Appendix

In this appendix, we publish:

– two letters, from Montel and Lebesgue to Élie Cartan (these two are "new" in the sense that they did not even appear in the first (French) version of this book),

– a report written by Hadamard on Fatou

– two letters from Fatou to Fréchet

– a few letters from Fatou to Montel.

In every case, we give a translation in English, followed by the original text, in a smaller font.

Two letters to Élie Cartan

We publish here two letters sent to Élie Cartan before the 1934 election at the Academy of Sciences. The first is a long and beautiful letter of Lebesgue which explains to Cartan why he should vote for Montel and expresses some conclusive arguments in favour of Montel and against Julia. The second letter was written by Montel after a discussion he had with Cartan. We note that there was no letter of Julia to Cartan with these two letters, which is easy to understand, as we explain below.

Lebesgue's letter is not dated. The "Monday when I came back from the Academy" cannot help in determining the date: Monday was the usual day for the Academy sessions. It is about an election at the Academy for which both Julia and Montel were candidates and there was only one, since Julia was elected at his first attempt. The date is thus November or December 1933 or January 1934. It is more likely to be December or January, since Lebesgue mentions the "beginning of November" (and not "the beginning of the month").

Montel's letter is dated December 24$^{\text{th}}$ 1933. It deals with the same period, the same discussion. Its timing with respect to Lebesgue's letter is not completely certain: either Montel's explanations are part of the "dissection"

M. Audin, *Fatou, Julia, Montel: The Great Prize of Mathematical Sciences of 1918, and Beyond*, Lecture Notes in Mathematics 2014, DOI 10.1007/978-3-642-17854-2,

Lebesgue mentions and so Lebesgue's letter was written later, or the discussion with Montel and his letter were provoked by Lebesgue's letter and so it was written slightly before...

We start with a few comments, both on this issue and on the mathematics in question in these two letters.

Digression (No letter from Julia to Élie Cartan). As far as we know, there exists no letter from Julia to Cartan on this topic and it is very probable that there was no such letter: Julia was living in Versailles and Cartan in Le Chesnay[1], so they had numerous opportunities fro discussion. Let us quote an excerpt of a speech Julia gave a few years later, on May 18th 1939, for Élie Cartan's jubilee (reproduced in [Julia 1970]).

> Time passes; your former student, now your colleague, had to emigrate, as you did, to the "Water City" [Versailles]. It is now every week that the train brings us together to take us back to Versailles, lost in the crowd of suburb lovers. The coach is almost always full and noisy, but the lack of comfort does not disturb us, with your astonishing physical robustness of a man born in a country family. We would carry on casual conversations, in which academic, professional or mathematical discussions met with all kinds of controversies. [...]
> This was the time when you invite me to your Le Chesnay house and to the small austere study that was relieved only by the square of a window opening on to branches, and, in the shadows, by an hospitable Morris armchair. During frequent visits there we could, better than in the E classroom[2], better than in the suburb trains, better than in the Versailles avenues, rehearse those words, interrupted by silences, in which the inner man comes to light. [...][3].

[1] Their addreses, on February 1st 1934 can be found in the booklets "Vie de la société" in the *Bulletin* of the SMF,

- 27 avenue de Montespan, Le Chesnay, for Cartan,
- 4 bis rue Traversière, Versailles, for Julia.

Montel was living in Paris, 79 rue du Fbg St-Jacques.

[2] A classroom at the ENS, in which Julia took courses by Élie Cartan in 1914, as he mentions at the beginning of the same text.

[3] Du temps passe; votre ancien élève devenu votre collègue, a dû comme vous émigrer vers la "cité des eaux". Désormais, c'est presque chaque semaine que le train nous réunit pour nous ramener à Versailles, perdus dans la foule des amateurs de banlieue. Le wagon est presque toujours plein et bruyant, mais l'inconfort ne vous gêne pas, avec votre résistance physique étonnante d'homme issu de la terre. Nous y poursuivons des conversations à bâtons rompus, où les propos universitaires, professionnels ou mathématiques se mêlent aux controverses de tout genre. [...]

C'est vers cette époque que vous m'avez appelé dans votre maison du Chesnay et dans l'austère petit bureau qu'égayait seulement un carré de fenêtre ouvert sur des branches, et, dans l'ombre, un fauteuil Morris aux bras accueillants. Au cours de fréquents visites, on pouvait là, mieux que dans la salle E, mieux que dans les trains de banlieue, mieux que dans les avenues de Versailles, égrener ces propos, coupés de silences, où se révèle l'homme intérieur. [...]

Hence Julia spoke with Cartan in the train, in the streets in Versailles, and even in his house at Le Chesnay where Cartan invited him. The text allows us to give an approximate date for this "invitation": the musician Jean Cartan was dead[4] (this fact is mentioned in the subsequent sentences) on the one hand, and Julia was not yet academician (as the next paragraph says) on the other. Hence between 1932 and 1934, during the period we are interested in.

Élie Cartan had the reputation of being a very kind man although rather indecisive, but fair: "the conscience itself", as Lebesgue would write. He must have been in quite a delicate situation.

Digression (Montel's and Julia's mathematics in the two letters). The Notice Julia printed for the 1934 election is that in the first volume of his Works. He is obviously less grateful here to Montel's ideas than he was in 1917. We remember from page 62 that he wrote in his December 1917 Note [Julia 1917]:

> At that time, I was not aware of M. Montel's works. His Note dated June 4th 1917 drew my attention. I then studied them in a reprint M. Montel was kind enough to send me.

About the same work, Humbert in his report on the Great Prize had written:

> he [Julia] systematically introduces, not only attracting fixed points, but invariant points at which the absolute value of the multiplier is *greater* than one; their fundamental property is that they are *repelling points*. More precisely, if one of them is surrounded by an arbitrarily small domain, the successive consequents of this domain eventually contain in their interior all the points of the plane except at most one or two.
> The analogy of this statement with a theorem of M. E. Picard is not at all mysterious: M. Julia's proof relies here, as often in the rest of the memoir, on M. Montel's theory of *normal families*, a theory whose close relation with M. Picard's theorem is known[5].

We have seen what Pierre Fatou wrote (see page 93). So that, in 1917, everybody agreed that the notion of normal families had been decisive for the work on iteration. However, as we have seen on page 196, in 1934, when he wrote his Notice, Julia's point of view was quite different.

[4] Jean Cartan, Élie Cartan's second son, was a musician. A student of Dukas and Roussel, he died from tuberculosis on March 26th 1932, aged 25.

[5] il [Julia] introduit systématiquement, non plus les points invariants attractifs, mais les points invariants où le module du multiplicateur est *supérieur* à l'unité; leur propriété fondamentale est d'être des *points de répulsion*. D'une manière plus précise, si l'on entoure l'un d'eux d'un domaine arbitrairement petit, les conséquents successifs de ce domaine *finissent* par comprendre à leur intérieur tous les points du plan, sauf un ou deux, au plus.

L'analogie de cet énoncé avec celui d'un théorème de M. E. Picard n'a rien de mystérieux: la démonstration de M. Julia repose ici, comme souvent dans le reste du Mémoire, sur la théorie des *suites normales* de M. Montel, théorie dont on sait le lien étroit avec le théorème de M. Picard.

A letter from Lebesgue

Wednesday morning

My dear Cartan

It is from my bed that I answer you; I went to bed on Monday when I came back from the Academy, feverish, with a relapse of a flu that has been plaguing me since the beginning of November, from which I have been unable to free myself. On Tuesday, my wife joined me and here we are, side by side, coughing, sneezing, spitting, which is infinitely touching.

This prevented me from summoning Julia. Your benevolence is unlimited after he made you spend 15 days dissecting Montel's work word by word to prove that his work does not owe anything, or very little, to Montel's—to dissect as you never dissected any text, to dissect in such a way that, if one were doing the same work on Poincaré, there would be nothing, absolutely nothing, proven by Poincaré—you content yourself, especially in this memoir, that the issue is to prove that it is independent of Montel, with a quotation where it is said, I think, that Montel generalised from Lindelöf and where after that the theorem quoted is in effect that of Lindelöf, and not that of Montel, which is the one that is used. After that also, Montel becomes a member of the Scandinavian school and the first method, being Scandinavian, becomes independent of Montel!!!!

And nevertheless, you granted me that Julia "*diminished*[6]" Montel's role in his famous Zurich talk[7]!

No, to tell the truth! Cartan, you exaggerate when you pretend not to see what is dazzling. That you forgive Julia for it, that is quite another thing; he is special and when we recognise a shortcoming or even a flaw we can legitimately pretend that this is a mental aberration due to the awful state in which the war left him and that you feel very sorry for him. I would find nothing to object to in that because this is the indulgence I would like to engage in. You don't help me; in questioning facts you recall the reproaches that can be made to him. And I would indeed need much help because nothing is harder than forgiving those who are so individual that they are unfair to others, since nothing is more contrary to my nature. And I never saw anybody as starkly individual as Julia.

Allow me to remind you of my way of doing things, it is so different from that of Julia that it will explain to you the difficulty I have in standing for his way. When some people tried to push me under Borel's feet, I said to myself, what would you have done if Borel had not existed? My vanity dictated to me

[6] As always, italics here replace underlining in the handwritten letter. All the notes are the author's.

[7] This is the plenary talk given by Julia at the International Congress at Zurich en 1932. See footnote 3 of Chapter VI and also page 233.

all kinds of "self-satisfying" answers, but I did not listen to it and I told myself: you cannot answer with certainty, you must let Borel pass but also express, in truth, that he is logically as well as chronologically ahead of you. And I did not feel reticent in doing it. There was perhaps some merit in that, because Borel was not always fair to me; but when I had to criticise, I didn't do so secretly, I told him straightforwardly and publicly, without any diplomacy, unceremoniously, but also very sincerely. I defy anybody to find in my bitter claim an unfair word on Borel's work, a tendencious attempt to push myself to his detriment. And my Philippic would have had enough effect to have strongly helped me in a campaign against Borel if I had wanted to undertake one; I had Goursat supporting me in the section, and Picard, and Kœnigs outside it[8], who were more than willing to fight, but I declined. And I said to myself: a seat at the Academy is not worth me demeaning myself in my own eyes, you wait[9].

And when Jordan died I made no move; I made no visit, either in the Section or outside it. It was only when the Section told me: we are putting you forward unanimously, that I started to write my Notice; so that the election had to be delayed. This election went as you know; everybody received votes except you[10]. And this did not surprise me since I observed during the visits that only two people did not ask those they visited to vote for them: I myself, who had no point in doing so, and you.

I thought that, in the present circumstances, you would condemn as I do any action which reveals an ambition that is so great that it does not stop short of injustice, since you were able to wait, even more than I was, until the others' judgement was favourable towards you, whatever personal judgement you legitimately had. And I repeat that to condemn the process does not automatically condemn the man when he is disabled[11].

---

[8] This is the geometry section at the Academy of Sciences; remember that Kœnigs was a member of the mechanics section.

[9] The relation between Borel and Lebesgue became, at the end of the war, lamentable. The correspondence [Lebesgue 1991 ; 2004] ends very sadly. To the scientific rivalry, one should add the resentment of Lebesgue against the non scientific activities to which Borel devoted more and more of his time as time went by (the *Revue du mois*, politics). The elections mentioned by Lebesgue in this letter are those of

– April 11th 1921, for the replacement of Georges Humbert, the meeting in secret committee proposing Borel in first place and Lebesgue in second, and the 54 academicians electing Borel with 48 ballots (and 4 to Lebesgue),

– May 29th 1922, for the replacement of Jordan, Lebesgue obtaining 44 ballots (Vessiot 5, Drach 3, Cartan 2).

[10] Jordan died on January 21st 1922 and the election took place four months later, on May 29th. And it is not quite true that Cartan received no vote. See footnote 9.

[11] Lebesgue reproaches to Julia of being "starkly individual". It is quite interesting to note that Lebesgue considers Julia's war wound and that what he dislikes in his personality may be a consequence of this injury. Moreover, he is very careful to distinguish between the disabled person and his behaviour.

How far we are from the peacefulness and the kind of purely scientific concerns that should be the only important things in a scientific election. Whose fault was it? Montel's?

What was it about? Denjoy having withdrawn for Montel, which is a weighty tribute to the latter, we have to know whether Julia and Montel were worthy of the Academy and in which order they should be appointed. If we judge that they are both worthy, whatever the order in which we rank them scientifically—and I hasten to repeat that I rank Montel first—a 17 years' difference in age is relevant and is humanly peremptory, but what counts much more for me is that nobody can say what Julia would have done if Montel had not existed as his two most important pieces of work depend on Montel.

Scientifically I am for Montel because when everybody was walking at random and without a good understanding of what they were doing he showed everybody the fundamental fact from which everything follows and on which effort had to be concentrated. A wide range of theorems became special cases of a unique simple fact. Whereas invention, ingenuity and luck were needed the day before, the application of a method was the only thing needed the day after. This, this is a very big thing[12]. Since one of its merits is to help in understanding what preceded it, there must have been predecessors. One might pretend that the analytic geometry of Descartes and Fermat only repeated what had been in common use among mathematicians since Apollonius; that Newton's derivation was due to Barrow, Fermat, etc. All this doesn't trouble me.

This allows us to see things from above and proves the intellectual calibre of Montel. But he did many other things—we tend to forget this while examining the fine points raised by Julia—either using normal families or in another way. In particular I must say that I appreciate greatly the difficulties Montel overcame to prove, at last, that the Cauchy conditions $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ are sufficient, without anything further. His investigations on the existence of derivatives of functions of one or several variables are also within my area of expertise and this latter case was not well studied before him.

I don't want to make a catalogue, useless with you that are the conscience itself; it was probably not even necessary to remind you that Montel was not only responsible for normal families.

Julia has lots of beautiful work to his credit but I believe that less will be abide than of Montel's, that it will be less useful to the progress of science than Montel's has already been. Why? because, except for the Julia lines that are by far his main contribution, he was never a pioneer, because in his work the abundance, the erudition, the skilful technique, sometimes impress

[12] The big idea of Montel is the theorem on normal families. As we have seen, this is a characterisation of relatively compact subsets in spaces of holomorphic functions. The point then was to apply a theorem on families, on sequences, to the investigation of a single function, replacing the study of f at 0 by the study of the sequence of functions $z \mapsto f(z/2^n)$. See § I.5.

us superficially when all this is actually exterior to the true value. This value is nevertheless real and I don't wish at all either to dispute it or to "*diminish*" it, but I had to tell you what influences my assessment.

We still need to know whether Julia's two main works use as essential tools those invented by Montel. In iteration, Julia, Fatou and the referee Humbert categorically acknowledged this, but this confession might weigh upon Julia. I, who lack your infinite benevolence, imagine that he told you: I was misinformed, I should have quoted Landau and Carathéodory and not Montel—because, all the same, you did not find Landau and Carathéodory by yourself. It is good enough to read Montel and Julia, if we were to read all those they quote, then where would we be?

Thus, your attention drawn, you read Landau and Carathéodory and you find there what you told me. Let us imagine that Landau and Carathéodory have not only happened to construct a proof close to that of Montel's criterion or the proof itself, but also that they were conscious of this and that they stated it; what then? Would this prevent what Julia uses coming from Montel's ideas since, as you said, Landau and Carathéodory expressly refer to the ideas and results of Montel. Thus on this first point (and whatever happens with the *different* question of the priority Montel-Landau) my opinion is firm.

(As for the priority question, ask Montel. I am not very impressed by the question; a memoir published in a journal *dated* 1911 and a result announced in a 1911 note cannot have much influence on each other. The memoir refers to Montel, and that is the criterion, and Montel knew the memoir when he wrote his detailed 1912 paper; but such can be quite different types of knowledge)

As for Julia lines. Julia has a three-pronged attack:

a J-points. Settled? See the 1st paragraph of Montel's 1912 memoir, reproduced almost word for word (along with many other things from the same memoir) in Julia's book.—This, in brackets, is so outrageous that it shows the pathological character of Julia's claims.

b My proof, Julia says, is entirely different from that of Montel. Montel says $f(2^n z)$ would be normal but it is not. I proceed the other way round, which is quite different since Montel uses the exceptional values to prove that the sequence is not normal and I don't.

That there was a difference here that he wanted to emphasise is natural, since this is where the advantages he gets from his presentation come from; but this is quite another thing: we must judge that this has nothing to do with Montel. Now this depends on Montel in two essential ways: normal families and the construction of the sequence on which the function is reflected, which is the *only* construction or invention there is in all these matters.

Here again, I am fair to Julia, I don't care to know whether Montel would have introduced $f(2^n z)$ if it had not be abnormal, if he did not know that it was abnormal in every case, he proved it again in the rest of the memoir, if he did not prove it simply because he did not need it, if the proof of abnormality is significant or if it goes without saying, if this is not the kind of things we sometimes call an unimportant gap, etc. I agree that Julia is right in all this.

And then? His proof is dependent on two major things: the theory of normal functions, and the construction of the sequence $f(2^n z)$.

c "But I have another method, independent of normal families and of Montel's construction, one that uses the results of the Scandinavian school." The only Scandinavian as it happens is Montel who proved a theorem of which Lindelöf says that he could neither prove it nor to disprove it by an example (which is not a sufficient reason for why this theorem should not be counted towards Montel). And this theorem could only be proved by normal families and then J.'s two methods look as alike as two sisters.

Any long speech demands a conclusion; this one will lack it or rather, coming back to your letter, I will conclude: perhaps Julia does not denigrate Montel's work but he uses anything he can to get free from it. The result looks then so much like a denigration that you will excuse such a short-sighted man as I for being mistaken. As for me, I would prefer to magnify those I want to defeat rather than to diminish them.

So, with the intermediary of Rigollot, of cupping and gargling, I spent the day answering you. My inaction is the excuse for my length; I am a little sorry about that but I am happy to have told you my thoughts exactly. I shall end with a wish, that your indecisiveness stops so that we can say clearly to the candidates, whom each of us supports.

This said I lie down; I am certainly much better, but I feel feeble.

Yours

[signed] H. Lebesgue

Mercredi matin

Mon cher Cartan

C'est du lit que je vous réponds; je me suis couché Lundi à ma rentrée de l'Institut brûlant de fièvre, rechute de cette grippe que je traîne depuis le début de novembre sans avoir pu m'en libérer. Le mardi ma femme est venue me retrouver et nous voici cote à cote toussant, éternuant, crachant, ce qui est infiniment touchant.

Ceci m'a empêché de convoquer Julia. Votre bienveillance à vous est infinie et après qu'il vient de vous faire passer 15 jours à éplucher mot par mot les travaux de Montel pour prouver que ses travaux à lui ne doivent rien, ou si peu, à ceux de Montel — à éplucher comme jamais vous n'avez épluché aucun écrit, à éplucher d'une façon telle que si l'on faisait le même travail sur Poincaré il n'y aurait rien, absolument rien de démontré par Poincaré — vous vous satisfaites, précisément dans ce mémoire qu'il s'agit de montrer indépendant de Montel, d'une citation où il est dit, je crois, que Montel a généralisé le Lindelöf et quand après cela le théorème cité est celui de Lindelöf inopérant et non celui de Montel utilisé. Après cela aussi Montel devient de l'Ecole scandinave et la première méthode, étant scandinave, est indépendante de Montel!!!!

