Gewonnene unverändert beibehalten. Es steht also die Ableitung einer Summe an, und wir notieren ganz langsam

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1 + x^2}\right),$$

wobei wir die Ableitung von x nach x als 1 bereits ausgerechnet haben. Nun steht der Differenzialoperator wieder vor einer verketteten Funktion, nämlich vor $\sqrt{1 + x^2}$. Deren äußere Funktion ist die Wurzelfunktion, und die innere Funktion ist $1 + x^2$, was unser neues v für diese Teilaufgabe ist. Wir schauen mit $n = \frac{1}{2}$ in Tab. A.1 für die Ableitung der Wurzelfunktion, die wir irgendwann auswendig wissen werden, und passen auf, dass wir wirklich nur den betreffenden Term bearbeiten. Alles andere bleibt unverändert. Es entsteht

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x^2)\right).$$

Nachdem wir für diese innere Ableitung $2x$ ermittelt haben, sind wir fertig, denn wir haben die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right)$$

der ursprünglichen Funktion $\operatorname{arsinh} x$ bestimmt.

Im Sinne des Aufräumens nach der Arbeit kürzen wir die 2 im letzten Bruch und bringen, möglicherweise in der Tradition des Rationalmachens des Nenners, die beiden Summanden in der hinteren Klammer auf einen Bruchstrich. Wir finden einen einfacheren Ausdruck, nämlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Das Aufräumen von Termen ist immer ein wenig Glückssache. Manchmal erkennt man nicht, was man aufräumen kann, oder man erkennt nicht, dass man schon fertig ist. Man soll es aber immer versuchen, um bei eventuellen Fortsetzungen der Rechnung mit möglichst einfachen Ausdrücken umzugehen.

Viele Studierende, die glauben, das Ableiten wäre für sie schwierig, können nicht mit Termumformungen und mathematischen Notationen wie Klammern, Brüchen und Potenzen umgehen. Das Ableiten selbst ist eine rein handwerkliche Tätigkeit. Man kann es sehr gut üben, indem man sich beispielsweise von einem Computeralgebrasystem die Ableitung von willkürlichen Funktionen ausrechnen lässt und die Lösung per Hand mithilfe der beiden Ableitungsregeln reproduziert.

Bei aller Rechentechnik sollten wir nie vergessen, dass die Ableitung die Steigung der Funktion f an der jeweiligen Stelle x ist und dass wir das jeweilige Rechenergebnis durch Skizzen von f und f' auf Plausibilität prüfen sollten.

A.2 Integrieren

Das Integrieren ist längst nicht so handwerklich wie das Ableiten.

Wir haben zwei unterschiedliche Integralbegriffe. Zum einen ist eine Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ eine Funktion, deren Ableitung wieder f ist, d. h. $F'(x) = f(x)$. Natürlich ist die Stammfunktion nicht eindeutig bestimmt, denn $F(x)$ und $F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ haben dieselbe Ableitung $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$. Wir nennen c die Integrationskonstante, schreiben sie immer mit dazu und zeigen damit uns und anderen, dass wir um die Nichteindeutigkeit wissen. Die Stammfunktion, die auch als unbestimmtes Integral bezeichnet wird, ist – bis auf die Integrationskonstante c – die Umkehroperation zum Differenzieren.

Andererseits beschreibt das bestimmte Integral einer Funktion f über einem Intervall $[a, b]$ den vorzeichenbehafteten Flächeninhalt unter der Kurve f. Auf den ersten Blick sind das bestimmte und das unbestimmte Integral zwei unterschiedliche Begriffe. Das bestimmte Integral beschreibt mit dem Flächeninhalt einen geometrischen Sachverhalt, und das unbestimmte Integral kehrt die eher rechentechnische Bestimmung der Ableitung um. Der Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen wird etwas deutlicher, wenn wir das unbestimmte Integral als Umkehrung der Bestimmung der Steigung interpretieren, f enthält also die Änderungsrate von F. Der Zusammenhang zwischen beiden Begriffen ist im Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

festgehalten. Die Stammfunktionen der Standardfunktionen findet man beispielsweise, indem man Ableitungen der Standardfunktionen umkehrt. Da $(x^n)' = nx^{n-1}$ ist, gilt für die Umkehroperation des Differenzierens, nämlich für das Integrieren

Tab. A.2 Stammfunktionen der Standardfunktionen im jeweiligen Definitionsbereich

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$ für $n \neq -1$
a^x	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$

$$\int nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = x^n + c \text{ und damit } \int x^m\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + c,$$

wobei wir $m = n - 1$ gesetzt und uns wegen $n \neq 0$ nun $m \neq -1$ eingebrockt haben. Analog finden wir die Stammfunktionen der absoluten Standardfunktionen in Tab. A.2. Sie ist sehr, sehr kurz. Da das Integrieren eine trickreiche Kunst ist, gibt es lange Tabellen mit Stammfunktionen in alten Tafelwerken oder auf unterschiedlichen Internetseiten.