Et pourtant, vous m'avez concédé que Julia a "*amenuisé*" le rôle de Montel dans sa fameuse communication de Zurich!

Non, en vérité! Cartan, vous exagérez en ne voulant pas voir ce qui est éclatant. Que vous en excusiez Julia, cela c'est tout autre chose; il est à part et même si on

reconnaît en lui un travers ou même une tare on peut très légitimement prétendre que c'est une déformation mentale due à l'état lamentable dans lequel la guerre l'a laissé et que vous ne l'en plaigniez que davantage je n'aurais rien à y objecter / car c'est à cette mansuétude que je voudrais arriver. Vous ne m'y aidez pas; en contestant l'évidence vous me faites [? ranimer, raviver] davantage les reproches qu'on lui peut faire. Et j'aurais pourtant bien besoin d'être aidé car rien n'est plus difficile que de pardonner à ceux qui sont tellement personnels qu'ils sont injustes envers les autres car rien n'est plus contraire à mon tempérament. Et je n'ai jamais vu personne d'aussi âprement personnel que Julia.

Permettez-moi de vous rappeler ma façon d'agir, elle est tellement différente de celle de Julia qu'elle vous expliquera la difficulté que j'ai à encaisser ses façons de faire. Quand certains ont cherché à me pousser dans les jambes de Borel, je me suis dit, qu'aurais-tu fait si Borel n'avait pas existé? Ma vanité me dictait pas mal de réponses "avantageuses" je ne l'ai pas écoutée et je me suis dit: tu ne peux répondre avec certitude, tu dois laisser passer Borel mais même exprimer, ce qui est la vérité, c'est qu'il est logiquement, tout aussi bien que chronologiquement, avant toi. Et je l'ai fait sans aucune réticence. J'y avais peut-être quelque mérite, car Borel ne m'avait pas toujours traité avec justice; mais ce que j'avais eu à lui reprocher, je n'avais pas été le dire à l'oreille, je le lui ai dit crûment et publiquement, sans aucune diplomatie, sans ménagement, mais aussi en toute sincérité. Je défie qu'on trouve dans mon âcre revendication un mot injuste pour l'œuvre de Borel, un essai tendancieux de me pousser à son détriment. Et ma philippique avait assez porté pour qu'elle m'ait puissamment aidé dans une campagne contre Borel si j'avais voulu en faire une; j'avais pour moi Goursat et dans la section, Picard Koenigs en dehors d'elle et qui ne demandaient qu'à faire campagne, j'ai dit non. Et à moi je me suis dit: une place /

(2)

à l'Académie ne vaut pas qu'on se diminue à ses propres yeux, tu attendras.

Et quand Jordan est mort je n'ai fait aucune démarche; je n'ai été voir personne, ni dans la Section, ni en dehors d'elle. C'est seulement quand la Section m'a dit: nous vous présentons à l'unanimité, que j'ai commencé à rédiger ma Notice; si bien qu'il a fallu reculer l'élection. Cette élection a été ce que vous savez; tout le monde y a eu des voix, sauf vous. Et cela ne m'a pas étonné car j'avais pu constater au cours des visites que deux personnes seulement ne demandaient pas à ceux qu'ils visitaient de leur donner leur voix: moi, qui n'y avais guère de mérite, et vous.

J'avais [aurais?] cru que, dans la circonstance actuelle, vous condamneriez comme moi tout acte révélant une ambition poussée au point de ne pas s'arrêter devant l'injustice puisque vous aviez su attendre, plus encore que moi, que le jugement des autres vous soit favorable, quelque jugement personnel que vous puissiez légitimement avoir. Et je répète que condamner les procédés, ce n'est pas nécessairement condamner l'homme quand il s'agit d'un grand mutilé.

Comme nous voici loin de la sérénité et du genre de préoccupations purement scientifiques qui seules devraient nous importer dans une élection scientifique. De qui est-ce la faute? De Montel?

De quoi s'agit-il? Denjoy s'étant retiré devant Montel, ce qui tout de même est un hommage de poids envers celui-ci, il faut savoir si Julia et Montel sont dignes de l'Académie et dans quel ordre ils doivent y être appelés. Si nous jugeons qu'ils en sont tous deux dignes, quel que soit l'ordre dans lequel nous les placions scientifiquement — et je me hâte / de répéter que je place Montel en premier — une différence de 17

ans d'âge compte et est péremptoire humainement mais ce qui pour moi compte bien autrement c'est que nul ne pourrait dire ce que Julia aurait fait si Montel n'avait pas existé car ses deux travaux les plus importants relèvent de Montel.

Je suis scientifiquement pour Montel parce que là où tout le monde marchait au hasard et sans bien comprendre ce qu'il faisait il a fait voir à tous le fait fondamental duquel tout découlait et sur lequel devait porter l'effort. Des assortiments de théorèmes sont devenus des cas particuliers d'un même fait bien simple. Là où la veille il fallait de l'invention, de l'ingéniosité et du bonheur, il n'a plus fallu le lendemain que l'application d'une méthode. Cela, c'est une très grande chose. Puisque l'un des mérites de cette chose est de faire comprendre ce qui l'a précédée, il faut qu'il y ait des prédécesseurs. On a pu prétendre que la géométrie analytique de Descartes et Fermat ne faisait que répéter ce qui était d'usage courant chez les mathématiciens depuis Apollonius; que la dérivation de Newton était de Barrow, de Fermat, etc. Tout cela ne me trouble pas.

Aussi parce qu'à côté de cette preuve d'intelligence qui permet de voir les faits de haut il a tout de même fait bien d'autres choses — on a dans l'examen des pointes d'aiguilles soulevées par Julia trop tendance à l'oublier — et par les familles normales et autrement. En particulier je dirai que j'apprécie fort les difficultés vaincues par Montel pour arriver, enfin, à montrer que les conditions de Cauchy $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ sont suffisantes, sans rien de plus. Ses recherches sur l'existence des dérivées des fonctions d'une ou de plusieurs variables sont aussi de ma compétence et ce dernier cas n'était pas bien abordé avant lui.

Je ne veux pas faire une énumération, inutile avec vous qui êtes la conscience même; il n'était sans doute même pas nécessaire de vous rappeler que Montel n'est pas seulement les familles normales.

Julia a à son actif quantité de beaux travaux mais je crois /

(3)

qu'il restera moins de ses travaux que de ceux de Montel, qu'ils seront moins utiles aux progrès de la science que ceux de Montel ne l'ont déjà été. Pourquoi? parce que, hors les droites de Julia qui sont de beaucoup son principal titre, il n'a jamais été un initiateur, que dans ses travaux, le foisonnement, l'érudition, la technique savante, parfois inutilement, nous impressionnent et que tout cela est en réalité extérieur à la vraie valeur. Cette valeur est réelle et je ne pense nullement ni à la contester, ni à l'"amenuiser" mais il fallait que je vous dise ce qui influe sur mon jugement.

Reste à savoir si, oui ou non, les deux principaux travaux de Julia utilisent comme outils essentiels les outils créés par Montel? Pour l'itération, Julia, Fatou et le rapporteur Humbert l'ont reconnu formellement mais cet aveu pèse peut-être à Julia. Moi, qui manque de votre bienveillance infinie, j'imagine qu'il vous a dit: j'étais mal renseigné, j'aurais pu et dû citer Landau et Carathéodory et non Montel — car, tout de même vous n'avez pas trouvé seul Landau et Carathéodory. C'est bien assez de lire Montel et Julia s'il fallait encore lire tous ceux qu'ils citent, où irions nous?

Donc, alerté, vous avez lu Landau et Carathéodory et y avez trouvé ce que vous m'avez dit. Imaginons que Landau et Carathéodory aient non seulement construit incidemment une démonstration voisine de celle du critère de Montel ou cette démonstration même mais qu'ils en aient eu conscience et qu'ils l'aient énoncé; eh bien? Ça empêchera-t-il que ce qu'utilise Julia ne provienne des idées de Montel

puisque, m'avez-vous dit, Landau et Carathéodory se réfèrent expressément aux idées et résultats de Montel. Donc sur ce premier point (et quoiqu'il arrive de la question *différente* priorité Montel-Landau) j'ai une opinion ferme.

(Quant à la question de priorité, demandez à Montel. Je ne suis pas très impressionné par la question; un mémoire paru dans un périodique *daté* 1911 et un résultat annoncé dans une note de 1911 ne peuvent pas avoir beaucoup d'influence l'un sur l'autre. Le mémoire se réfère à Montel voila le critère et Montel connaissait le mémoire lors de son article développé de 1912; mais ce peuvent être deux connaissances assez différentes) /

Pour les droites de Julia. Triple offensive de Julia:

a Points J. Liquidée n'est-ce pas? voir le 1er paragraphe du mémoire Montel 1912, reproduit presque textuellement (avec bien d'autres choses du même mémoire) dans le livre de Julia. — Ce qui, entre parenthèses, est tellement énorme que ça montre le caractère maladif des réclamations de Julia.
b Ma démonstration, dit Julia, est entièrement différente de celle de Montel. Montel dit $f(2^n z)$ serait normale or elle ne l'est pas. Je procède en [?] inverse et c'est tout différent car Montel utilise les valeurs exceptionnelles pour prouver que la suite n'est pas normale et moi pas.
Qu'il ait dit qu'il y avait là une différence qu'il tenait à souligner car de là venaient les avantages qu'il tire de sa présentation, rien que de naturel; mais c'est tout autre chose: nous devons juger que ça n'a aucun rapport avec le Montel. Or ça dépend de Montel de deux façons essentielles: les suites normales et puis de la construction de la suite sur laquelle la fonction se reflète, ce qui est la *seule* construction, invention qu'il y ait dans toute [*sic*] ces questions.
Là encore je fais beau jeu à Julia, je ne m'occupe pas de savoir si Montel aurait introduit $f(2^n z)$ si elle n'avait pas été anormale, s'il ne savait pas qu'elle était anormale dans tous les cas, il l'a encore démontré dans la suite du mémoire, s'il ne l'a pas démontré seulement parce qu'il n'en avait pas besoin, si la démonstration d'anormalité est de celles qui comptent ou qui vont de soi, si ce n'est pas de l'ordre de ce qu'on appelle parfois une lacune sans importance, etc. Je donne raison à Julia sur tout cela. Et puis? Sa démonstration reste tributaire des deux faits majeurs: théorie des fonctions normales, construction de la suite $f(2^n z)$.
c "Mais j'ai une autre méthode indépendante des familles normales et de la construction de Montel celle qui utilise les résultats de l'Ecole scandinave." Le seul scandinave en l'occurrence est Montel qui démontre un théorème que Lindelöf déclare n'avoir pu ni prouver ni mettre en défaut par un exemple (ce qui n'est tout de même pas une raison pour que ce théorème de Montel ne compte pas à Montel). Et ce théorème n'a pu être prouvé que par les familles normales et les deux méthodes de J. se ressemblent alors comme deux sœurs.

/

(4)

Tout long discours demande une conclusion; celui-ci s'en passera ou plutôt, revenant à votre lettre, je conclurai: peut-être que Julia ne dénigre pas l'Œuvre de Montel mais il ne recule devant rien pour essayer de s'en affranchir. Le résultat ressemble alors si fort à un dénigrement que vous excuserez un myope comme moi s'il s'y est trompé. Pour moi j'aimerais mieux grandir ceux que je voudrais vaincre que de les diminuer.

Voilà, avec les intermédiaires de Rigollot, de ventouses et gargarismes, la journée s'est passée à vous répondre. Mon inoccupation est l'excuse de ma longueur; j'en suis

un peu confus mais content de vous avoir dit exactement ma pensée. Je terminerai par un souhait, que votre indécision ne dure plus et que nous puissions dire nettement aux candidats pour qui chacun de nous est.

Sur quoi je m'allonge; je vais certainement bien mieux mais suis faible.

À vous

[signé] H. Lebesgue

A letter from Montel

Paris, Dec 24th 1933

Dear Monsieur Cartan,

I found your letter yesterday evening when I returned home[13].

Julia's proof[14] of Picard's theorem is indeed identical to the one on page 299 of my 1916 memoir as you pointed out to me[15].

---

[13] December 24th was a Sunday, it was on Saturday that Montel found the letter he is answering. Cartan must have written it on Thursday evening or Friday, after having discussed with Montel on Thursday December 21st.

[14] This is in Julia's book [Julia 1924a], the notes of his 1920 Peccot course, written by Paul Flamant. The book appeared in 1924. As Julia says in the preface (dated August 1923):

> [...] the study of the function in a circle surrounding the essential singular point can be reduced to the study of a sequence of functions in a circular annulus surrounding this point, every function being *meromorphic* in the annulus. From this point of view, one is led, with M. Montel, to a new proof of M. Picard's theorems: Chapter III describes the main properties of normal families of functions; the modular function plays an essential role in the proof of a criterion given in 1911 by MM. Landau and Carathéodory in the form of a convergence criterion, but the transformation of this in terms of a normal families criterion allows us to re-prove simply the theorems of Chapter II [l'étude de la fonction dans un cercle entourant le point singulier essentiel peut se ramener à l'étude d'une suite de fonctions dans une couronne circulaire entourant ce point, chacune des fonctions étant *méromorphe* dans la couronne. De ce point de vue, on est conduit, avec M. Montel, à une nouvelle démonstration des théorèmes de M. Picard: le Chapitre III expose les propriétés essentielles des familles normales de fonctions; la fonction modulaire y joue un rôle essentiel pour l'établissement d'un critérium donné en 1911 par MM. Landau et Carathéodory sous forme de criterium de convergence, mais dont la transformation en criterium de familles normales permet de redémontrer simplement les théorèmes du Chapitre II.].

[15] This is the proof given on pages 79-80, in the Chapter *Les familles normales de fonctions* of [Julia 1924a], which is indeed identical to that of Montel, p. 299, except that Montel treats the more general case of a meromorphic function.

It is different from that on page 252 of the same memoir which relies on the fact that the function has no zero. But on this page 252, I referred in a Note to a first proof of Picard's theorem which is at page 514 of my 1912 memoir. The latter applies directly to the case Julia considers[16].

For me, the main issue lies in substituting for the criterion of exceptional values any normal family criterion and mentioning that Picard's theorem follows.

I claim that my theorem on page 296 goes further and contains the previous one as a special case. I prove there that any criterion gives a new theorem of Landau type, or Schottky type, or Picard type.

The reasoning I showed you on Thursday shows that $f(2^n z)$ cannot be normal for $|z| < 1$. Could it have a unique irregular point as in the case where $f(z) = z$ for instance? One sees, as in my proof on page 514 (1912), or otherwise, that this would contradict Weierstrass' theorem. *

All that precedes is about the proof of the actual theorem of Picard. Of course I never thought of claiming the notion of Julia line. The references in my later memoirs are perfectly explicit on this point and my opinion is formulated in the last paragraph of page 20 in my Notice.

Yours very sincerely

[signed] Paul Montel

*My reasoning indeed shows that no partial sequence extracted from $f(2^n z)$ can be normal for $|z| < 1$. Thus $f(2^n z)$ tends uniformly to infinity for $\frac{1}{2^2} < |z| < \frac{1}{2}$, since any partial sequence tends uniformly to infinity.

Paris, le 24 déc. 1933

Cher Monsieur Cartan,

J'ai trouvé votre lettre hier soir, en rentrant chez moi.

La démonstration de Julia du théorème de Picard est bien identique à celle de la page 299 de mon mémoire de 1916, comme vous me l'avez fait remarquer.

Elle diffère de celle de la page 252 du même mémoire qui s'appuie sur le fait que la fonction est dépourvue de zéro. Mais à cette page 252, je renvoie en Note à une première démonstration du th. de Picard qui se trouve à la page 514 de mon mémoire de 1912. Cette dernière s'applique immédiatement au cas envisagé par Julia.

Pour moi, la question principale / réside dans le fait de substituer au critère des valeurs exceptionnelles un critère quelconque de famille normale et de mentionner que le théorème de Picard s'en déduit.

Je dis que mon théorème de la page 296 va plus loin et comprend le précédent comme cas particulier. Je démontre à cet endroit que tout critère entraîne un nouveau théorème type Landau, ou type Schottky, ou type Picard.

Le raisonnement que je vous ai indiqué jeudi montre que $f(2^n z)$ ne peut être normale pour $|z| < 1$. Pourrait-elle avoir un seul point irrégulier comme dans le cas

[16] This is now about his proof, page 252. He had indeed already proved Picard's theorem (this time for an analytic function). His proof uses the fact that the f_n in the sequence he considers do not take the value 0.

où $f(z) = z$ par exemple? On voit, comme dans ma démonstration de la page 514 (1912), ou autrement, que cela est en contradiction avec le théorème de Weierstrass.*

Il s'agit dans tout ce qui précède de la démonstration du th. de Picard proprement dit. Il va de soi que je n'ai / jamais songé à revendiquer la notion de droite de Julia. Les indications de mes mémoires ultérieurs sont parfaitement explicites sur ce point et mon opinion est formulée au dernier alinéa de la page 20 de ma Notice.

Bien cordialement à vous

[signé] Paul Montel

*Mon raisonnement montre en effet qu'aucune suite partielle extraite de $f(2^n z)$ ne peut être normale pour $|z| < 1$. Donc $f(2^n z)$ tend uniformément vers l'infini pour $\frac{1}{2^2} < |z| < \frac{1}{2}$, puisque tout suite partielle tend uniformément vers l'infini.

Hadamard's report

[This is a four and a half page handwritten report that Hadamard wrote for a secret committee meeting of the Academy of Sciences, during which he probably read it, on July 4th 1921. This meeting was preparatory to the vote of July 11th 1921, after which the Academy of Sciences would propose Lebesgue in first place and Fatou in second for a position at the Collège de France.]

Secret Committee
of July 4th 1921

M. *Fatou*[17], assistant-astronomer at the Paris Observatory, worked on the most difficult and lofty areas of current mathematics and, each time, he gave the studies he approached a fruitful and important impetus.

This was firstly the case for the Thesis on *Taylor series*. In this subject where so much obscurity yet needs to be cleared up, it seems that we still constantly need researches that orientate the science and that not only bring it results but give it directions to follow. This is what Fatou has been fortunate enough to do since his Thesis. He devotes himself firstly to the examination of the limiting values to which the function can tend when approaching the circle of convergence.

Better than stating the theorems to which he was led we shall indicate their importance by saying that they have already been used in the work of Carathéodory on the conformal mapping theorem, of one F. and one M. Riesz on the definition of a function by Fourier constants.

Secondly, Fatou attacked the question of the convergence of the series, and he arrived at the following statement, which immediately became a classic due to its wonderful superiority: "The necessary and sufficient condition for the series $\sum a_n z^n$ to converge at any regular point of the circle of convergence is that the limit of a_n is zero". Here again, as for those we mentioned above, this statement made way for new research by MM. F. and M. Riesz, while another

[17] Our *italics* replace the underlining of Hadamard's manuscript.

statement obtained by the author, through combining his own viewpoints with those M. Lebesgue introduced into the science, induced work even of one Hermann Weyl, among others.

The history of Fatou's work in the theory of iteration is no less striking. This concerns, as is known, the behaviour of the quantities z_n obtained sequentially by the recurrence equation $z_n = \varphi(z_{n-1})$, the function φ being given (e.g. a rational function). It was, as is also known, our colleague M. Kœnigs who posed and solved this question in the local domain, that is, in a neighbourhood of a double point of the substitution, namely a root of the equation $\varphi(z) = z$.

Nobody had dared to tackle the question in the whole plane when, in 1906, in a short *Comptes rendus* note, M. Fatou, giving example of the extraordinary results met, showed at once the interest and the high difficulty in doing so. The chosen substitution was quite simple ($z_1 = \dfrac{z+z^2}{2}$); starting from this simple case however, the strangest singularities show up: the *domains* of the two limit points, namely the regions in which the starting point of the successive substitutions should be taken in order to reach eventually one or the other of the two double points, are separated by a non-analytic curve.

Our Academy considered that such investigations deserved to be pursued and recently put the question to Concourse. It thereby obtained the first rate works of M. Julia and also of M. Lattès, which were a great success for French mathematical science, showing, right after the war, that it kept its vitality and its power. Not only should we not forget that these conquests find their origin in M. Fatou's initiative [namely, Note [Fatou 1906d]], but that the latter, whose state of health prevented him from taking part in due time in the competition, obtained slightly later, often by simpler methods, more decisive results than the previous ones. Let us mention this one: *except for some exceptional* (and easily recognisable) *cases, the boundary of the domains under consideration has no tangent at any point.*

Once again, as one sees, following the example given by the case of Kleinian functions in Poincaré's work, the most delicate and subtle notions in the modern theory of sets and of functions of real variables necessarily appear in certain problems with a very simple statement. If our predecessors did not recognise this intervention, that is because they ran away from it without noticing it and they avoided the difficult problems where they would have been forced to come up against it.

We could multiply examples, either in the two theories we just spoke about, or in other questions by the same author, including those which combine the first two (such as the investigation of Taylor series the coefficients of which are obtained from each other by iteration). Those that precede are enough to show that M. Fatou has been essentially an innovator. As we see it, the list of geometers who were inspired by him is relatively long and includes, for a large part, the most prominent young researchers in France and abroad.

Such inspiring work has perhaps been too often forgotten and deserves the full attention of those who devote themselves to the mathematical science of our country.

[signed] J. Hadamard

Comité secret
du 4 juillet 1921

M. *Fatou*, astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris, a travaillé sur les parties les plus élevées et les plus difficiles des Mathématiques actuelles et, chaque fois, il a donné aux études [auxquelles, biffé] qu'il abordait une impulsion importante et féconde.

Ce fut tout d'abord le cas pour la thèse de la *série de Taylor*. Dans ce sujet où il reste tant d'obscurités à dissiper, il semble que nous ayons encore constamment besoin de recherches qui orientent la science et qui non seulement lui apportent des résultats, mais lui montrent les directions utiles à suivre. C'est ce qu'il fut donné à Fatou de faire dès sa Thèse. Il s'y consacre tout d'abord à l'examen des valeurs limites vers lesquelles peut tendre la fonction lorsqu'on s'approche d'un point du cercle de convergence.

Mieux [que l'énoncé, biffé] qu'en énonçant les théorèmes auxquels il a été conduit nous en ferons prendre l'importance en disant qu'ils ont servi aux travaux d'un Carathéodory sur la représentation conforme, d'un F. et d'un M. Riesz sur la définition d'une fonction par des constantes de Fourier.

Que, d'autre part, M. Fatou s'attaque à la question de la convergence de la série, et il aboutit à l'énoncé suivant, devenu immédiatement classique par sa magnifique supériorité: "La condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum a_n z^n$ converge en tout point régulier du cercle de convergence est que la limite de a_n soit nulle". Ici encore, comme ceux dont nous parlions il y a un instant, cet énoncé a ouvert la voie à des recherches nouvelles de MM. F. et M. Riesz, pendant qu'un autre énoncé obtenu par l'auteur en combinant ses propres points de vue avec ceux qui ont été introduits dans la science par M. Lebesgue provoquait entre autres celles même d'un Hermann Weyl.

L'histoire de l'œuvre de Fatou dans la question de l'itération n'est pas moins démonstrative. [Les fondements, biffé] [C'est on le sait notre confrère M. Kœnigs qui a posé et résolu ce problème dans, biffé] Il s'agit on le sait de la disposition des quantités z_n déduites les unes des autres par l'équation de récurrence $z_n = \varphi(z_{n-1})$, la fonction φ étant donnée (p. ex. une fonction rationnelle). C'est on le sait également notre confrère M. Kœnigs qui a posé et résolu ce problème dans le domaine local, c'est-à-dire un voisinage d'un point double de la substitution, càd d'une racine de l'équation $\varphi(z) = z$.

Personne n'avait osé aborder la même question dans l'ensemble du plan lorsque, dès 1906, [M. Fatou, biffé] dans une courte note aux *Comptes Rendus*, M. Fatou, par l'exemple des résultats extraordinaires qu'on y rencontre, en montrait à la fois l'intérêt et la haute difficulté. La substitution choisie était bien simple ($z_1 = \dfrac{z+z^2}{2}$); [cependant, déjà, biffé] dès ces cas simples cependant, les singularités les plus bizarres apparaissent: les *domaines* des deux points limites, c'est-à-dire les régions où il faut prendre le point de départ des substitutions successives pour aboutir finalement soit à l'un soit à l'autre des deux points doubles, sont séparés par une courbe non analytique.

Notre Académie a jugé que de telles [résultats, biffé] recherches méritaient d'être poursuivies et [quelques, biffé] récemment a mis la question au Concours. Elle a ainsi obtenu des travaux de premier ordre de M. Julia et aussi de M. Lattès, qui ont constitué pour la Science mathématique française un grand succès, surtout au lendemain de la guerre, qu'elle n'avait [rien perdu de, biffé] gardait sa vitalité et sa puissance. Non seulement on ne saurait oublier que ces conquêtes [peuvent, biffé] doivent leur origine à [biffé illisible] l'initiative de M. Fatou, mais celui-ci, que son état de santé avait empêché de participer en temps utiles au Concours, a [publié, biffé] obtenu peu après par des méthodes souvent plus simples, une série de résultats plus décisifs encore que les précédents. Citons celui-ci: *des cas exceptionnels* (et aisément reconnaissables) *exceptés, la frontière des domaines en question n'a de tangente en aucun point.*

Une fois de plus, on le voit, après l'exemple [donné, biffé] fourni par le cas des fonctions Kleinéennes dans l'œuvre de Poincaré, les notions les plus délicates [biffé illisible] et les plus subtiles de la théorie moderne des ensembles et des fonctions de variables réelles apparaissent nécessairement dans des problèmes d'énoncé très simple. Si [les géomètres, biffé] nos prédécesseurs n'en avaient pas reconnu l'intervention, c'est qu'ils la fuyaient sans s'en rendre compte, en évitant les problèmes difficiles où ils auraient été exposés à [la renco, biffé] s'y heurter.

Nous pourrions multiplier les exemples, soit dans les deux théories dont nous venons de parler, soit dans d'autres questions accessoirement par le même auteur, [comme celle des séries de Taylor, biffé] y compris celles qui combinent les deux premières (comme l'étude des séries de Taylor dont les coefficients se déduisent les uns des autres par itération). Ceux qui précèdent suffisent à montrer que M. Fatou a été essentiellement un novateur. Comme on a pu le voir, la liste des géomètres qui se sont inspirés de lui est relativement [cet adverbe rajouté au dessus de la ligne] longue et comprend, pour une large part, celle des jeunes chercheurs les plus en vue tant en France qu'à l'étranger.

Une œuvre aussi suggestive a peut-être été trop souvent perdue de vue et mérite tout l'intérêt de ceux qui s'attachent à la Science mathématique dans notre pays.

[signé] J. Hadamard

Two letters from Fatou to Fréchet

[We found two letters from Fatou to Fréchet in the Fréchet collection at the archives of the Academy of Sciences, there may be some others there (this huge collection is only partly catalogued). They are not dated, but their contents clearly reveal their dates (a few days before and the day of the defence of Fatou's thesis). Fréchet and Fatou were both born in 1878 and were more or less contemporaries at the ENS, although Fréchet entered this school only in 1900, after his military service. A student of and closely allied with Hadamard, Fréchet defended his thesis in 1906. Fatou wrote to him about mathematics, at the moment when he defended his own thesis.]

Sunday evening [February 10$^{\text{th}}$ 1907]

My dear friend

We have[18]

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} \\ &= -\frac{x}{2} + \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt\right) dt \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\, dt = -\frac{x}{2} + \int_0^{x/2} \frac{\sin kt}{\sin t}\, dt \end{aligned}$$

$$(k = 2n+1, \quad 0 < x < \pi, \quad \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2})$$

$$\int_0^{x/2} \frac{\sin kt}{\sin t}\, dt = \underbrace{\int_0^{\pi/k}}_{j_0} + \underbrace{\int_{\pi/k}^{2\pi/k}}_{j_1} + \underbrace{\int_{2\pi/k}^{3\pi/k}}_{j_2} + \cdots + \int_{h\pi/k}^{x/2}$$

Making the substitution $\left(x, x + \dfrac{\pi}{k}\right)$, we see that

$$j_r j_{r+1} < 0, \quad |j_r| > |j_{r+1}|$$

Thus $\displaystyle\int_0^{x/2} \frac{\sin kt}{\sin t}\, dt$ lies between j_0 and 0. But we have

$$j_0 = \int_0^{\pi/k} \frac{\sin kt}{\sin t}\, dt < \frac{\pi}{k} \times \text{maximum} \left|\frac{\sin kt}{\sin t}\right|$$

hence $j_0 < \dfrac{\pi}{k} \times k = \pi$. We thus have, for x between 0 and π:

$$S_n(x) > -\frac{x}{2}$$
$$S_n(x) < \pi - \frac{x}{2}$$

It follows that in every case

$$|S_n(x)| < \pi$$

The same thing happens for the Fourier series of any bounded variation function (one considers it as the difference of two non-negative decreasing functions and applies the same reasoning).

All this follows immediately, as you see it, from the classical Dirichlet reasoning.

---

[18] This abrupt beginning shows that this letter answers a question asked by Fréchet, which might have been related to the publication of his Note [Fréchet 1907] on January 21st, and might have arrived together with a reprint of this Note (a Note could be printed very quickly, in the week following its presentation).

This is not without interest, as you seem to believe, and is likely to produce applications, but it is not very new.

I will add that for a Fourier series of any bounded function, we only have the bound

$$|S_n(x)| < C \log n$$

I shall send you without delay a copy of my thesis that I will pass next Thursday[19]. I must point out that it is very badly written and needs to be re-read and corrected.

I recognised recently that one can introduce as a factor of convergence[20] of a Fourier series, instead of r^n (which leads to the Poisson integral), the factor $n^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$.

We have indeed, if:

$$f(x) \ (\textit{bounded} \text{ integrable function}) \\ \sim a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

(the sign $\sim$ meaning that the right hand side is the Fourier series of $f(x)$), then the following propositions hold If $\alpha > 0$, the series

$$\sum \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^\alpha} = \psi(x, \alpha)$$

converges uniformly between 0 and 2π and the same is true of the conjugated series $\sum \dfrac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n^\alpha}$.

We have, secondly, $\lim_{\alpha \to 0} \psi(x, \alpha) = f(x)$, at any point of continuity of $f(x)$, and more generally whenever

$$\lim_{r \to 1} [a_0 + r(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + r^n(a_n \cos nx + b_n \sin nx)] = f(x)$$

thus this second summation process is at least as general as that of Poisson.

It would be interesting to make a complete study of these various convergence factors, namely to find what are the expressions

$$\psi(x, \alpha)$$

enjoying the following properties:

(1) $\psi(x, \alpha_0) = 1$

(2) Any Fourier series $A_0 + A_1 + \cdots + A_N + \cdots$ becomes uniformly convergent if its general term is multiplied by $\psi(n, \alpha)$ (for $\alpha > \alpha_0$ for instance)

(3) $\lim_{\alpha \to \alpha_0} |A_0 + A_1 \psi(1, \alpha) + \cdots + A_n \psi(n, \alpha) + \cdots| = f(x)$ when $f(x)$ is continuous

[19] This confirms that Fatou's thesis was indeed defended on February 14th 1907, which was actually a Thursday... and allows us to date this letter, the previous Sunday being February 10th.

[20] Fatou will explain what this is in the letter.

It seems to me that the choice of these multipliers must be rather arbitrary.

In addition to these small complements to the theory of Fourier series, I have undertaken more extensive research on iteration; but I lack the energy to write it all up, together with some already ancient arithmetical research.

My health has improved during the last few months; I could resume my job at the Observatory. I am happy to see that your class still allows you some time to do some maths.

Yours very sincerely
P. Fatou

Do you sometimes see M. Lebeuf, director of the Observatory? He is an excellent man who could be of some help to you[21].

Mon cher ami

On a:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} \\ &= -\frac{x}{2} + \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt\right) dt \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\, dt = -\frac{x}{2} + \int_0^{x/2} \frac{\sin kt}{\sin t}\, dt \end{aligned}$$

$$(k = 2n+1, \quad 0 < x < \pi, \quad \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2})$$

$$\int_0^{x/2} \frac{\sin kt}{\sin t}\, dt = \underbrace{\int_0^{\pi/k}}_{j_0} + \underbrace{\int_{\pi/k}^{2\pi/k}}_{j_1} + \underbrace{\int_{2\pi/k}^{3\pi/k}}_{j_2} + \cdots + \int_{h\pi/k}^{x/2}$$

En faisant la substitution $\left(x, x + \dfrac{\pi}{k}\right)$, on voit que:

$$j_r j_{r+1} < 0, \quad |j_r| > |j_{r+1}|$$

Donc $\displaystyle\int_0^{x/2} \frac{\sin kt}{\sin t}\, dt$ est compris entre j_0 et 0. Or on a:

$$j_0 = \int_0^{\pi/k} \frac{\sin kt}{\sin t}\, dt < \frac{\pi}{k} \times \text{maximum} \left|\frac{\sin kt}{\sin t}\right|$$

donc $j_0 < \dfrac{\pi}{k} \times k = \pi$. On a donc, pour x compris entre 0 et π:

$$S_n(x) > -\frac{x}{2}$$
$$S_n(x) < \pi - \frac{x}{2}$$

Par suite dans tous les cas

$$|S_n(x)| < \pi$$

[21] Auguste Lebeuf was the director of the Besançon Observatory and Fréchet was teaching at the lycée of Besançon at that time.

La même chose a lieu pour la série de Fourier de toute fonction à variation bornée (on la considérera comme la différence de 2 fonctions positives décroissantes et on appliquera le même raisonnement).

Tout cela découle immédiatement comme tu le vois du raisonnement classique de Dirichlet.

Cela n'est pas sans intérêt, comme tu parais le croire, et susceptible d'applications, mais ce n'est pas très neuf.

J'ajouterai que pour une série de Fourier d'une fonction bornée quelconque, on a seulement la limitation:

$$|S_n(x)| < C \log n$$

Je t'enverrai sans tarder un exemplaire de ma thèse que je passerai jeudi prochain. Je dois te préciser qu'elle est assez mal rédigée et aurait besoin d'être revue et corrigée.

J'ai reconnu dernièrement qu'on pouvait introduire comme facteur de convergence d'une série de Fourier, au lieu de r^n (ce qui ramène à l'intégrale de Poisson), le facteur $n^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$.

On a en effet, si:

$$\begin{aligned} &f(x) \text{ (fonction } \textit{bornée} \text{ intégrable)} \\ &\qquad \sim a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots \end{aligned}$$

(le signe $\sim$ signifiant que le deuxième membre est la série de Fourier de $f(x)$), les propositions suivantes:

Si $\alpha > 0$, la série $\sum \dfrac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^\alpha} = \psi(x, \alpha)$ est uniformément convergente entre 0 et 2π et il en est de même de la série conjuguée $\sum \dfrac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n^\alpha}$.

On a en second lieu $\lim_{\alpha \to 0} \psi(x, \alpha) = f(x)$, en tout point de continuité de $f(x)$ et plus généralement chaque fois que

$$\lim_{r \to 1} [a_0 + r(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)] = f(x)$$

c'àd que ce second procédé de sommation st au moins aussi général que celui de Poisson.

Il serait intéressant de faire une étude complète de ces divers facteurs de convergence c'àd de trouver quelles sont les expressions

$$\psi(x, \alpha)$$

jouissant des propriétés suivantes:

(1) $\psi(x, \alpha_0) = 1$
(2) Toute série de Fourier $A_0 + A_1 + \cdots + A_N + \cdots$ devient uniformément convergente si on multiplie son terme général par $\psi(n, \alpha)$ (pour $\alpha > \alpha_0$ par exemple)
(3) $\lim_{\alpha \to \alpha_0} |A_0 + A_1 \psi(1, \alpha) + \cdots + A_n \psi(n, \alpha) + \cdots| = f(x)$ lorsque $f(x)$ est continue

Il me semble que le choix de ces multiplicateurs doit comporter beaucoup d'arbitraire.

Outre ces petits compléments à la théorie des séries de Fourier j'ai fait des recherches plus étendues sur l'itération; mais il me manque le courage pour rédiger tout cela ainsi que quelques recherches arithmétiques déjà anciennes.

Ma santé s'est améliorée depuis quelques mois; j'ai pu reprendre mon service à l'Observatoire. Je suis heureux de voir que ta classe te laisse le temps de faire encore un peu de math.

Bien cordialement à toi
P. Fatou

Vois-tu quelquefois M. Lebeuf directeur de l'Observatoire? C'est un excellent homme qui pourrait être une ressource pour toi.

Thursday evening [February 14th 1907]

My dear friend

The difficulty with regard to the periodicity[22] of $f(x)$, to prove that

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} f(t)\,dt$$

stays a bounded function when f has bounded variation, is not very considerable. There is no difficulty indeed except for the part of the integral related to the interval $(x-h, x+h)$, h having any finite value: $h = \dfrac{\pi}{10}$ for instance, since, for all t outside this interval the integrand will be $< \left|\dfrac{f(t)}{\sin\frac{\pi}{10}}\right|$.

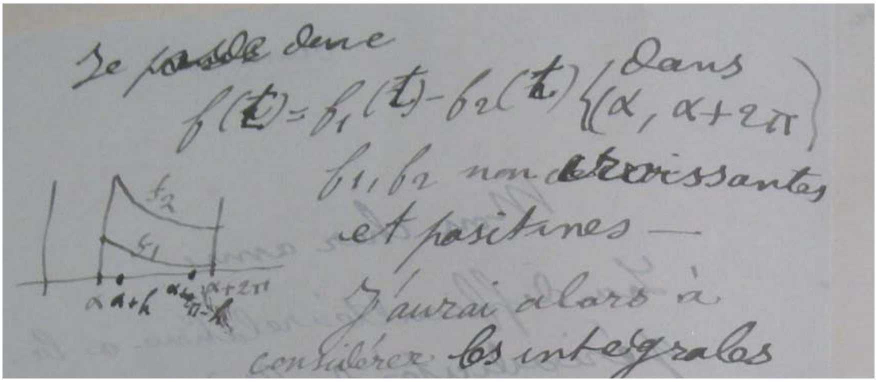

Fig. A.1. The February 14th letter

[22] The Sunday evening letter must have been sent on Monday, and have arrived in Besançon on Tuesday, so that Fréchet could raise another question in a letter which arrived early enough for Fatou to answer it on Thursday evening.