Tabellen mit Stammfunktionen sind sehr retro. Bei praktischen Problemen werden Sie Integrale mit Computeralgebrasystemen bestimmen. In Klausuren wird es auf die Kenntnis einzelner Stammfunktionen von anderen Funktionen als den absoluten Standardfunktionen eher nicht ankommen. Wenn Sie bei der Beschäftigung mit einer Thematik ausgewählte Integrale häufiger brauchen, so werden Sie bald mit ihnen vertraut sein. Lernen Sie bloß keine Tafeln mit Integralen auswendig.

Integriert man die beiden Ableitungsregeln, so erhält man die beiden Integrationsverfahren. Aus der Produktregel in Gl. A.2 wird durch Integration auf beiden Seiten als unbestimmtes bzw. als bestimmtes Integral

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x \text{ bzw. } \int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = uv\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x. \tag{A.4}$$

Diese Technik heißt partielle Integration, weil das Produkt uv' teilweise integriert wird. Der Faktor v' wird zu v integriert, während gleichzeitig der Faktor u zu u' abgeleitet wird. Die rechte Seite der Umformung enthält nun wieder ein Integral. Eine bessere Regel für die Integration eines Produkts von Funktionen gibt es leider nicht.

Anders als die Produktregel, die die Ableitung eines Produkts von Funktionen als rein handwerkliches Verfahren beschreibt, braucht man zur Anwendung der partiellen Integration ein wenig Geschick und manchmal – wie gleich beschrieben – überraschende Tricks bei der Auswahl der Faktoren.

Natürlich kann man die Anwendung der partiellen Integration wieder an den Potenzfunktionen üben, wie wir es bei der Anwendung der Ableitungsregeln gemacht haben. Diesmal überlassen wir es Ihnen. Beginnen Sie beispielsweise mit $u(x) = x^3$ und $v(x) = x^4$.

Ein anderes Beispiel liefert die Funktion $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Wählen Sie hier $u(x) = x$ mit $u'(x) = 1$ und $v'(x) = \mathrm{e}^x$ mit $v(x) = \mathrm{e}^x$, so entsteht bei Anwendung der partiellen Integration ein einfacher zu behandelndes Integral, und Sie finden die Stammfunktion

$$\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int 1 \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x + c.$$

Würden Sie sich anders entscheiden und $u(x) = \mathrm{e}^x$ und $v'(x) = x$ setzen, so würden Sie im Integral auf der rechten Seite die kompliziertere Funktion $v(x)$ wiederfinden. Es entsteht

$$\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x,$$

was eine korrekte Anwendung der partiellen Integration ist. Die entstandene Aussage ist richtig, und in mancher Anwendung mag sie nützlich sein. Für die Bestimmung der Stammfunktion von $f(x)$ ist sie allerdings nicht zielführend. Bei der Auswahl der Faktoren im Produkt uv' sollten u und v' so gewählt werden, dass das Produkt $u'v$, was immer noch integriert werden muss, technisch einfacher ist.

Etwas trickreicher verhält sich die Integration der Funktion $f(x) = \ln x$, die auf den ersten Blick gar kein Produkt ist. Erst die Ergänzung einer nahrhaften Eins macht $f(x) = 1 \cdot \ln x$ zu einem Produkt. Hier gibt es nur eine Art, sinnvoll die partielle Integration anzuwenden. Denn v' kann nicht $\ln x$ sein, weil Sie zur Bestimmung von v gerade $\ln x$ integrieren müssten, was die ursprüngliche Aufgabe war. Die einzige Wahl ist $u(x) = \ln x$ und $v'(x) = 1$ mit $v(x) = x$. Dann entsteht

$$\int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

und damit eine Stammfunktion, die man möglicherweise selbst bei scharfem Hinsehen nicht geraten hätte.