[figure] I thus put $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$ (in $(\alpha, \alpha + \pi)$) f_1, f_2 non-increasing and non-negative. I will then have to consider the integrals

$$\int_{x-h}^{x+h} \frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}} f_1(t)\,dt \qquad \int_{x-h}^{x+h} \cdots f_2(t)\,dt$$

to which the Dirichlet reasoning will apply; one will have nevertheless to assume x lies between $\alpha + h = \alpha + \frac{\pi}{10}$ and $\alpha + 2\pi - h = \alpha + 2\pi - \frac{\pi}{10}$. But this is of no importance since α is arbitrary, and for the values of x equal (mod. 2π) to the values we just excluded it is enough to take another value of α, for instance: $\alpha + \pi$ (perhaps with other functions f_1', f_2').

I would be pushed to give you accurate bibliographic information: this is in some sense implicitly in Dirichlet and in all those who studied Fourier series after him, but I don't remember having seen the remark explicitly in the books I consulted. This is neither in my thesis nor in Lebesgue's lessons. But for things that are basically so classical, it is not necessary to give so much information, you can simply say that it follows from Dirichlet's classical analysis that, etc. adding, if you want, that you owe this remark to me, but do not insist, because this is easy and besides I am not sure I have the priority[23].

I greatly advise you to study the essential things in the theory of Fourier series. This will not be very difficult for you and it is always dangerous to use results without knowing where they come from, since one then risks interpreting them in a wrong way.

You will find what is most important to know in the analysis treatises of Jordan or Picard. If you want to study things more deeply, there are Lebesgue's lessons.

I defended my thesis this morning in front of a most benevolent committee[24]; happily it is finished.

I shall always be very happy to give you information in the seldom matters I am competent; you can ask me without hesitating.

Yours very sincerely
P. Fatou

Fejér's theorem is indeed very elegant, it is superior to the other summation processes and gives only finite Fourier sequences. But it does not make such considerable progress as might one think. Besides, the summability by some process is always far from ordinary convergence.

---

23 In the Note [Fréchet 1907], as in the article [Fréchet 1908] that will follow, the question is to approximate a continuous function by a (finite) trigonometric sum, this raising the question of the convergence of the sequence of functions thus defined. In the article [Fréchet 1908], which is subsequent to the letters we present here, the questions raised are not mentioned and neither Fatou, nor even Dirichlet, appear (but Fréchet quotes [Lebesgue 1906]).

24 Let us recall that the members of the committee were Appell, Painlevé and Borel. The defences at that time seem to have been less festive than they are today... Fatou defended his thesis, went back home, and answered a mathematical letter.

Mon cher ami

La difficulté relative à la périodicité de $f(x)$, pour démontrer que

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} f(t)\, dt$$

reste bornée si f est à variations bornées n'est pas bien considérable. En effet il n'y a de difficulté que pour la partie de l'intégrale relative à l'intervalle $(x-h, x+h)$, h ayant une valeur finie quelconque: $h = \dfrac{\pi}{10}$ par exemple, car pour t extérieur à cet intervalle la fonction à intégrer sera $<$ que $\left|\dfrac{f(t)}{\sin\frac{\pi}{10}}\right|$.

[figure] Je pose donc $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$ (dans $(\alpha, \alpha+\pi)$) f_1, f_2 non croissantes et positives. J'aurai alors à considérer les intégrales

$$\int_{x-h}^{x+h} \frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}} f_1(t)\, dt \qquad \int_{x-h}^{x+h} \cdots f_2(t)\, dt$$

auxquelles s'appliqueront [*sic*] le raisonnement de Dirichlet; on devra toutefois supposer x compris entre $\alpha + h = \alpha + \frac{\pi}{10}$ et $\alpha + 2\pi - h = \alpha + 2\pi - \frac{\pi}{10}$. Mais cela n'a aucune importance puisque α est arbitraire, et pour les valeurs de x congrues (mod. 2π) aux valeurs que nous venons d'exclure il suffira de prendre une autre valeur de α, par exemple: $\alpha + \pi$ (éventuellement d'autres fonctions f_1', f_2').

Je serais embarrassé de te donner un renseignement bibliographique exact: cela se trouve en quelque sorte implicitement dans Dirichlet et dans tous ceux qui après lui ont étudié les séries de Fourier, mais je ne me rappelle pas avoir vu cette remarque exprimée explicitement dans les ouvrages que j'ai consultés. Il n'en est pas question dans ma thèse ni dans les Leçons de Lebesgue. Mais pour des choses aussi classiques dans le fond, il n'est pas nécessaire de donner tant de renseignements, tu peux dire simplement qu'il résulte de l'analyse classique de Dirichlet que etc. en ajoutant si tu y tiens, que tu me dois cette remarque, mais sans insister car cela est facile et je ne suis d'ailleurs pas certain d'avoir la priorité.

Je te conseille vivement d'étudier les choses essentielles de la théorie des séries de Fourier, cela ne te demandera pas beaucoup de peine et il est toujours dangereux d'utiliser des résultats sans savoir d'où ils viennent, car on risque de les interpréter de travers.

Tu trouveras ce qu'il y a de plus important à savoir dans les traités d'analyse de Jordan ou Picard. Si tu veux étudier les choses plus à fond, il y a les leçons de Lebesgue.

J'ai soutenu ma thèse ce matin devant un jury des plus bienveillants; heureux d'en avoir fini.

Je serai toujours très heureux de te donner des renseignements dans les rares matières où j'ai quelque compétence; tu peux m'en demander sans hésiter.

Bien cordialement à toi
P. Fatou

Le théorème de Féjer [*sic*] est en effet très élégant, il a la supériorité sur les autres procédés de sommation de ne donner lieu qu'à des suites finies de Fourier, mais cela ne constitue pas un progrès si considérable que l'on pourrait le croire. D'ailleurs il y a toujours loin de la sommabilité par un procédé quelconque à la convergence ordinaire.

Letters from Fatou to Montel

[Montel kept sixteen letters or cards, plus a fragment of a letter, all written by Fatou, and the draft of a letter he wrote him. Most of Fatou's letters are not dated. Sometimes Montel added a date. To fix the chronology of these letters, we only have their content and the nature of the paper Fatou used: one can imagine Fatou finishing his box of blue notepaper before he looked for some other supply...

These are friendly letters, in which it is quite clear that what interests Fatou is the mathematics: he suggests research topics to his friend, criticises such and such a detail in the proofs of his articles, and shows himself fanciful and full of humour.]

Paris, November 29th 1906

My dear friend,

I went this morning to the secretary's office at the Faculty of sciences, but Guillet told me that Painlevé had not brought back your manuscript; the truth is that there is quite some disorder in his office and that he had to move several theses which were piled up higgledy-piggledy on his desk before he gave me the assurance that it was still in Painlevé's hands. You had better speak to Painlevé to find out what is happening. I must tell you however that your thesis was not, on the register of the secretary, among those which have been brought back.

As for me, I am not yet sure of the date of my defence, since I have not received proofs since September. It has been going on so long that I have grown tired of thinking about it, and this wait does not perturb me at all.

I continue working from time to time on iteration. Incidentally, I obtained a result on Taylor series which I communicated to the Société mathématique the other day and which Hadamard liked[25]. Here is what it is about.

Assume a Taylor series

$$(1) \qquad u + u_1 x + \cdots + u_n x^n + \cdots$$

the coefficients of which are determined by the induction law

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(f an analytic function). Without being more specific we cannot say anything, since any Taylor series can be obtained this way.

But let us assume that the substitution $(u \sim f(u))$ has a regular limit point, that is, a point which is a root α of the equation

$$u - f(u) = 0 \text{ with } |f'(\alpha)| < 1$$

[25] See note 88 in chapter V.

(f holomorphic at α). If the initial value u lies in the domain of convergence relative to the point α, the series (1) represents a meromorphic function which is the *quotient of two entire functions of genus zero and order zero*, the entire function in the denominator being

$$(q = f'(\alpha)) \qquad (1-x)(1-qx)(1-q^2x)\cdots(1-q^nx)\cdots$$

a function that we meet in the theory of elliptic functions.

This result is rather curious, as you see, as it gives a precise result on the analytic extension of a large class of Taylor series given by the law of their coefficients, this law being in general not analytic (that is, not of the form $a_n = \varphi(n)$ where φ is a given analytic function.

I regularly attend Poincaré's course, which is rather interesting: he deals with the work some astronomers did to eliminate certain discrepancies between observations and tables and reviews the ways that have been tried to modify Newton's law; at the end of his course, he will speak of the application of astronomy to the mechanics of the electrons. I am very curious[26] to know what he will say on this completely new subject.

I thank you very much for the trouble you went to to give my sister the information about Nice which will be very useful for her; she asked me herself to thank you, and I would have done so earlier if my good intentions had not been so often wasted by my epistolary laziness.

If you want me to go and see Painlevé for you, send me a note.

Most sincerely yours, and see you soon

[signed] P. Fatou

Mon cher ami,

Je suis passé ce matin au secrétariat de la Faculté des sciences, mais Guillet m'a déclaré que ton manuscrit n'avait pas été rapporté par Painlevé; il est vrai qu'il y a pas mal de désordre dans son cabinet et qu'il a remué un certain nombre de thèses entassées pêle-mêle sur sa table avant de me donner l'assurance qu'il était encore entre les mains de ce dernier. Tu feras donc bien de t'adresser à Painlevé pour savoir ce qui en est. Je dois dire cependant que ta thèse n'était pas marquée sur le registre du secrétariat, parmi celles qui ont été rapportées.

Pour moi, je ne suis pas encore fixé sur la date de ma soutenance, n'ayant pas reçu d'épreuves depuis le mois de septembre. Il y a si longtemps que cela dure que j'ai fini par me lasser d'y penser et cette attente ne m'agite pas du tout.

Je continue de travailler un peu de temps en temps sur l'itération. J'ai obtenu incidemment un résultat sur les séries de Taylor que j'ai communiqué l'autre jour à la Société mathématique et qui a plu à Hadamard. Voilà de quoi il s'agit. Suppose une série de Taylor

$$(1) \qquad u + u_1x + \cdots + u_nx^n + \cdots$$

[26] The curious reader may look at [Poincaré 1905].

dont les coefficients sont déterminés par la loi de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(f fonction analytique). Si l'on ne précise pas davantage, on ne peut rien dire car toute série de Taylor s'obtient de cette façon.

Mais supposons que la substitution ($u \sim f(u)$) possède un point limite régulier c'àd un point racine α de l'équation

$$u - f(u) = 0 \text{ avec } \left|f'(\alpha)\right| < 1$$

(f holomorphe en α). Si la valeur initiale u se trouve dans le domaine de convergence relatif au point α, la série (1) représente une fonction méromorphe qui est le *quotient de 2 fonctions entières de genre zéro et d'ordre zéro*, la fonction entière du dénominateur étant

$$(q = f'(\alpha)) \qquad (1-x)(1-qx)(1-q^2x)\cdots(1-q^nx)\cdots$$

fonction que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques.

Ce résultat est assez curieux, comme tu le vois, il donne un résultat précis sur le prolongement analytique d'une classe étendue de séries de Taylor données par la loi de leurs coefficients, cette loi n'étant pas en général analytique (c'àd n'étant pas de la forme $a_n = \varphi(n)$ où φ est une fonction analytique donnée).

Je suis régulièrement le cours de Poincaré qui est assez intéressant: il traite des travaux des astronomers entrepris pour faire disparaître certaines divergences entre les observateurs et les tables, et passe en revue les modifications que l'on a essayées [*sic*] d'apporter à la loi de Newton; à la fin de son cours, il parlera de l'application à l'astronomie de la mécanique des électrons, je serai curieux de savoir ce qu'il fera sur ce sujet tout à fait nouveau.

Je te remercie beaucoup de la peine que tu t'es donnée pour fournir à ma sœur des renseignements sur Nice qui lui seront fort utiles; elle m'a priée [*sic*] elle-même de te remercier ce que j'aurais fait plutôt [*sic*] si mes bonnes intentions n'étaient si souvent gâtées par ma flemme épistolaire.

Si tu veux que j'aille trouver Painlevé pour toi, envoie-moi un mot.

Bien cordialement à toi et à bientôt

[signé] P. Fatou

Saturday, February 13$^{\text{th}}$ [1915]

[The date 13/2 was added, in pencil, by Montel. This letter is about a paper that was published in 1912. The years after 1912 in which February 13$^{\text{th}}$ was a Saturday are 1915 and 1926. The second one seems to be too late: in 1926, Fatou had certainly read this article a long time since. In this letter, we see Fatou discuss the singular lines of the Kleinian functions—between the Note [Fatou 1906d] and the memoir on iteration.]

My dear friend

In thanking you for your memoir which I read with much interest, I am compelled to point out to you some reasoning that seems faulty to me, though this has only minor importance from your point of view, since you are able to prove much more general propositions in an entirely correct way, but my attention was drawn to this for some reasons I will indicate.

You consider (p. 495)[27] the function

$$\varphi(x) = \log \frac{f(x) - a}{f(x) - b}$$

$f(x)$ not taking the values of a linear continuum with extremities a, b and you conclude that the imaginary part of $\varphi(x)$ varies between -3π and $+3\pi$. Now, your reasoning is obviously wrong if you think of *any* linear continuum. Indeed assume that the cut ab (or 0∞) has the shape of a spiral at one of its ends; to go from m to m' *without crossing the cut*, you have to turn around 0 a certain number of times which is larger and larger as m is closer and closer to 0 and the argument varies by $2k\pi$, k being able to increase indefinitely.[figure]

Now you can imagine linear continuums having a dense set of asymptotic points (singular lines of Kleinian functions).

It is thus unwise to apply this kind of reasoning if one does not assume the continuum is more or less rectilinear.

Now here is what led me to this criticism: I tried to apply your transformation to generalise the properties I obtained in my thesis for analytic functions that are bounded in a circle and in this story the modular function gives no result, while the logarithm would work very well, without the difficulty I have pointed out to you. I have not yet found a way of coping with this.

Tell me if you agree with me, and if you can see a way of determining from a function that does not take the values of a linear continuum another one which is bounded using only simple transformations.

Yours sincerely

[signed] P. Fatou

[Note added by Montel on the letter: this is a curve and not a linear continuum. On a curve, one should replace $-3\pi, 3\pi$ by $-k\pi, k\pi$; or take for the curve two sufficiently close points (a', b') in place of the points a and b.]

Mon cher ami

En te remerciant de ton mémoire que j'ai parcouru avec beaucoup d'intérêt, je suis obligé de te signaler un raisonnement qui me paraît défectueux, ce qui n'a d'ailleurs qu'une importance minime à ton point de vue, puisque tu parviens à démontrer des propositions beaucoup plus générales par une voie tout à fait correcte, mais mon attention s'est portée là-dessus pour des raisons que je t'indiquerai.

Tu considères (p. 495) la fonction

$$\varphi(x) = \log \frac{f(x) - a}{f(x) - b}$$

[27] The memoir in question is [Montel 1912].

$f(x)$ ne prenant pas les valeurs d'un continu linéaire d'extrémités a, b et tu conclus que la partie imaginaire de $\varphi(x)$ varie entre -3π et $+3\pi$. Or ton raisonnement est évidemment inexact si tu envisages un continu linéaire *quelconque*. Suppose en effet que la coupure ab (ou 0∞) ait la forme d'une spirale à l'une de ses extrémités; pour aller de m en m' *sans traverser la coupure*, tu dois tourner autour de 0 un certain nombre de fois d'autant plus grand que m est plus rapproché de 0 et l'argument varie de $2k\pi$, k pouvant croître indéfiniment.[figure]

Or tu peux imaginer des continus linéaires ayant un ensemble dense de points asymptotes (lignes singulières des fonctions kleinéennes).

Il est donc imprudent d'appliquer ce mode de raisonnement si l'on ne suppose pas que le continu est à peu près rectiligne.

Voici maintenant ce qui m'a conduit à cette critique: j'ai essayé d'appliquer ta transformation pour généraliser les propriétés que j'ai obtenues dans ma thèse pour les fonctions analytiques bornées dans un cercle et pour cette histoire là la fonction modulaire ne donne aucun résultat, tandis que le logarithme marcherait très bien sans la difficulté que je t'ai signalée. Je n'ai pas encore trouvé le moyen de m'en tirer.

Dis-moi si tu es bien de mon avis, et si tu vois le moyen de déduire d'une fonction qui ne prend pas les valeurs d'un continu linéaire une autre qui soit bornée en n'employant que des transformations simples.

Bien cordialement à toi

[signé] P. Fatou

[Note ajoutée par Montel sur la lettre: il s'agit d'une courbe & non d'un continu linéaire. Il faut, même pour une courbe, remplacer $-3\pi, 3\pi$ par $-k\pi, k\pi$; ou bien prendre pour la courbe deux points assez rapprochés (a', b') remplaçant les points a et b.]

Probably the end of 1919

My dear Montel,

I willingly accept the solution you suggest, because I also believe that it is better to start this publication straight away. However I will try to give you Ch. VI and VII shortly, even if I must then give you some additional notes later on.

I noticed that Julia has started the publication of his memoir on entire functions[28] and that he has announced the one on iteration; the latter has been with the printer for almost a year; I think he had to revise it a lot, since in the past I mentioned to him some mistakes in his C.R. Notes. It is not very easy to finalise all this and he must have understood that, despite his haste to publish.

[28] Julia's memoir on entire functions consisted of three articles [Julia 1919c ; 1920b ; 1921a] that appeared in the Annales de l'École Normale Supérieure. According to what is written on the second of these three papers, the first one (the one Fatou is speaking of here) is dated April 1919.

I send you a letter of Lémeray which I am very pushed to answer, despite my title of archivist[29].

Yours sincerely

[signed] P. Fatou

Mon cher Montel,

J'accepte volontiers la solution que tu me proposes, car je crois aussi qu'il vaut mieux commencer dès maintenant cette publication. Je tâcherai cependant de te remettre les ch. VI et VII dans un délai assez rapproché, quitte à te donner plus tard quelques notes supplémentaires.

J'ai vu que Julia a commencé la publication de son mémoire sur les fonctions entières et qu'il annonce celui relatif à l'itération; voilà près d'un an que ce dernier est à l'impression; je pense qu'il a eu à le remanier pas mal, car je lui ai autrefois signalé des fautes qui apparaissaient dans ses notes des C.R. Tout cela n'est pas très facile à mettre au point et il dû s'en apercevoir malgré sa hâte de publier.

Je te communique une lettre de Lémeray à laquelle je suis fort embarrassé de répondre, malgré mon titre d'archiviste.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Tuesday [Jan. 6th 1920]

[The date is in Montel's handwriting. In writing this letter, Fatou uses a blue notepaper for the first time (a Christmas present?).]

My dear Montel

If instead of making the substitutions of the group $(z|k^{\pm n}z)$ act on z, you use the substitutions $(z|z + p\omega + q\omega')$ where p and q denote all the integers and (ω, ω') any two numbers, and you consider the functions

$$F_{pq}(z) = F(z + p\omega + q\omega')$$

where F is an entire or a meromorphic function, you must obtain new and interesting results. It seems that Julia did not think of that, otherwise he would have published it urbi et orbi[30]. As for me, I thought of this for one or two days, but I do not want, after the effort I just made, to become absorbed in work that demands much thought. You will do what you like but, being familiar with that kind of subject, you could, if you had some time left to conduct this kind of research, obtain some interesting things.

[29] We have seen that Fatou was the archivist of the SMF between 1918 and 1921. The fact that Julia's paper on iteration had been with the printer for early a year dates this letter, as no earlier than the end of 1919.

[30] Fatou suggested this question, on which Julia did not publish, to Montel, but it would seemingly appear in the course on uniform functions [Julia 1924a].

1) There exist functions for which the $F_{pq}(z)$ constitute a normal family in any bounded domain, for all ω and ω' (there is no loss of generality if we assume ω and ω' to be non-zero and ω/ω' imaginary).

Examples: among the meromorphic functions the elliptic functions and constant coefficient linear combinations of elliptic functions with distinct periods or not.

Among the entire functions, e^z and the periodic or quasi-periodic functions represented by a *finite* expansion $\sum Ae^{\alpha z}$ where the α are real.

One can easily find necessary and sufficient conditions for a function to be in this category: for instance, if $z, z', z'' \dots$ tend to infinity and if $F(z), F(z'), F(z'') \dots$ constitute a bounded sequence, this should also hold in circles of constant radii with centres at $z, z' \dots$ both for the function itself and for its derivatives; if, on the contrary, the numbers $F(z^\nu)$ tend to infinity and $\left(\frac{1}{F(z)}\right)^{(q)}$ to zero in the same sequence of circles; etc.

It seems more difficult to find sufficient conditions. I do not know any other example apart from the ones mentioned above (probably the Painlevé Boutroux functions: $y'' = 6y^2 + x$ —one should look closer at this).

The limit functions Φ of the F_{pq} are themselves meromorphic or entire functions that can be reduced to constants, among which are always the asymptotic values, especially infinity if $F(z)$ is entire; in the last case there are always infinitely many distinct limit functions. I think that in all cases the limit functions cannot all be constant but I don't know how to prove it.

2) If a function does not fall into the previous category, there exists at least one pair of numbers (ω, ω') and at most two [?] and a domain D where the functions F_{pq} do not constitute a normal sequence, hence a point z_0 where the sequence is not normal; the function F thus takes all values except at most two in circles of constant radius and as small as we want having for centres the points equal to z_0 (mod ω, ω').

It seems that almost all functions fall into this category; examples e^{z^2}, $z + e^z$, $\sin(z^2)/z$ (one sees indeed that either $F'(z)$ is not bounded on the set of roots of $F(z) = a$, or that $F'(z)$ does not tend to zero on an asymptotic path of finite determination, etc.).

Another example: the entire periodic functions represented by an *infinite* expansion

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{2ni\pi z/\omega}$$

for, putting $e^{2i\pi z/\omega} = y$, we obtain a Laurent series $\Phi(y) = \sum A_n y^n$ which represents a function with the two essential singular points 0 and ∞. Taking for ω the previous period and a number $\omega' = i\omega$ for instance, one is left with proving that the functions $\Phi(k^q y)$ do not constitute a normal sequence in a suitable annulus, which is precisely your theorem. If one takes the meromor-

phic or entire functions that satisfy the functional equation

$$\varphi(u+\omega) = R(\varphi(u)), \quad (R \text{ rational})$$

I proved in my memoir that they are continuous at infinity when one excludes a certain infinitely long half-strip from the plane; inside this half-strip, there exist others, as thin as we wish where $\varphi(u)$ takes all values except perhaps one. [The letter contains a picture of the strip.] The sequence $\varphi(u+p\omega+q\omega')$ is thus normal at some points and not at some others.

If you want a function such that no subsequence of the functions F_{pq} is normal at any point in the plane, this is even easier. Ex: I take the function that has zeros

$$z_{kn} = \sqrt{n}\, e^{2ik\pi/n}$$

and poles

$$\varpi_{kn} = \sqrt{n}\, e^{\frac{2ik\pi}{n}+\frac{\pi}{n}}$$

$(k = 0, 1, 2 \ldots n-1,\ n = 2, 3, \ldots \infty)$. Since $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ along with $|z_{kn} - \varpi_{kn}|$ you see that any domain that is congruent to a given domain and that goes to infinity tends to contain more and more zeros and poles which have all points of the domain as limit points.

All this is easy. But it is the functions in the 1$^{\text{st}}$ category that we ought to characterise better to obtain a general theory of quasi-biperiodic functions.

I gave my memoir (Ch VI and VII) to your janitor on Friday[31]. I hope it is not lost.

Yours sincerely

[signed] P. Fatou

One could perhaps try a classification of some functions with a limited domain of existence and defined, e.g. in a circle, by means of the functions $F(S(z))$, the $S(z)$ being the substitutions of a Fuchsian group.

Your idea of replacing the study of a function by that of a sequence of functions obtained by making the substitutions of a linear group act on the variable is perhaps one of the happiest you had. You should take advantage of it.

Mon cher Montel

Si au lieu d'effectuer sur z les substitutions du groupe $(z|k^{\pm n}z)$ tu effectues les substitutions $(z|z+p\omega+q\omega')$ où p et q désignent tous les entiers et (ω, ω') deux nombres quelconques, et que tu considères les fonctions

$$F_{pq}(z) = F(z+p\omega+q\omega')$$

[31] This letter was thus written just after Fatou had sent in his third memoir on iteration. This justifies the allusion to the effort he had just made, at the beginning of the letter.

où F est une fonction entière ou méromorphe, tu dois parvenir à des résultats nouveaux et intéressants. Il semble que Julia n'y ait pas songé, car il n'aurait pas manqué de le publier urbi et orbi. Quant à moi, j'ai pensé à cela depuis un ou deux jours, mais je ne désire pas après l'effort que je viens de faire m'absorber de nouveau dans un travail qui demanderait beaucoup de réflexion. Je te transmets donc les quelques remarques que j'ai faites à ce sujet. Tu en feras ce que tu voudras, mais étant familier avec ces sortes de sujets, tu pourrais si tu avais quelque loisir pour te livrer à des recherches de ce genre, en tirer des choses intéressantes.

1) Il existe des fonctions pour lesquelles les $F_{pq}(z)$ forment une famille normale dans tout domaine borné quels que soient les ω et ω' (on ne diminue pas la généralité en supposant ω et ω' non nuls et ω/ω' imaginaire).

Exemples: parmi les fonctions méromorphes les fonctions elliptiques et les combinaisons linéaires à coefficients constants de fonctions elliptiques à périodes distinctes ou non.

Parmi les fonctions entières e^z et les fonctions périodiques ou quasi périodiques représentées par le développement *limité* $\sum Ae^{\alpha z}$ où les α sont réels.

On trouve facilement des conditions nécessaires pour qu'une fonction rentre dans cette catégorie: par exemple, si $z, z', z'' \ldots$ tendent vers l'infini et si $F(z), F(z'), F(z'') \ldots$ forme une suite bornée, il doit en être de même dans des cercles de rayon constant ayant pour centres $z, z' \ldots$ tant pour la fonction elle-même que pour ses dérivées. Si au contraire les nombres $F(z^\nu)$ tendent vers l'infini et $\left(\frac{1}{F(z)}\right)^{(q)}$ vers zéro dans la même suite de cercles. Etc.

Il paraît plus difficile de trouver des conditions suffisantes. Je ne connais pas d'autres exemples que ceux mentionnés plus haut (probablement les fonctions de Painlevé Boutroux: $y'' = 6y^2 + x$ — il faudrait voir la chose de près).

Les fonctions limites Φ des F_{pq} sont elles-mêmes des fonctions méromorphes ou entières pouvant se réduire à des constantes, parmi lesquelles il y a toujours les valeurs asymptotiques, notamment l'infini si $F(z)$ est entière; dans ce dernier cas il y a toujours une infinité de fonctions limites distinctes. Je pense que dans tous les cas les fonctions limites ne peuvent pas être toutes des constantes mais je ne sais pas le démontrer.

2) Si une fonction ne rentre pas dans la catégorie précédente, il existe au moins un couple de nombres (ω, ω') et au plus deux nuls [?] et un domaine D où les fonctions F_{pq} ne forment pas une suite normale, donc un point z_0 où la suite n'est pas normale; la fonction F prend ainsi toutes les valeurs sauf deux au plus dans des cercles de rayon constant et aussi petit qu'on le veut ayant pour centres les points congrus à z_0 (mod ω, ω').

Il semble que presque toutes les fonctions entrent dans cette catégorie; exemples e^{z^2}, $z + e^z$, $\sin(z^2)/z$ (on voit en effet ou bien que $F'(z)$ ne reste pas bornée dans l'ensemble des points racines de $F(z) = a$, ou que $F'(z)$ ne tend pas vers zéro sur un chemin asymptotique de détermination finie etc)

Autre exemple: les fonctions périodiques entières représentées par un développement *illimité*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{2ni\pi z/\omega}$$

car en posant $e^{2i\pi z/\omega} = y$, on obtient une série de Laurent $\Phi(y) = \sum A_n y^n$ qui représente une fonction avec les deux points singuliers essentiels 0 et ∞. En prenant pour ω la période précédente et un nombre $\omega' = i\omega$ p. ex on est ramené à prouver que les fonctions $\Phi(k^q y)$ ne forment pas une suite normale dans une couronne convenable, ce qui est précisément ton théorème. Si l'on prend les fonctions méromorphes ou entières qui vérifient l'équation fonctionnelle

$$\varphi(u+\omega) = R(\varphi(u)), \quad (R \text{ rationnelle})$$

j'ai démontré dans mon mémoire qu'elles sont continues à l'infini lorsque l'on supprime du plan une certaine demi-bande de longueur infinie; à l'intérieur de cette demi-bande il en existe d'autres aussi minces que l'on veut où $\varphi(u)$ prend toutes les valeurs sauf une au plus. [la lettre contient un dessin de la bande]. La suite $\varphi(u + p\omega + q\omega')$ est donc normale en certains points et pas en d'autres.

Si tu veux une fonction telle qu'aucune suite extraite des fonctions F_{pq} ne soit normale en aucun point du plan, c'est encore plus facile. Ex: je prends la fonction qui a pour zéros

$$z_{kn} = \sqrt{n}\, e^{2ik\pi/n}$$

et pour pôles

$$\varpi_{kn} = \sqrt{n}\, e^{\frac{2ik\pi}{n} + \frac{\pi}{n}}$$

($k = 0, 1, 2 \dots n-1$, $n = 2, 3, \dots \infty$). Comme $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ ainsi que $|z_{kn} - \varpi_{kn}|$ tu vois que tout domaine congruent à un domaine donné et qui s'éloigne à l'infini finit par comprendre des zéros et des pôles de plus en plus nombreux ayant pour points limites tous les points du domaine.

Tout cela est facile. Mais ce sont les fonctions de la 1$^{\text{re}}$ catégorie qu'il faudrait arriver à caractériser un peu mieux de manière à obtenir ainsi une théorie générale des fonctions quasi doublement périodiques.

J'ai déposé mon mémoire (ch VI et VII) chez ta concierge vendredi dernier. J'espère qu'il n'est pas perdu.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

On pourrait peut-être aussi essayer une classification de certaines fonctions à domaine d'existence limité et définies par ex. dans un cercle au moyen des fonctions $F(S(z))$, les $S(z)$ étant les substitutions d'un groupe fuchsien.

Ton idée de remplacer l'étude d'une fonction par celle d'une suite de fonctions obtenues par les substitutions d'un groupe linéaire effectuées sur la variable est peut-être l'une des plus heureuses que tu aies eue [*sic*]. Tu devrais en profiter.

Sunday [21$^{\text{st}}$?] [1920?]

My dear Montel

I will answer your various questions. Concerning my note on invariant functions, it seems to me better that it appears in the Bulletin[32] for 1921.

[32] This was the short article [Fatou 1922f], which would indeed appear in the *Bulletin*, but in 1922.

I do not know the admiral Thomine and never heard my brother speak of him; I thus assume that they don't know each other very well. As however my brother is in Berlin and communication with him is not very fast, I would rather try to have my cousin the captain whose son entered the Navy school this year, take care of you[33].

I don't know Hamy much, I have exchanged about ten words with him in the nineteen years I have been at the Observatory[34]. As he is rather a "recluse", I don't really see what could influence him. Simonin knows him better than I do, but Simonin...

I thought of the question of the Collège de France, which will probably be raised soon because, according to what Julia told me, Humbert who takes up his course again this year remains very tired; he will try to give his course three times and to rest one month after every month of the course. Here is the hypothesis I contemplate; Humbert being no more able, after a time, to give his course, he will be replaced by Julia and will wait, before retiring, until the latter is old enough to succeed him. Julia's candidacy will be supported by Humbert, by Picard, by all representatives at the academy of the "right-thinking" and by some others. In these conditions, only the candidacy of Lebesgue could prevent that of Julia, and even this is not certain, because Julia's quoted value will only increase and become more attractive over the next few years. My own candidacy, even with Hadamard's support, of which I am not certain, would only have an infinitesimal chance, especially with the other rather scheming candidates whom you know and who will certainly apply.

Since, on the other hand, apart from these considerations, Lebesgue in this chair would be the *right man in the right place*[35], there is no sufficient reason for dissuading him from being candidate[36].

As for me, having resigned myself never to get anywhere, I shall continue quietly in my job as a subordinate of Simonin, waiting to become that of Baillaud's son; this is not glorious, but my philosophy is satisfied with it and it will not prevent me from continuing to do maths as much as I can. I am nonetheless grateful for the efforts you make to find me a better position.

A few words now about mathematical questions that, I think, interest you; I discovered in a set of booklets received this year from Scandinavia a paper by Lindelöf "On the conformal mapping of a simply connected area to a circle" (excerpt of the proceedings of the 1916 Stockholm congress) which is much clearer than the memoir of the same author in the Acta Societatis

[33] It would be pointless to pretend to be able to find one's way among the captains of vessels and other Navy officers on the Fatou family tree. Like Julia, Montel was examiner at the Navy school.

[34] Fatou being at the Observatory since 1901, this gives the letter the date 1920, beginning of 1921.

[35] In English in the original.

[36] As we know, after Humbert's death in 1921, this was indeed Lebesgue who would be elected to replace him.

Fennica. The interior problem is treated in quite a simple and elegant way, by simplifying a method of Carathéodory. As you have an expository talk to give on this question, you would probably be well-advised to look at this booklet that I am making available to you in case you don't have it.

Another thing in a similar vein. You might remember a Note of Denjoy [Montel added in pencil in the margin (1918 CR)] in which he states, generalising a little and without quoting me, one of my theorems on the limit values of analytic functions on a contour. Well, this generalisation itself can be found in a communication of M. Riesz at the same Congress (1916) "Über die Randeverte einer analytischer Funktion" that also contains other interesting things and that I also recommend to you[37].

Yours sincerely

[signed] P. Fatou

I see nothing against your telling my thoughts to Lebesgue

Mon cher Montel

Je réponds à tes différentes questions. Pour ma note sur les fonctions invariantes, il me paraît préférable qu'elle paraisse dans le pour 1921.

Je ne connais pas l'amiral Thomine et n'ai jamais entendu parler de lui par mon frère; je suppose donc qu'ils ne se connaissent pas beaucoup. Comme d'ailleurs mon frère est à Berlin et que les communications avec lui ne sont pas rapides, je verrai plutôt si je peux te faire recommander par mon cousin le capitaine de vaisseau dont tu as reçu le fils à l'école navale cette année.

Je ne connais guère Hamy avec qui j'ai échangé une dizaine de mots en tout depuis 19 ans que je suis à l'Observatoire. Comme c'est plutôt un "sauvage", je ne vois pas trop qui pourrait avoir de l'influence sur lui. Simonin le connaît mieux que moi, mais Simonin...

J'ai réfléchi de mon côté à la question du Collège de France, qui se posera probablement dans peu de temps car, d'après ce que m'a dit Julia, Humbert qui reprend son cours cette année reste toujours très fatigué; il va essayer de faire son cours en trois fois en se reposant un mois après un mois de cours. Voici l'hypothèse très vraisemblable que j'envisage; Humbert ne pouvant plus, d'ici quelque temps, continuer son cours se fera remplacer par Julia et attendra pour prendre sa retraite que ce dernier ait l'âge canonique pour lui succéder. La candidature de Julia sera appuyée par Humbert, par Picard, par tous les représentants à l'Institut de la "bienpensance" et quelques autres encore. Dans ces conditions, seule la candidature de Lebesgue pourrait faire échec à celle de Julia, et ce n'est même pas certain, car la cote de Julia ne fera que croître et embellir pendant quelques années. Ma candidature à moi, même avec l'appui de Hadamard dont je ne suis pas sûr, n'aurait que

[37] In other words, Fatou realises in 1920 that a result of Denjoy published in the *Comptes rendus* in 1918 (this is [Denjoy 1918]) was already in an article by Riesz in 1916 (this is [Riesz & Riesz 1916]): we mentioned in Chapter II, the speed of communication via the *Comptes rendus*; other foreign publications may have taken more time to reach French mathematicians.

des chances infimes, surtout avec les autres candidats assez intrigants que tu connais qui se présenteront certainement.

Comme d'autre part, ces considérations mises à part, Lebesgue serait à cette chaire le right man dans le right place, il n'y a aucune raison suffisante pour le dissuader d'être candidat.

Quant à moi qui suis résigné d'avance à ne jamais arriver, je continuerai tranquillement mon métier de sous-ordre de Simonin en attendant que ce soit du fils Baillaud; c'est peu glorieux, mais ma philosophie s'en accomode [*sic*], et cela ne m'empêchera pas de continuer à faire des math. dans la mesure de mes moyens. Je ne t'en suis pas moins reconnaissant de l'effort que tu fais pour me trouver une situation meilleure.

Quelques mots maintenant sur des questions mathématiques qui, je pense, t'intéressent; j'ai découvert dans un lot de brochures reçues cette année de Scandinavie un article de Lindelöf "Sur la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur l'aire d'un cercle" (Extrait des C.R. du congrès de Stockholm 1916) qui est beaucoup plus clair que le mémoire du même auteur des Acta Societatis Fennica. Le problème intérieur y est traité d'une manière fort élégante et simple, en simplifiant une méthode de Carathéodory. Comme tu dois faire un exposé didactique sur cette question, tu aurais intérêt à consulter cette brochure que je tiens à ta disposition si tu ne l'as pas.

Autre chose dans des ordres d'idées voisins. Tu te souviens peut-être d'une note de Denjoy [Montel a ajouté en marge au crayon (1918 CR)] où il énonce en généralisant un peu et sans me citer un théorème de moi sur les valeurs limites des fonctions analytiques sur un contour. Eh bien, cette généralisation même se trouve dans une communication de M. Riesz au même congrès (1916) "Über die Randeverte einer analytischer Funktion" qui contient d'ailleurs d'autres choses intéressantes et que je te recommande également.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Je ne vois aucun inconvénient à ce que tu fasses part de mes réflexions à Lebesgue.