Vielleicht haben Sie bemerkt, dass wir bei der Bestimmung von $v(x)$ aus $v'(x)$, also bei der Integration von $v'(x)$, auf die Integrationskonstante wie nebenbei verzichtet haben. Das ist nicht ohne Grund geschehen. Wir probieren die partielle Integration mit $v(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ aus. Dies ist auch eine Stammfunktion von $v'(x)$ und kommt damit ebenfalls als Faktor infrage. Wir erhalten

$$\int uv' \,\mathrm{d}x = u(v+c) - \int u'(v+c) \,\mathrm{d}x = uv + cu - \int u'v \,\mathrm{d}x - c \int u' \,\mathrm{d}x.$$

Neben u ist auch $u + \tilde{c}$ eine Stammfunktion von u'. Nach dem Einsetzen von $u + \tilde{c}$ für das letzte Integral entsteht

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = uv + cu - \int u'v \, \mathrm{d}x - c(u + \tilde{c}) = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x - c\tilde{c}.$$

Die rechte und die linke Seite in Gl. A.4 unterscheiden sich weiterhin um eine Konstante $c\tilde{c} \in \mathbb{R}$ und damit um jede beliebige reelle Zahl.

Der Schlüssel zu diesem Unterschied ist die Mehrdeutigkeit des unbestimmten Integrals. Wie durch die Integrationskonstante ausgedrückt, wird beim Integrieren nicht eine einzelne Funktion, sondern eine Klasse von Funktionen bestimmt. Die Funktionen innerhalb einer Klasse unterscheiden sich jeweils um eine additive Konstante. Die Gleichheit von unbestimmten Integralen besagt also, dass sie zu derselben Klasse gehören.

Das andere Integrationsverfahren erhalten wir, wenn wir die Kettenregel integrieren. Dazu verdeutlichen wir uns zunächst, dass eine bijektive Funktion $v : [a, b] \to [v(a), v(b)]$ das Integrationsintervall bijektiv in ein Intervall auf der v-Skala abbildet. Durch Multiplikation der inneren Ableitung $v'(x)$ mit dem Differenzial dx entsteht $\mathrm{d}v = v'(x)\mathrm{d}x$, und auf der linken Seite der Kettenregel in Gl. A.3 wird nun über dv integriert. Wir sagen, wir haben $v(x)$ durch v substituiert. Wenn wir dies im Integranden, im Differenzial und in den Integrationsgrenzen machen, so entsteht Integration mittels Substitution

$$\int_{v(a)}^{v(b)} u(v) \, \mathrm{d}v = \int_a^b u(v(x)) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Wir können uns dies als

$$\int u(v) \, \mathrm{d}v = \int u(v(x)) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x$$

merken, wobei es so aussieht, als hätten wir das Differenzial dx gekürzt. Weiterhin steht links ein Integral bezüglich v und rechts eines bezüglich x. Diese spannende Umformung haben wir im Vorgängerband ausführlich besprochen.

Auf den ersten Blick erscheint es, als würde die Substitution die Integrale noch schwieriger machen. Ähnlich wie die partielle Integration muss die Integration mit Substitution mit Verstand und manchmal mit ein paar Tricks, für die man einige Erfahrung braucht, angewendet werden.

Ein Beispiel ist das Integral der Funktion $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$. Der Versuch, den Wurzelterm durch $v = 1 - x^2$ einfacher aussehen zu lassen, wird wegen $\mathrm{d}v = -2x$ dx damit belohnt, dass der entscheidende Term x aus der Ableitung $v'(x) = -2x$ auch im Integranden steht. Es ergibt sich das unbestimmte Integral

$$F(x) = \int x\sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{-2} \int \sqrt{v} \, \mathrm{d}v = \frac{-2}{2 \cdot 3} v^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{1 - x^2}^3 + c.$$

Durch die Schreibweise $F(x)$ haben wir daran erinnert, dass wir eine Stammfunktion in Abhängigkeit von x suchen. Der Ausdruck in v ist nur bedingt eine fertige Stammfunktion. Wir substituieren ihn durch $v = 1 - x^2$ zu einem Ausdruck in x zurück.

Solche Aufgaben können wir wunderbar überprüfen, indem wir bei der Proberechnung das Ableiten der Stammfunktion als Umkehrung des Integrierens üben und wieder den ursprünglichen Integranden erhalten.

Etwas anders stellt sich die Substitution bei der Integration

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - v^2}\, \mathrm{d}v$$

dar. Man sieht nicht sofort, dass $v = 2\sin x$ zum Ziel führt. Durch Differenziation entsteht $\mathrm{d}v = 2\cos x\, \mathrm{d}x$. Bei den Grenzen, die ebenfalls substituiert werden müssen, führt $v = \pm 1$ zu $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ mit $x = \pm\frac{\pi}{6}$. In der Tat ist die Funktion $v = v(x)$ in dem Intervall $[-\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ monoton wachsend und damit bijektiv. Nach dem Einsetzen zeigt sich

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - v^2}\, \mathrm{d}v = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - 4\sin^2 x} \cdot 2\cos x\, \mathrm{d}x = 4 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x\, \mathrm{d}x = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

Der erste Schritt ist die Integration mittels Substitution. Dann wird der Integrand mithilfe des Satzes des Pythagoras im Einheitskreis $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ aufgeräumt. Man sollte überprüfen, dass der entstehende $\cos x$ tatsächlich positiv im Integrationsintervall ist, und dann integriert man das so stehende Integral z. B. nach der Umformung $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$.