December 6th 1920

My dear Montel

In the last few days, I have done a little work on certain uniform functions and I have written a note on it, which I first thought of giving to the C.R. But, since this exceeded noticeably the authorised limits, in order not to have to write another brief and then a detailed article, I have found it convenient to give you this note for the BSM, adding to it a few applications, details of computations and of proofs. Besides, this mode of exposition has in itself some advantages and one might have more chance of being read this way. Please be so kind as to give all this to Galbrun[38].

[38] See the notes page 145. If the Galbrun clearly shows that the "BSM" is the *Bulletin* of the SMF, it is in the *Bulletin... des sciences mathématiques*, as we have said,

If you go to the Société mathématique next Wednesday, which I cannot do myself, my evening being busy, I would be very grateful if you could read out this note, of course without the final explanatory notes and even skipping some passages in §II if necessary. If this bothers you, or if you think that it will bother everybody, you can also avoid it.

Yours sincerely

[signed] P. Fatou

Note for the history of mathematics: § III was thought up at Bullier.

Supplementary note: it is not useful to read the previous note to the SM.

Mon cher Montel

J'ai fait ces jours derniers un petit travail sur certaines fonctions uniformes et ai rédigé là dessus une note que je comptais primitivement donner aux C.R. Mais comme cela dépassait notablement les limites permises, pour ne pas avoir à refaire une note succincte et faire ensuite un article détaillé, j'ai trouvé expédient de te donner cette note pour le BSM, en la faisant suivre de quelques applications, détails de calcul et de démonstration. Ce mode d'exposition a d'ailleurs en soi quelques avantages et peut-être a-t-on plus de chances d'être lu de cette manière. Tu voudras bien remettre tout cela à Galbrun.

Si tu vas à la Société mathématique mercredi prochain, ce que je ne puis faire moi-même, ayant ma soirée prise, je te serais reconnaissant de donner lecture de cette note, bien entendu sans les notes explicatives de la fin et même au besoin en sautant quelques passages du §II. Si cela t'embête et si tu penses que cela embêtera tout le monde, tu peux aussi t'en dispenser.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Note pour l'histoire des mathématiques: le §III a été trouvé à Bullier.

Note complémentaire: il est inutile de donner lecture de la note précédente à la SM.

Saturday evening [1921]

My dear friend

I have been advised by the Crédit Lyonnais about 400^{f} you paid into my bank account; I thank you but at the same time I protest, this amount is 20^{f} more than what you owe to me; we shall settle this some time. On the other hand, how did you manage to get reimbursed for the 20^{f} that disappeared? If this were not the case, you would have been paid a negative amount for

that the paper corresponding to the communication was published (this is [Fatou 1921c]). The description of an article comprising a note and computational detail corresponds rather to [Fatou 1923b], which indeed appeared in the *Bulletin* of the SMF, and of which Fatou speaks in a later letter (see the note 45).

your February talks, which seems to me unacceptable, and I think I should reimburse you.

I received Lebesgue's letter to which you contributed. I went to see Picard this morning at the end of his lecture, as I had decided. He gave me the best of welcomes and he seems to be determined to support me; I explained to him that I had some hesitation in applying for this position for health reasons; he told me that this had indeed to be considered, but that, apart from this, my place was at the Sorbonne, not at the Observatory[39]. He told me on the other hand that Denjoy's application had some supporters, but that he did not know the opinion of some of his colleagues, in particular that of Vessiot, and he advised me to see them. I am thus going to pay a visit to test the waters; I shall apply only if there is a comfortable majority in my favour and some goodwill from those who would not vote for me, so that I would be able to ask for not too hard a duty, otherwise I give up. If you were able to learn the opinion of people like Drach, Cartan, Vessiot and Kœnigs, I would be grateful if you would let me know.

Here is another property of your univalent functions in the circle $\mathcal{C}$ and equal to $a, b, c \ldots$ at $a, b, c \ldots$; one can find one of them that represents $\mathcal{C}$ on a domain the contour of which consists of 1° any arc $mpn < 2\pi$ of $\mathcal{C}$; 2° an arc of curve $mrsn$ passing as close as we want to a point q of the plane outside $\mathcal{C}$. I draw an arc of a simple curve mqn containing q and exterior to $\mathcal{C}$ and I perform an auxiliary conformal mapping of the domain $mqnp$ $(> \mathcal{C})$ on the upper Z-half-plane, so that the image of q is the point at infinity; the circle $\mathcal{C}$ will have image the bounded domain MKN.

A_0, B_0, C_0 are the symmetric counterparts of A, B, C with respect to the real axis[40]. I put

$$Z = R(Z) = Z + \varepsilon P(Z)$$
$$P(Z) = (Z - M)(Z - N)(Z - A)(Z - A_0)(Z - B) \cdots (Z - C_0)$$

I take ε real and small and I chose its sign in such a way that

$$|R'(A)| = |2 + \varepsilon P'(A)| > 1$$

which is possible if $P(A) \neq 0$. The transformation $Z' = R(Z)$ transforms the domain MKN or Γ into another one which is also simple if ε is very small and the boundary of which contains the segment MN. Moreover the transform Γ_1 will be above the real axis since

$$Y' = Y + \varepsilon Y H(X, Y) \quad \begin{cases} Z = X + iY \\ Z' = X' + iY' \\ H = \text{polynomial.} \end{cases}$$

[39] Hence, it is indeed a candidacy at the Sorbonne this letter is dealing with.
[40] See Figure A.2.

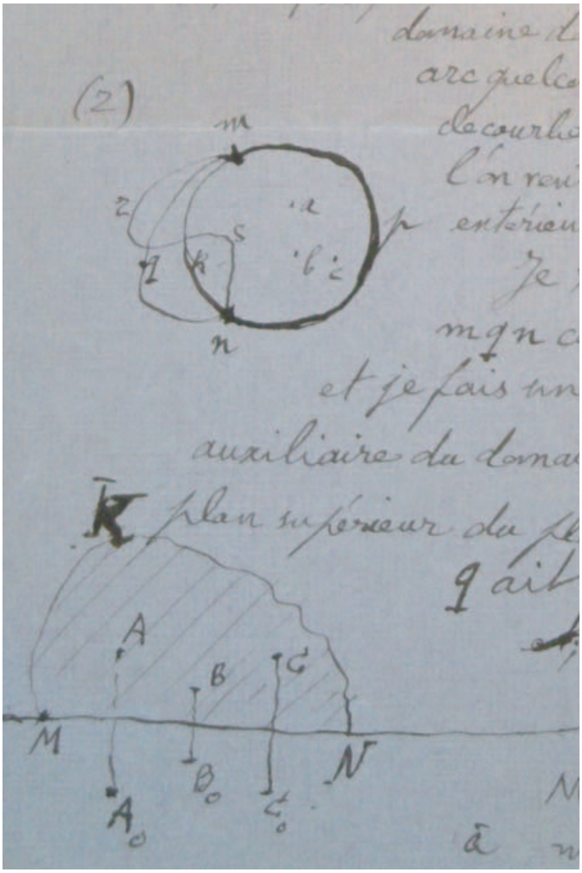

Fig. A.2. The figures in the Saturday evening letter

We don't have $Y' = 0$ for $Y \neq 0$ since this would give $1 + \varepsilon H = 0$; impossible for small ε.

One then uses my first proof procedure: one iterates the polynomial $R(Z)$ and one considers the last consequent Γ_n of Γ that is both simple and above the real axis. The domain $\Gamma_n^{(\varepsilon)}$ does not remain bounded when $\varepsilon \to 0$ (see my 1st proof). Coming back to the z-plane, we have the announced result.

I did not find anything else.

Yours sincerely

[signed] P. Fatou

The proof also shows that there are functions $f(z)$ in your family that keep the real axis invariant or even, if $\mathcal{C}$ is not circular but has an axis of symmetry, this axis.

Mon cher ami

J'ai été avisé par le Crédit Lyonnais d'un versement de 400$^{\mathrm{f}}$ fait par toi à mon compte; je te remercie et je proteste en même temps, cette somme excédant de 20$^{\mathrm{f}}$ celle que tu me dois; nous réglerons cela quelque jour. D'autre part, as-tu pu te faire rembourser les 20$^{\mathrm{f}}$ qui ont été escamotés? S'il en était autrement, tu aurais touché une somme négative pour tes conférences de février, ce qui me paraît inadmissible, et je suis d'avis que je devrais te rembourser.

J'ai reçu la lettre de Lebesgue à laquelle tu as collaboré. J'ai été voir Picard ce matin à la sortie de son cours, comme j'y étais d'ailleurs décidé. Il m'a fait le meilleur accueil et paraît décidé à me soutenir; je lui ai exposé que j'avais quelques hésitations à demander cette place pour des raisons de santé; il m'a dit que c'était en effet à considérer, mais qu'à part cela ma place était à la Sorbonne et non à l'Observatoire. Il m'a dit d'autre part que la candidature de Denjoy avait des partisans, mais qu'il ne connaissait pas l'opinion de certains de ses collègues, notamment de Vessiot et m'a engagé à les voir. Je vais donc faire une tournée de visites pour tâter le terrain; je ne serai candidat que s'il y a une majorité très nette en ma faveur, et une certaine bienveillance même de la part de ceux qui ne voteraient pas pour moi, de façon à pouvoir réclamer un service qui ne soit pas trop pénible, sinon j'abandonne la partie. Si tu peux savoir l'opinion de gens comme Drach, Cartan, Vessiot, Kœnigs, je te serais reconnaissant de me la faire connaître.

Voici encore une propriété de tes fonctions $f(z)$ univalentes dans le cercle $\mathcal{C}$ et égales à $a, b, c \ldots$ en $a, b, c \ldots$; on peut en trouver une qui représente $\mathcal{C}$ sur un domaine dont le contour se compose 1° d'un arc quelconque $mpn < 2\pi$ de $\mathcal{C}$; 2° d'un arc de courbe $mrsn$ passant aussi près que l'on veut d'un point q du plan extérieur à $\mathcal{C}$. Je trace un arc de courbe simple mqn contenant q et extérieur à $\mathcal{C}$ et je fais une représentation conforme auxiliaire du domaine $mqnp$ ($> \mathcal{C}$) sur le demi-plan supérieur du plan des Z, de manière que q ait pour image le point à l'infini; le cercle $\mathcal{C}$ aura pour image le domaine borné MKN.

A_0, B_0, C_0 sont les symétriques de A, B, C par rapport à l'axe réel. Je pose

$$Z = R(Z) = Z + \varepsilon P(Z)$$
$$P(Z) = (Z - M)(Z - N)(Z - A)(Z - A_0)(Z - B) \cdots (Z - C_0)$$

Je prends ε réel et petit et je choisis son signe de manière que

$$\left|R'(A)\right| = \left|2 + \varepsilon P'(A)\right| > 1$$

ce qui est possible si $P(A) \neq 0$. La transformation $Z' = R(Z)$ transforme le domaine MKN ou $\varGamma$ en un autre également simple si ε est très petit et dont la frontière contiendra le segment MN. De plus le transformé $\varGamma_1$ sera au dessus de l'axe réel, car

$$Y' = Y + \varepsilon Y H(X, Y) \qquad \begin{cases} Z = X + iY \\ Z' = X' + iY' \\ H = \text{polynome.} \end{cases}$$

On n'a pas $Y' = 0$ pour $Y \neq 0$ car cela donnerait $1 + \varepsilon H = 0$; impossible pour ε petit.

On emploie ensuite mon premier procédé de démonstration: on fait l'itération du polynome $R(Z)$ et on considère le dernier conséquent $\varGamma_n$ de $\varGamma$ qui soit à la fois simple et au-dessus de l'axe réel. Le domaine $\varGamma_n^{(\varepsilon)}$ ne reste pas borné quand $\varepsilon \to 0$ (voir ma 1$^{\mathrm{re}}$ démonstration). En revenant au plan des z on a le résultat annoncé.

Je n'ai pas trouvé autre chose.
Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

La démonstration prouve aussi qu'il y a des fonctions $f(z)$ de ta famille qui laissent invariantes l'axe réel ou encore, si $\mathcal{C}$ est non circulaire, mais pourvu d'un axe de symétrie, cet axe de symétrie.

Saturday [1921?]

My dear Montel

Here is some additional information[41] about the functions $f(z)$ that are holomorphic and simple (schlicht) in a domain C and such that $z = f(z)$ leaves points $a_1, a_2 \dots a_p$ invariant. I especially consider the functions

$$f(z) = z + \varepsilon P(z) = z + \varepsilon(z - a_1) \cdots (z - a_p).$$

I pointed out to you that they are simple in C for all sufficiently small ε. This can be seen as follows

$$\begin{gathered} f(z) = f(z') \quad (z \neq z') \\ z - z' + \varepsilon P(z) - P(z') = 0 \\ 1 + \varepsilon \frac{P(z) - P(z')}{z - z'} = 1 + \varepsilon Q(z, z') = 0 \end{gathered}$$

Q a symmetric polynomial independent of ε; $|z| < A$, $|z'| < A$ imply that $|Q(z, z')| < B$. The previous equality is thus impossible for $|\varepsilon| < 1/B$: $f(z)$ is thus simple for $|\varepsilon| < 1/B$. We thus have substitutions that are close to the identical substitution and that answer the question; but one can also obtain others that take values that are as large as one wants in C, in other words the $f(z)$ are not uniformly bounded. I perform iteration of the substitution

$$z' = R(z) = z + \varepsilon P(z).$$

At least one of the multipliers $(R'(a_i))$ of the double points a_i has absolute value > 1 or is equal to $+1$ (if P has multiple roots) (see e.g. the beginning of my memoir on iteration). Thus the iterated functions do not constitute a normal sequence at a_i (indeed one has $R_n(z) = a_i + s^n(z - a_i) + \cdots$ $(|s| > 1)$, and for $s = 1$: $R_n(z) = a_i + (z - a_i) + cn(z - a_i)^q + \cdots$); from this one concludes (see e.g. my memoir) that the $R_n(z)$ take all finite values around a_i namely in C; the consequent domains $C_1, C_2, \dots C_n \dots$ will eventually contain any point of the plane, especially a root of $1 + \varepsilon P'(z) = R'(z)$ and starting from

[41] Similar to the previous one, this letter mentions holomorphic functions with some invariant points; this is why we placed it here.

here cease to be simple. Let C^{ε}_{n+1} be the first domain that covers itself, C^{ε}_{n} is thus the first domain for which $R(z) = R(z')$ at two of its points z and z'; now I make ε tend to 0; the domains C^{ε}_{n} don't remain bounded, according to my remark at the beginning, because, if we had $|z| < A$ in all these domains, we would have $R(z) \neq R(z')$ in each of them (for $|\varepsilon| < 1/B$).

The functions $f(z)$ are thus not uniformly bounded. Can you prove to me that they take all values? I think this is the case.

Here are, on the other hand, some immediate properties: the $f(z)$ constitute a normal family (I believe this is what you told me the other day, but I don't remember it very well). The transformed domains D of C have a domain Δ in common; what is this domain Δ? The domains D are never interior to C, nor do they include C in their interior (at least for $p > 1$).

Let $M(\theta)$ be the maximum maximorum of $|f(z)|$ for $|z| \leq \theta < 1$ (taking the unit circle for C). $M(\theta)$ is finite (but not bounded $\theta \to 1$). One has $M(\theta) > \theta$. I ask for an upper bound of $M(\theta)$.

One could also accept a pole for $f(z)$ ($f(z)$ still being simple). In this case one can always make the contour of D (transform of C) as close as one wants from a point of the Riemann sphere exterior to C.

You see that the study of this family of functions raises interesting questions. You must be able to answer some of them.

Can you find also some qualitative properties of the contours of the Ds? One could investigate where the Riemann method for the conformal mapping leads.

Yours sincerely

[signed] P. Fatou

Mon cher Montel

Voici quelques renseignements complémentaires au sujet des fonctions $f(z)$ qui sont holomorphes et simples (schlicht) dans un domaine C et telles que $z = f(z)$ laisse invariants $a_1, a_2 \ldots a_p$. Je considère spécialement les fonctions

$$f(z) = z + \varepsilon P(z) = z + \varepsilon(z - a_1) \cdots (z - a_p).$$

Je t'ai fait remarquer qu'elles sont simples dans C pour tout ε suffisamment petit. On peut le voir comme il suit

$$f(z) = f(z') \quad (z \neq z')$$
$$z - z' + \varepsilon P(z) - P(z') = 0$$
$$1 + \varepsilon \frac{P(z) - P(z')}{z - z'} = 1 + \varepsilon Q(z, z') = 0$$

Q polynome symétrique indépendant de ε; $|z| < A$, $|z'| < A$ entraînent $|Q(z, z')| < B$. L'égalité précédente est donc impossible pour $|\varepsilon| < 1/B$: $f(z)$ est donc simple pour $|\varepsilon| < 1/B$. Nous avons ainsi des substitutions voisines de la substitution identique qui répondent à la question; mais on peut en obtenir qui prennent des valeurs

aussi grandes que l'on veut dans C, autrement dit les $f(z)$ ne sont pas bornées dans leur ensemble. Je fais l'itération de la substitution

$$z' = R(z) = z + \varepsilon P(z).$$

L'un au moins des multiplicateurs $(R'(a_i))$ des points doubles a_i est > 1 en module ou égal à $+1$ (si P a des racines multiples) (voir p. ex le début de mon mémoire sur l'itération). Donc les fonctions itérées ne forment pas une suite normale en a_i (on a en effet $R_n(z) = a_i + s^n(z - a_i) + \cdots$ $(|s| > 1)$, et pour $s = 1$: $R_n(z) = a_i + (z - a_i) + cn(z - a_i)^q + \cdots$); on en conclut (voir p. ex mon mémoire) que les $R_n(z)$ prennent toutes les valeurs finies autour de a_i c'ad dans C; les domaines conséquents $C_1, C_2, \dots C_n \dots$ finiront par comprendre un point quelconque du plan, notamment un point racine de $1 + \varepsilon P'(z) = R'(z)$ et à partir de là cessent d'être simples. Soit C^{ε}_{n+1} le premier domaine qui se recouvre lui-même, C^{ε}_n est donc le premier domaine pour lequel $R(z) = R(z')$ en deux de ses points z et z'; je fais tendre maintenant ε vers 0; les domaines C^{ε}_n ne restent pas bornés d'après ma remarque du début, car si on avait $|z| < A$ dans tous ces domaines, on aurait $R(z) \neq R(z')$ dans chacun d'eux (pour $|\varepsilon| < 1/B$).

Les fonctions $f(z)$ ne sont donc pas bornées dans leur ensemble. Peux-tu me démontrer qu'elles prennent toutes les valeurs? Je pense qu'il en est ainsi.

Voici d'autre part quelques propriétés immédiates: les $f(z)$ forment une famille normale (je crois que c'est cela que tu me disais l'autre jour, mais je ne me le rappelle plus très bien. Les domaines D transformés de C ont en commun un domaine Δ; quel est ce domaine Δ? Les domaines D ne sont jamais intérieurs à C, ni ne comprennent C à leur intérieur (du moins pour $p > 1$).

Soit $M(\theta)$ le maximum maximorum de $|f(z)|$ pour $|z| \leq \theta < 1$ (en prenant pour C le cercle unité). $M(\theta)$ est fini (mais non borné $\theta \to 1$). On a $M(\theta) > \theta$. Je demande une limite supérieure de $M(\theta)$.

On pourrait aussi admettre un pôle pour $f(z)$ ($f(z)$ étant toujours simple). Dans ce cas on peut toujours faire passer le contour de D (transformé de C) aussi près que l'on veut d'un point de la sphère de Riemann, extérieur à C.

Tu vois que l'étude de cette famille de fonctions soulève des questions intéressantes. Tu dois pouvoir répondre à certaines d'entre elles.

Peux-tu aussi trouver des propriétés quantitatives des contours des D? On pourrait rechercher à quoi conduit la méthode de Riemann pour la représentation conforme.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

[1921?]

My dear Montel[42]

The expression in C $(|z| > 1)$ for the uniform substitutions that render the points $a_1 a_2 \dots a_p$ invariant is:

$$z' = z + P(z)\varphi(z) \quad (P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_p))$$

[42] This card could date from just before the previous letter (about schlicht functions).

One immediately reaches the goal you propose by taking a substitution infinitely close to the unit substitution, for instance

$$z' = z + \varepsilon P(z)$$

ε being a very small constant; indeed when $\varepsilon \to 0$, there is continuity of various orders; let $z' = \rho e^{i\omega}$ when $z = e^{i\varphi}$, ω varies in the same way as φ since $\dfrac{d(\omega - \varphi)}{d\varphi}$ is very small; ρ and ω are thus periodic functions of φ, and Γ is a curve with no double point. Thus we have a conformal mapping to the interior of C on the interior of Γ (Γ must cross C).

I hope this is enough for you

Sincerely

[signed] P. Fatou

[Some computation has been added, in red ink, by Montel.]

Mon cher Montel

L'expression des substitutions uniformes dans C ($|z| > 1$) qui laissent invariants les points $a_1 a_2 \dots a_p$ est:

$$z' = z + P(z)\varphi(z) \quad (P(z) = (z - a_1)\cdots(z - a_p))$$

On arrive de suite au but que tu te proposes en prenant une substitution inf^{t} voisine de la substitution unité, par exemple

$$z' = z + \varepsilon P(z)$$

ε étant une constante très petite; en effet quand $\varepsilon \to 0$, il y a continuité des divers ordres; soit $z' = \rho e^{i\omega}$ pour $z = e^{i\varphi}$, ω varie dans le même sens que φ puisque $\dfrac{d(\omega - \varphi)}{d\varphi}$ est très petit; ρ et ω sont donc des fonctions univoques et périodiques de φ et Γ est une courbe sans point double. Donc on a une représentation conforme de l'intérieur de C sur l'intérieur de Γ (Γ traverse nécessairement C).

J'espère que cela te suffit

Cordialement

[signé] P. Fatou

Fragment, 1921

[...] the situation of a deputy, who can one day be sent back to his mathematical studies[43]. This being given, you can take it that I am not applying, but don't say so yet; I will take a few more days to think and I could change my

[43] Most probably, what is discussed here is the replacement of Painlevé: Painlevé once elected to Parliament, would leave his teaching duties (but not his position)..

mind if I was to obtain more favourable information on the particulars of the duty, but this is rather unlikely since Vessiot, who is the greatest authority in these mathers and who seems kindly disposed, has given me a glimpse of the duties which do not really suit me.

On the other hand, Vessiot gave me advice that I decided to follow although this has no longer, in accordance to what precedes, any positive relevance for me, that is to print a notice[44]. Speaking of which, I found in my notes a certain number of results, some of which might not be without value, but some of them might not be new. As you read more than I do and as you are best equipped to make a bibliography, I would be grateful if you could tell me if you know the following propositions.

I. Let $F(z)$ be a holomorphic function inside the unit circle, and V the *logarithm of the maximum modulus* of $F(z)$ for $|z| = r, r_1 \dots r_n \dots$ being the absolute values of the zeros of $F(z)$:

1) If $\int_0^1 V\,dr$ is finite, the series $\sum(1-r_n)^2$ is not convergent. 2) If $V \leq \frac{1}{1-r}^{\alpha}$, the series $\sum(1-r_n)^{1+\alpha+\varepsilon}$ is convergent for $\varepsilon > 0$.

(Analogous uniform convergence theorems hold when $F(z)$ depends on parameters.)

II. Let $f(z)$ and $g(z)$ be two entire (transcendent) functions and p an arbitrary non-negative number; and let M and M_1 be the maximum absolute values of $f(z)$ and $f[g(z)]$ for $|z| = r$. One has for some unbounedly large values of r

$$M_1 > r^p M$$

Yours sincerely

[signed] P. Fatou

[...] la situation d'un député que ses électeurs peuvent renvoyer un beau jour à ses études mathématiques. Ceci posé, tu peux considérer que je ne suis pas candidat, mais ne le dis pas encore; je me donne encore quelques jours pour réfléchir et je pourrais changer d'avis si j'obtenais des renseignements plus favorables en ce qui concerne l'organisation du service, mais c'est peu probable puisque Vessiot qui est la plus grande autorité en la matière et qui paraît animé de dispositions bienveillantes me laisse entrevoir la perspective du service auquel je suis le moins adapté.

D'autre part, Vessiot m'a donné un conseil que je suis décidé à suivre bien que cela n'ait plus pour moi, en vertu de ce qui précède, d'utilité positive, à savoir de faire imprimer une notice. À ce propos, je retrouve dans mes brouillons un certain nombre de résultats dont quelques-uns ne sont peut-être pas sans valeur, mais il peut y en avoir qui ne sont pas nouveaux. Comme tu lis plus que moi et que tu es sans doute mieux outillé pour faire de la bibliographie, je te serais reconnaissant de me dire si tu as connaissance des propositions suivantes.

---

[44] It could also be about a candidacy at the ENS (Vessiot was the scientific director). Fatou printed a notice in 1921 (it is in his file at the Academy of Sciences). It is likely that this fragment was written after the Saturday evening letter: Fatou went to see Vessiot.

I. Soit $F(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle unité, V le *logarithme du module maximum de* $F(z)$ pour $|z| = r, r_1 \dots r_n \dots$ les modules des zéros de $F(z)$:

1) Si $\int_0^1 V\,dr$ est finie, la série $\sum(1 - r_n)^2$ est convergente. 2) Si $V \leq \frac{1}{1-r}^{\alpha}$, la série $\sum(1 - r_n)^{1+\alpha+\varepsilon}$ est convergente pour $\varepsilon > 0$.

(Théorèmes analogues de convergence uniforme quand $F(z)$ dépend de paramètres.)

II. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions entières (transcendantes) et p un nombre positif arbitraire; M et M_1 les modules maxima de $f(z)$ et de $f[g(z)]$ pour $|z| = r$. On a pour certaines valeurs infiniment grandes de r

$$M_1 > r^p M$$

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Undated letter, around 1922

Let, my dear Montel,

$$F(z) = \int_0^1 \frac{f(u)\,du}{z - u}$$

$f(u)$ being an absolutely integrable real function. Assume first $f(u) > 0$, one has

$$\Im(F(z)) = -y \int_0^1 \frac{f(u)\,du}{(x - u)^2 + y^2} \qquad z = x + iy$$

Thus

$$\Im(F(z)) < 0$$

(staying in the upper half-plane). My theorem on the limiting values of the bounded functions can thus be applied to the function $\dfrac{1}{F(z) - i}$ and then to $F(z)$. Moreover, the limiting value is almost nowhere infinite; this amounts to saying that for a bounded function the limiting value is almost nowhere zero; this is what F and M Riesz proved (Uber die Randeverte einer analytischen Funktion, Stockholm 1916) and myself in a much simpler way at the end of the paper I gave you (On holomorphic and bounded functions)[45].

Now let $f(u) > 0$ or < 0; $f(u)$ being absolutely integrable is the difference of two non-negative functions enjoying the same property

$$f = f_1 - f_2$$

The operation we consider is distributive so that

$$F(z) = F_1(z) - F_2(z)$$

[45] These are the articles [Riesz & Riesz 1916] and [Fatou 1923b]. We have seen that Fatou gave the latter to Montel before 1923. This letter is still written on the blue notepaper so that we can approximately date it.

and the theorem still holds true for F (since we have nowhere $\infty - \infty$).

Similarly if $f = f_1 + if_2$, we can do the same decomposition.

The proposition you stated to me yesterday would thus say that functions with more than 2 exceptional values in the neighbourhood of a cut behave, from the point of view of indetermination, in the same way as bounded functions. I have some doubts on the correctness of this proposition which does not seem to me to be compatible with the existence of some Fuchsian functions that may have any finite number of exceptional values, as far as I can remember, and that, with respect to the lattice of Fuchsian polygons, is certainly not the indetermination mode that holds for bounded functions.

It is true that on the one hand I have not looked at Fuchsian functions for a long time and that I might stammer on this subject; and that on the other hand I could have badly understood your statement. I nevertheless advise you to pay attention to my objection.

Sincerely

[signed] P. Fatou

Soit, mon cher Montel,

$$F(z) = \int_0^1 \frac{f(u)\,du}{z-u}$$

$f(u)$ étant une fonction réelle, absolument intégrable. Soit d'abord $f(u) > 0$, on a

$$\Im(F(z)) = -y \int_0^1 \frac{f(u)\,du}{(x-u)^2 + y^2} \qquad z = x + iy$$

Donc

$$\Im(F(z)) < 0$$

(en restant dans le demi-plan supérieur). Mon théorème sur les valeurs limites des fonctions bornées est donc applicable à la fonction $\dfrac{1}{F(z) - i}$ et par suite à $F(z)$. De plus la valeur limite n'est infinie presque nulle part; cela revient à dire que pour une fonction bornée la valeur limite n'est zéro presque nulle part; c'est ce qu'ont démontré F et M Riesz (Uber die Randeverte einer analytischen Funktion, Stockholm 1916) et moi-même d'une manière beaucoup plus simple à la fin de l'article que je t'ai remis (Sur les fonctions holomorphes et bornées).

Soit maintenant $f(u) > 0$ ou < 0; $f(u)$ étant absolument intégrable est la différence de deux fonctions positives jouissant de la même propriété

$$f = f_1 - f_2$$

L'opération considérée étant distributive on a

$$F(z) = F_1(z) - F_2(z)$$

est le théorème est encore vrai pour F (puisqu'on n'a $\infty - \infty$ nulle part).

De même si $f = f_1 + if_2$, on opère la même décomposition.

La proposition que tu m'as énoncée hier voudrait donc dire que les fonctions qui ont plus de 2 valeurs exceptionnelles au voisinage d'une coupure s'y comportent au

point de vue de l'indétermination de la même manière que les fonctions bornées. J'ai quelques doutes sur l'exactitude de cette proposition qui ne me paraît pas compatible avec l'existence de certaines fonctions fuchsiennes qui peuvent avoir un nombre fini quelconque de valeurs exceptionnelles, autant qu'il me souvient et qui, eu égard au réseau des polygones fuchsiens, n'est certainement pas le mode d'indétermination qui vaut pour les fonctions bornées.

Il est vrai que d'une part je n'ai pas regardé depuis longtemps les fonctions fuchsiennes et que je bafouille peut-être à ce sujet; que d'autre part j'ai peut-être mal compris ton énoncé. Je t'engage cependant à faire attention à mon objection.

Cordialement

[signé] P. Fatou

Tuesday [?]

[This letter was written on white paper]

My dear Montel

I received another missive from the good Fréchet who has definitely no sense of the ridiculous. I am sending you this letter along with my answer if you would be kind to post it after you have read it; if you see anything you want to change in it, just send it back to me with the corrections you require.

I received a letter from Lebesgue the contents of which you probably know. On the other hand, I went to see Goursat, who advised me to wait and not say yet that I am not applying.

I return to my letter which was interrupted, in fact, by the arrival of Lebesgue, who had come to tell me on behalf Goursat that Picard agreed with Julia that people should give me a teachnig duty that would suit me and that, in those circumstances, he advised me to apply. I thus believe that this time I will not be able to shy away; on reflection, it seems to me that I can try this experiment especially if, being simply delegated at the Sorbonne to replace Painlevé, I am on leave from the Observatory, this would allow me, I think, to return there if, for instance, after a year I see that I am not in a fit state to continue at the Sorbonne[46]. I must clarify this point, which is very important to me.

I shall go to the SM tomorrow evening[47]. Lebesgue too. Try to come if you have nothing better to do.

Yours sincerely

[46] It is more or less clear that this letter dates from the same period as the other letters in which the replacement of Painlevé is mentioned. This is a period in which Julia was already at the Sorbonne (and he taught there from 1920) but Denjoy was not (he started teaching there in 1922). There is nevertheless a small doubt on its position among the previous letters, as this was not written on the blue notepaper.

[47] The sessions of the SMF taking place on Wednesdays, and Fatou attending them regularly, this does not help much in dating the letter!

[signed] P. Fatou

Mon cher Montel

Je reçois une nouvelle missive de ce brave Fréchet qui n'a vraiment pas le sens du ridicule. Je te communique cette lettre et ma réponse que tu voudras bien mettre à la poste après en avoir pris connaissance; si tu voyais quelque chose à y changer, en ce qui te concerne, tu n'aurais qu'à me la renvoyer avec les corrections que tu demandes.

J'ai reçu une lettre de Lebesgue dont tu connais probablement le contenu. Je suis allé d'autre part voir Goursat qui m'a conseillé d'attendre et de ne pas dire maintenant que je ne suis pas candidat.

Je reprends ma lettre interrompue précisément par l'arrivée de Lebesgue qui vient de me dire de la part de Goursat que Picard s'entend avec Julia pour qu'on me donne un service qui puisse me convenir et que dans ces conditions il me conseille d'être candidat ferme. Je crois donc cette fois ne pas pouvoir me dérober; à la réflexion il me semble que je peux tenter cette expérience surtout si étant simplement délégué à la Sorbonne en remplacement de Painlevé, je suis mis en congé à l'Observatoire ce qui me permettrait, je pense, d'y reprendre du service si par exemple au bout d'un an je constatais n'être pas en état de continuer à la Sorbonne. Il faudra que j'éclaircisse ce point qui est très important pour moi.

J'irai demain soir à la SM. Lebesgue aussi. Tâche d'y venir si tu n'as rien de mieux à faire.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Friday [1922?]

My dear Montel

I accept without any reservation the 2$^{\text{nd}}$ paragraph[48] p. 41 but I have some concern about what immediately precedes it (p. 41, lines 6 to 12): "Since there is a curve ending at z_0 on which $f(z)$ has limit z_0 we deduce that $f(z)$ has limit z_0 on any curve interior to (d) ending at z_0 and fulfilling the conditions of § 23...

I return to the conclusions of § 23 and I read: Let L be a curve, interior to the angle AOB, tangent at O to OA and admitting at this point a non-zero radius of curvature...

But here, we have no reason to assume that the curve ℓ has a radius of curvature, or even a tangent distinct or not from the tangent to the circle. Besides, § 23 envisages curves that are closer and closer to the boundary and what we are interested in here, are rather the chords of the circumference.

It is to the preceding § 22 that we should go back and, actually, this § 22 confirms *more or less* your claim; but not quite since, I repeat, the argument

[48] The paper in question is [Montel 1917b], but the letter was written long after the publication of the article. It probably followed a discussion with Montel.

of the limit of $z - z_0$ may take all the values between $\frac{\pi}{2}$ and $\frac{3\pi}{2}$ (fig) so that the curve L (p. 34) would be tangent neither to OA nor to OB, and nor would it be interior to an angle $< AOB$.

However, I notice, going back to the proof of § 22 that there would probably be few things to change to make this fit. This works if the [illegible] λ_n uniformly converge to the segment A_2A_3; this also works a fortiori (§ 11) if the limit points of the λ_n are all interior to Δ_1'. I thus think that this works in the intermediate cases. Hence there is no error in the principle, as I thought at first, but only carelessness in the detail, which we mention especially because your proofs are, in general, perfectly precise and clear.

Your § 22 thus misses the proof of the following theorem which, at first sight, seems to need only a few lines (however, it would take some thought): "If $f(x)$ tends to α on any curve ending at 0 and interior to AOB, $f(x)$ uniformly tends to α in any sector $A'OB'$ which is completely interior to AOB". Until this is done, some doubt may remain about the conclusions of p. 41. [figure]

Since I began the criticism of your work, I note what follows on the subject of your memoir on normal families (1916)[49].

The proof of the theorem on pages 240 to 242, on boundaries such that the areas of the domains they cover [surround?] are bounded is skilful but it seems to me that this is redundant, the theorem reducing very easily to that on functions with two exceptional values. For, if one takes in the plane of the $X = f(x)$ two squares C and C' with side $\sqrt{M+1}$ completely exterior to each other, $f_n(x)$ cannot take some value a_n of C nor b_n of C'. From any sequence of the f_n one can extract another one for which a_n and b_n tend respectively to a and b ($a \neq b$). The $\frac{f_n(z) - a_n}{b_n - a_n}$ never taking values 0 or 1 constitute a normal family etc. You see the conclusion.

I note finally that you could have given as an example of a normal family the functions $f(x, y)$ that are holomorphic in x and continuous with respect to both x and y where y varies in the closed domain Δ and x in D' interior to D. As banal as this remark is, I think it is the starting point of interesting research on analytic functions of two variables. I give this over to you to think about.

I now jump to other subjects. Enjalbran tells me to warn you that to regularise the papers for the pension we must apply to the Recette centrale de la Seine, place Vendôme. The accounts of the tax inspectors from 1902 were all transferred there.

Lastly, I invite you to have dinner with me next Tuesday (28)[50] at the restaurant S$^{\text{t}}$ Michel 7$^{\text{h}}\frac{1}{4}$.

Sincerely

[signed] P. Fatou

---

[49] This is [Montel 1916].

[50] There were Tuesdays the 28$^{\text{th}}$ (between 1921 and 1924): in June 1921, February 1922, March 1922, November 1922, August 1923 and October 1924. The chances are thus in favour of 1922.

Mon cher Montel

J'accepte sans restriction le 2$^{\text{e}}$ alinéa p. 41 mais je fais quelques réserves sur ce qui précède immédiatement (p. 41, lignes 6 à 12): "Puisqu'il existe une courbe aboutissant en z_0 sur laquelle $f(z)$ a pour limite z_0 on en déduit que $f(z)$ a pour limite z_0 sur toute courbe intérieure à (d) aboutissant en z_0 et remplissant les conditions du § 23.........

Je me reporte aux conclusions du § 23 et je lis: Soit L une courbe intérieure à l'angle AOB, tangente en O à OA et admettant en ce point un rayon de courbure non nul.........

Or ici nous n'avons aucune raison de supposer que la courbe ℓ a un rayon de courbure, ni même une tangente distincte ou non de la tangente au cercle. D'ailleurs le § 23 envisage des courbes de plus en plus rapprochées de la frontière et ce qui nous intéresse ici surtout ce sont au contraire les cordes de la circonférence.

Il faut donc se référer au § 22 qui précède et, effectivement ce § 22 donne *à peu près* confirmation de ton assertion; mais pas tout à fait car, je le répète, l'argument limite de $z - z_0$ peut avoir toutes les valeurs comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ (fig) [Il y a une figure dans la lettre] en sorte que la courbe L (p. 34) ne soit ni tangente à OA ou à OB, ni intérieure à un angle $< AOB$.