Vielleicht fragen Sie sich, wie Sie auf die Substitution $v = 2\sin x$ hätten kommen sollen. Es ist ein wenig Übung dabei, aber bei einem Blick auf den Halbkreis, den der Funktionsgraph von $\sqrt{4 - v^2}$ bildet, und auf den Satz des Pythagoras ist die Substitution nicht mehr ganz so überraschend.

Sehr instruktiv ist es, selbst nach Funktionen zu suchen, die man mit bestimmten Substitutionen integrieren kann. Man erkennt schnell charakteristische Terme und charakteristische Situationen ihres Aufeinandertreffens. Versuchen Sie beispielsweise gebrochen rationale Funktionen zu integrieren, bei denen der Zähler nahe an der Ableitung des Nenners ist.

Anhang B: Symbole

In diesem Anhang geben wir sehr kurze Erklärungen zu einigen mathematischen Symbolen, die wir größtenteils in *So einfach ist Mathematik – Basiswissen für Studienanfänger aller Disziplinen* ausführlich besprochen haben. Die Zusammenfassung dient Ihrer Erinnerung und ggf. als Anknüpfungspunkt für weitere Recherchen.

•) $\forall$
Allquantor, logischer Operator. Lies „für alle“.
Bsp.: $\forall x \in \mathbb{R}\ :\ x^2 \geq 0$ heißt „Für alle reellen x gilt $x^2 \geq 0$“.

•) $\exists$
Existenzquantor, logischer Operator. Lies „es gibt“, „es existiert“.
Bsp.: $\forall x \in$ {alle Töpfe} $\exists y \in$ {alle Deckel} heißt „Für jedes x aus der Menge der Töpfe, gibt es ein y aus der Menge der Deckel.“

•) $\wedge$
logisches Und, Abkürzung für „und“. Bsp.: $x > 1 \wedge x < 3$ bedeutet $x \in (1, 3)$.

•) $\vee$
logisches Oder, Abkürzung für „oder“.

•) $\Rightarrow$
logische Implikation. Bsp.: $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ heißt „Aus $x > 2$ folgt $x^2 > 4$“.

•) $\Leftrightarrow$
logische Äquivalenz.
Bsp.: $|x| > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4$ heißt „$|x| > 2$ gilt genau dann, wenn $x^2 > 4$ gilt“.

•) $f\ :\ \mathcal{U} \to \mathcal{V}$
Die Funktion f bildet die Menge $\mathcal{U}$ in die Menge $\mathcal{V}$ ab.

•) $f\ :\ u \mapsto v$
Die Funktion f bildet das Urbild u auf den Funktionswert bzw. das Bild v ab.

•) f^{-1}
Umkehrabbildung einer Funktion f, falls existent.

•) $u \in \mathcal{U}$
u ist Element der Menge $\mathcal{U}$. Die Menge $\mathcal{U}$ enthält u. Bsp.: $2 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

•) $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$
kartesisches Produkt der Mengen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$, Menge der Paare (u, v), $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$.

D. Langemann, *So einfach ist Mathematik – Zwölf Herausforderungen im ersten Semester*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-63720-3

•) $\mathbb{N}$
Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Die Zahlbereiche werden in Abschnitt 3.6 des oben erwähnten Vorgängerbuchs besprochen.

•) $\mathbb{Z}$
Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

•) $\mathbb{Q}$
Menge der rationalen Zahlen $\dfrac{p}{q}$, Brüche mit Zähler p und Nenner $q \neq 0$ aus $\mathbb{Z}$.

•) $\mathbb{R}$
Menge der reellen Zahlen. Faszinierender Gegenstand grundsätzlicher und sehr schöner mathematischer Überlegungen, die auch in diesem Buch bei einigen Argumentationen verwendet werden, leider ohne sie zu beweisen.

•) $\mathbb{C}$
Menge der komplexen Zahlen, siehe Kap. 3.

•) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
Mengendifferenz, hier von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$, d. h. die Menge aller reellen Zahlen, die nicht rational sind, also der irrationalen Zahlen.

•) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$
reeller bzw. komplexer n-dimensionaler Euklidischer Vektorraum.

•) $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{C}^{m\times n}$
Menge der reellen bzw. komplexen $m \times n$-Matrizen, siehe Kap. 8.

•) i
imaginäre Einheit $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$, siehe Kap. 3.

•) $\bar{z}$
zu $z \in \mathbb{C}$ konjugiert komplexe Zahl, siehe Kap. 3.

•) $|z|$
Betrag von z, Abstand von der Null.

•) $[a, b]$
abgeschlossenes Intervall, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

•) (a, b)
offenes Intervall, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, ggf. bis $\pm\infty$. Laxe Eselsbrücke: $(a, b) \subset [a, b]$, denn in die eckige Klammer passt mehr hinein.

•) $n!$
Fakultät, sprich „n Fakultät“, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, Anzahl der möglichen Anordnungen von n paarweise unterscheidbaren Objekten. $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$ und z. B. $10! = 3628800$.

•) $\dbinom{n}{k}$
Binomialkoeffizient, sprich „n über k“, Anzahl der Möglichkeiten, aus n paarweise unterscheidbaren Objekten k Objekte auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)k}.$$

Auffindbar im Pascal’schen Dreieck. Es gelten viele, teilweise überraschende Beziehungen zwischen unterschiedlichen Binomialkoeffizienten.

•) $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
Vektor bzw. Spaltenvektor aus $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{C}^2$.

•) $\mathrm{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$
transponierter Vektor des Zeilenvektors (x_1, x_2), derselbe wie eben.

•) $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{y}$
reelles Euklidisches Skalarprodukt.

•) $|\mathbf{x}|$
Betrag des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, Abstand von der Null.

•) $(a_n)_{n=0}^{\infty} = a_0, a_1, a_2, \ldots$
Folge mit Folgengliedern a_n.

•) $n \to \infty$
Grenzübergang, über alle Maßen wachsende n.

•) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
Grenzwert einer Folge, siehe Kap. 1.

•) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$
Limes superior einer reellen Folge, größter Häufungspunkt, siehe Abschn. 2.3.

•) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n, \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$
Infimum bzw. Supremum, siehe Kap. 1.

•) $\min\limits_{n=0,\ldots,N} a_n = \min\{a_0, \ldots, a_N\}, \max\limits_{n=0,\ldots,N} a_n$
Minimum bzw. Maximum der Werte $a_0, \ldots, a_N$.

•) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$
Summe der Werte für Indizes $k = 1, \ldots, n$.

•) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \ldots$
unendliche Summe der a_k für $k = 0, 1, \ldots$, Reihe, siehe Kap. 2.

•) $C([a, b])$
Vektorraum der in $[a, b]$ stetigen Funktionen, siehe Kap. 6.

•) $C^1([a, b])$
Vektorraum der in $[a, b]$ mindestens einmal stetig differenzierbaren Funktionen, vgl. Abschn. 8.2.2. Beispielsweise liegt $f(x) = x^2$ für jedes $[a, b]$ in $C^1([a, b])$, denn f ist sogar beliebig oft stetig differenzierbar, und es gilt $f^{(k)}(x) \equiv 0$ für $k \geq 3$. Dagegen ist $g(x) = |x|$ nicht in $C^1([a, b])$, sobald $0 \in [a, b]$.

•) $\mathrm{span}\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$
lineare Hülle, Menge der Linearkombinationen der $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, siehe Kap. 6.

•) $\ker \varphi$, $\ker A$
Kern einer linearen Abbildung bzw. einer Matrix, siehe Kap. 9.

•) $\mathrm{im}\, \varphi$, $\mathrm{im}\, A$
Bild einer linearen Abbildung bzw. einer Matrix, siehe Kap. 9.

•) $\mathrm{rk}\, A$
Rang einer Matrix, Anzahl der linear unabhängigen Spalten, siehe Kap. 9.

- •) A^{-1}
  inverse Matrix einer regulären Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
- •) $\mathcal{O}$
  Landau'sches Ordnungssymbol, Landau-Symbol, siehe Abs. 1.5.1 und Kap. 12.
- •) ∂
  geschwungenes d in der partiellen Ableitung, vgl. Abschn. 10.3.2.
- •) $\log_2 8 = 3$
  Logarithmus von 8 zur Basis 2, Umkehrung von $2^3 = 8$, $\sqrt[3]{8} = 2$.
- •) $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$
  natürlicher Logarithmus von $x > 0$.

Stichwortverzeichnis

D. Langemann, *So einfach ist Mathematik – Zwölf Herausforderungen im ersten Semester*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-63720-3