Je constate cependant, en me reportant à la démonstration du § 22 qu'il n'y a aurait probablement pas grand chose à changer pour que ça colle. Cela marche si les [illisible] λ_n convergent uniformément vers le segment A_2A_3; cela marche aussi à fortiori (§ 11) si les points limites des λ_n sont tous intérieurs à Δ'_1. Je pense donc que cela marche dans les cas intermédiaires. Il n'y a donc pas d'erreur de principe, comme je l'avais cru d'abord, mais seulement négligence de détail, dont on s'aperçoit d'autant plus que tes démonstrations sont, en général, parfaitement précises et claires.

Il manque donc à la suite du § 22 la démonstration du théorème suivant qui, à première vue semble devoir tenir en quelques lignes (mais encore faut-il y réfléchir un peu): "Si $f(x)$ tend vers α sur une courbe quelconque aboutissant en 0 et intérieure à AOB, $f(x)$ tend uniformément vers α dans tout secteur $A'OB'$ complètement intérieur à AOB" Tant que cela n'est pas fait, il peut subsister quelque doute sur les conclusions de la p. 41. [une figure]

Puisque j'ai entamé la critique de tes travaux, je note ce qui suit au sujet de ton mémoire sur les familles normales (1916).

La démonstration du théorème pages 240 à 242, sur les frontières telles que les aires des domaines qu'elles recouvrent restent bornés [*sic*] est habile mais me paraît inutile le théorème se ramenant bien facilement à celui qui concerne les fonctions ayant 2 valeurs exceptionnelles. Car si on prend dans le plan des $X = f(x)$ deux carrés C et C' complètement extérieurs l'un à l'autre et de cote $\sqrt{M+1}$, $f_n(x)$ ne peut pas prendre une certaine valeur a_n de C ni b_n de C'. De toute suite des f_n on peut en extraire une autre pour laquelle a_n et b_n tendent respectivement vers a et b $(a \neq b)$. Les $\dfrac{f_n(z) - a_n}{b_n - a_n}$ ne prenant jamais les valeurs 0 et 1 forment une famille normale etc. Tu vois la conclusion.

Je note enfin que tu aurais peut-être pu citer comme exemple de famille normale les fonctions $f(x,y)$ holomorphes en x et continues par rapport à l'ensemble des deux variables x et y quand y varie dans le domaine fermé Δ et x dans D' intérieur à D. Pour banale que soit cette remarque je crois qu'elle peut être le point de départ de recherches intéressantes sur les fonctions analytiques de deux variables. Je livre cela à tes réflexions.

Je passe maintenant à d'autres sujets. Enjalbran me dit de t'avertir qu'il faut s'adresser pour régulariser les pièces pour la retraite à la Recette centrale de la Seine, place Vendôme. Les comptes des percepteurs à partir de 1902 et suiv. sont tous transférés là.

Enfin je te convie à dîner avec moi mardi prochain (28) au restaurant S^t Michel $7^{\mathrm{h}}\frac{1}{4}$.

Cordialement

[signé] P. Fatou

January 30^th [1922?]

[Card]

My dear Montel

I read in your memoir on normal families of analytic functions[51], n° 38, p. 301:

"Let us consider the relation $X^m + Y^n = 1$ in which $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$. If we solve this relation with the help of 2 uniform functions of x, it follows from what precedes that these functions have singularities other than essential isolated points".

This is wrong, since for

$$m = 2, \quad n = 4$$

$$m = 2, \quad n = 3$$

$$m = 3, \quad n = 3$$

the curve has genus 1, X and Y being elliptic functions. The th. of n° 38 is thus incorrect.

The theorem of n° 37 is correct, but is contained in that of Picard: if 2 meromorphic functions are subject to an algebraic relation, this relation has genus zero or one.— The fact is thus new only for the finite number of values of m and n for which $X^m + Y^n = 1$ has genus 1.

For this case, I proved the following th. (which is probably known, but I am not sure): 2 entire functions, or an entire function and a meromorphic function, cannot be subject to an algebraic relation of genus 1.

Yours sincerely

[signed] P. Fatou

[51] This is [Montel 1916].

⋆

[Added by Montel: there is a mistake only in the statement—add [illegible] poles.]

Mon cher Montel

Je lis dans ton mémoire sur les familles normales de fonctions analytiques, n° 38, p. 301:

"Considérons la relation $X^m + Y^n = 1$ dans laquelle $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$. Si l'on résout cette relation à l'aide de 2 fonctions uniformes de x, il résulte de ce qui précède que ces fonctions ont d'autres singularités que des points essentiels isolés".

Ceci est faux, car pour

$$m = 2, \quad n = 4$$
$$m = 2, \quad n = 3$$
$$m = 3, \quad n = 3$$

la courbe est de genre 1, X et Y sont des fonctions elliptiques. Le th. du n° 38 est donc incorrect.

Le théorème du n° 37 est exact, mais est contenu dans celui de Picard: si 2 fonctions méromorphes sont reliées par une relation algébrique, cette relation est de genre zéro ou un.— Le fait n'est donc nouveau que pour les valeurs de m et n en nombre fini pour lesquelles $X^m + Y^n = 1$ est de genre 1.

Pour ce cas j'ai démontré le th. suivant (qui est probablement connu, mais je n'en suis pas sûr): 2 fonctions entières, ou une fonction entière et une fonction méromorphe, ne peuvent être liées par une relation algébrique de genre 1.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

⋆

[Ajouté par Montel: il y a erreur seulement dans l'énoncé — ajouter [illisible] pôles.]

February 1st 1923

[Card. The date was added by Montel.]

My dear Montel

You are right, the case of an isolated double point for the cubic must be examined, and this is quite easy. Its equation can be put in the form:

$$x(ax^2 + bxy + cy^2) = x^2 + y^2$$

by a real Möbius transformation, thus:

$$x = \frac{1+t^2}{a+bt+ct^2} \quad y = \frac{t(1+t^2)}{a+bt+ct^2}$$

One finds immediately for the parameters of the three aligned points the relation

$$\frac{t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3 - 1}{t_1t_2t_3 - (t_1 + t_2 + t_3)} = \frac{a-c}{b} = k$$

Putting $t_1 = t_2 = \theta$ and $t_3 = t$, one gets a quadratic equation in θ which determines the tangents through (t):

$$\theta^2(1 - kt) + 2\theta(t + k) - (1 - kt) = 0 \qquad (\theta'\theta'' = -1)$$

hence always two real roots; the lines $O(\theta')$, $O(\theta'')$ are rectangular, and hence in general harmonic conjugates with respect to the tangents at the double point; a probably well known property, an implication of which is the reality of θ', θ'' when the tangents at the double point are imaginary and conjugated.

The proof still works for quartics when A or B are isolated.

Your remark about (hyperelliptic) curves having a double point of order $n-2$ is interesting; in this case I do not see a proof by the procedures of classical analysis.

Yours sincerely

[signed] P. Fatou

Mon cher Montel

Tu as raison, il faut examiner le cas du point double isolé pour la cubique, ce qui est bien facile. On peut mettre son équation sous la forme:

$$x(ax^2 + bxy + cy^2) = x^2 + y^2$$

par une homographie réelle, d'où:

$$x = \frac{1+t^2}{a+bt+ct^2} \qquad y = \frac{t(1+t^2)}{a+bt+ct^2}$$

On trouve de suite pour les paramètres des 3 points en ligne droite la relation

$$\frac{t_1t_2 + t_2t_3 + t_1t_3 - 1}{t_1t_2t_3 - (t_1 + t_2 + t_3)} = \frac{a-c}{b} = k$$

En faisant $t_1 = t_2 = \theta$ et $t_3 = t$ on a l'équation du second degré en θ qui détermine les tangentes issues de (t):

$$\theta^2(1 - kt) + 2\theta(t + k) - (1 - kt) = 0 \qquad (\theta'\theta'' = -1)$$

donc toujours deux racines réelles; les droites $O(\theta')$, $O(\theta'')$ sont rectangulaires, donc en général conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes au point double; propriété certainement connue d'où découle la réalité de θ', θ'' quand les tangentes au point double sont imaginaires conjuguées.

La démonstration pour les quartiques marche encore si A ou B sont isolés.

Ta remarque pour les courbes (hyperelliptiques) ayant un point double d'ordre $n-2$ est intéressante; dans ce cas je ne vois pas la démonstration par les procédés de l'analyse classique.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

Saturday evening [1923]

[Card]

I am adding a word to my letter of this morning[52] to tell you that there is no need to look for a proof that a (space) curve of order 3 admits a chord through any point of the space, since the thing is not true for space cubics if one does not admit imaginary points; the chord is always real, but the two points can be imaginary and conjugated.

Example $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 + t^2 : t(1 + t^2) : 1 : 1 + t^3$ is projected from the point $(x_1 = x_2 = x_4 = 0)$ onto the plane $x_3 = 0$ according to the plane cubic

$$x_1^3 + x_2^3 = x_4(x_1^2 + x_2^2)$$

the double point of which $(x_1 = x_2 = 0)$ is isolated.

The statement must thus be completed by a condition which I don't see at all.

[signed] P. Fatou

J'ajoute un mot à ma lettre de ce matin pour te dire qu'il n'y a pas lieu de chercher à démontrer qu'une courbe d'ordre 3 (gauche) admet une corde passant par tout point de l'espace, puisque la chose n'est pas vraie pour les cubiques gauches quand on n'admet pas les points imaginaires; la corde est toujours réelle, mais les deux points peuvent être imaginaires conjugués.

Exemple $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 + t^2 : t(1 + t^2) : 1 : 1 + t^3$ est projetée du point $(x_1 = x_2 = x_4 = 0)$ sur le plan $x_3 = 0$ suivant la cubique plane

$$x_1^3 + x_2^3 = x_4(x_1^2 + x_2^2)$$

dont le point double $(x_1 = x_2 = 0)$ est isolé.

Il faut donc compléter l'énoncé par une condition que je n'aperçois pas du tout.

[signé] P. Fatou

Paris, January 27th 1929. Draft of a letter from Paul Montel to Pierre Fatou

[Letterhead of the chair of rational mechanics at the faculty of sciences. This is indeed a draft, the pieces of which have probably been reordered for the version Montel sent to Fatou.]

⋆

Communicated to M. E. Meyer
for whatever purpose it may serve
(return to me)

[52] Which is not the previous card: February 1st 1923 was a Thursday. It is certain that some of Fatou's letters to Montel were not kept.

My dear friend

I was just informed that there is circulating in the scientific circles a strange version of my attitude with repsect to you during the last election at the Faculty, according to which I did not vote for you.

I would not even have thought of noticing it if this version had not been presented to me as coming from you[53], of which I remain deeply surprised & saddened.

You cannot have forgotten that I have not stopped supporting and helping you with all my strength, throughout your career.

When the Academy put the problem of iteration out to competition, I constantly urged to you to write a memoir, and I did my utmost for it to be published in the Bulletin of the Math. Soc. in due time, filling several consecutive issues, contrary to custom.

When Humbert died in 22, I was the one who had the idea of your candidacy at the Collège de France and spoke of this to the mathematicians.

[Added in the margin] When it was possible to give you a lecture at the École [normale supérieure], I asked to be replaced by you so that no-one could accuse you of having never taught. [The part from "You cannot" to here was marked II in the margin by Montel, who decided to order the letter he sent differently.]

I always supported your candidacies and, for the last election, I sat on the right of Mauguin and did not conceal from him the vote with your name which I put in the ballot box.

Besides, it has never happened that I have promised somebody I would vote for him & not fulfilled my promise. And I believe I can claim this will never happen. [from "You understand" to here, Montel put a I in the margin.]

[added in the margin] You can understand how painful it is in these circumstances to see my loyalty suspected.

I don't know if your words have been distorted, it would then be essential to correct them. In any case, I refute in the most formal way any interpretation of my attitude which would not match what I have just written to you.

Very amicably yours
[signed] PM

Revised and condensed text.

Communiqué à M. E. Meyer
à toutes fins utiles
(à me rendre)

---

[53] Thus the mathematical scene already loved gossip! And especially rumours on resolutions that should remain confidential...

Mon cher ami

Je viens d'être avisé que, dans les milieux scientifiques, [s'est propagée, biffé] circule une version [mensongère, biffé] étrange relative à mon attitude à ton égard à la dernière élection de la Faculté d'après laquelle je n'aurais pas voté pour toi.

Je n'aurais point songé à la relever si cette version ne m'était présentée comme venant de toi, ce dont je demeure profondément [surpris, biffé] étonné & attristé.

Tu ne peux pas avoir oublié que je n'ai cessé de te soutenir et de t'aider dans la mesure de mes forces, au cours de ta carrière.

Lorsque l'Académie a mis au concours le problème de l'itération, je t'ai continuellement poussé à rédiger un mémoire, et j'ai fait l'impossible pour qu'il parût au Bulletin de la Soc. Math. en temps utile, remplissant contre l'usage plusieurs fascicules consécutifs.

À la mort de Humbert en 22, c'est moi qui ai eu l'idée de ta candidature au Collège de France et qui en ai parlé aux mathématiciens.

[Paragraphe en marge, ajouté] Lorsqu'il a été possible de te donner une conférence à l'École, j'ai demandé à me faire suppléer par toi afin qu'on ne t'accuse pas de n'avoir jamais enseigné.

J'ai toujours soutenu tes candidatures ultérieures et, en ce qui concerne la dernière élection, j'étais placé à droite de Mauguin et je n'ai pas caché à ses yeux le bulletin portant ton nom et que j'ai déposé dans l'urne.

Au reste, il ne m'est jamais arriver [d'affirmer, biffé] de promettre à quelqu'un que je voterai pour lui & de ne pas tenir ma promesse. Et je crois pouvoir affirmer que cela ne m'arrivera jamais.

[ajouté, dans la marge] Tu comprends combien il est pénible dans ces conditions de voir ma loyauté suspectée.

Je ne sais si tes paroles ont été travesties, [en ce cas, biffé] il serait alors indispensable de les rectifier. Dans tous les cas, je démens de la manière la plus formelle toute interprétation de mon attitude non conforme à ce que je viens de t'écrire.

Bien amical. à toi
[signé] PM

Texte remanié et condensé.

Monday, 28th [January 1929]

My dear friend

I am myself very surprised by your letter, no doubt having ever existed, either in my thoughts or in my words, about the way you voted with regard to me at the Faculty of sciences. I absolutely ignore the origin of this rumour, having not spoken of this[54] for a very long time. It has stopped interesting me, as I have no longer the least intention of looking for a teaching position; at the time I spoke of this, I mentioned Picard and Andoyer and nobody else. Your justification is thus entirely superfluous and I thank you once again for having supported me in various circumstances, a fact I have not forgotten.

Could somebody therefore imagine having an interest or taking some pleasure in arousing some disagreement between us? I do not see for the moment

[54] this... is probably the affair of Fatou's candidacy at the Sorbonne—when Garnier was preferred to him (see page 179).

who this could be, but I am naturally inclined to accuse the feminine element, since this seems to me worthy of the sex[55].

Yours sincerely

[signed] P. Fatou

Mon cher ami

Je suis moi-même fort surpris de ta lettre aucune hésitation n'ayant jamais existé dans mon esprit ni dans mes paroles sur les votes que tu as émis à mon sujet à la Faculté des Sciences. J'ignore absolument l'origine de ce bruit, n'ayant pas parlé depuis longtemps de cette affaire qui a cessé de m'intéresser, n'ayant plus la moindre intention de chercher une situation quelconque dans l'enseignement; à l'époque où j'en ai parlé, j'ai mis en cause Picard et Andoyer et personne d'autre. Ta justification est donc entièrement superflue et je te remercie à nouveau de m'avoir soutenu en diverses circonstances, ce dont je n'ai aucunement perdu le souvenir.

Il y aurait donc quelqu'un qui s'imagine avoir intérêt ou qui prend plaisir à susciter quelque dissentiment entre nous? Je ne vois pas pour l'instant de qui il s'agit, mais suis naturellement porté à accuser l'élément féminin, car cela me paraît digne de ce sexe.

Cordialement à toi

[signé] P. Fatou

[55] A very banal expression of common misogyny... nevertheless unexpected in this context: no woman was mentioned in any of the previous letters and it is hard to imagine the "feminine element" influence an activity as strictly masculine as a meeting of Professors.

References

Abel (Niels Henrik)

[1881] *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel. Vol. II*, Christiania: Imprimerie de Grondahl, 1881, Éditées par Ludwig Sylow et Sophus Lie.

Académie

[1915] Grand Prix des Sciences mathématiques pour 1918, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 161 (1915), p. 921.

[1918] Grand Prix des Sciences mathématiques pour 1918, Rapport, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 167 (1918), p. 811.

Ahlfors (Lars V.)

[1978] *Complex analysis*, New York: McGraw-Hill Book Co., third edition, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

Alain

[1936] *Histoire de mes pensées*, NRF, Gallimard, 1936.

Alexander (Daniel S.)

[1994] *A history of complex dynamics, From Schröder to Fatou and Julia*, Aspects of Mathematics, E24, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1994.

[1995] Gaston Darboux and the history of complex dynamics, *Historia Math.*, 22 (1995), p. 179–185.

Alexanderson (Gerald L.)

[1987] *The Pólya picture album: Encounters of a mathematician*, Birkhäuser, 1987.

Antoine (Louis)

[1921] Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages, *J. Math. Pures Appl. (8)*, 4 (1921), p. 221–326.

Apollinaire (Guillaume)

[1980] *Calligrammes*, Berkeley: University of California Press, 1980, Transl. Anne Hyde Greet.

APPELL (Paul), GOURSAT (Édouard) & FATOU (Pierre)
[1930] *Théorie des fonctions algébriques, tome II, Fonctions automorphes*, Paris: Gauthier-Villars, 1930, Deuxième édition, revue et augmentée.

ARAGON (Louis)
[1934] *The Bells of Basel*, 1934, (Les Cloches de Bâle), English translation available.

AUBIN (David)
[2008] The war of guns and mathematics: French mathematicians and artillery men at Grâves, *Oberwolfach Report*, 5 (2008), p. 1350–1352.

AUBIN (David) & BRET (Patrice), eds.
[2003] *Le Sabre et l'éprouvette: l'invention d'une science de guerre 1914-1939*, 14–18 aujourd'hui, vol. 6, Éditions Noésis Agnès Viénot, 2003.

AUDIN (Michèle)
[2008] *Souvenirs sur Sofia Kovalevskaya*, Orizzonti, Calvage & Mounet, 2008.

[2009a] Publier sous l'Occupation I. Autour du cas de Jacques Feldbau et de l'Académie des sciences, *Rev. Hist. Math.*, 15 (2009), p. 5–57.

[2009b] *Une histoire de Jacques Feldbau*, Collection T, Paris: Société mathématique de France, 2009.

[2010] Le séminaire Julia, (2010), en préparation.

AUDIN (Michèle) & SCHAPPACHER (Norbert)
[2010] The lark and the eagle, (2010), in preparation.

AUDOIN-ROUZEAU (Stéphane)
[1992] L'enfer, c'est la boue, *in 14–18: Mourir pour la patrie*, Points histoire, Paris: Seuil, 1992, p. 137–151.

BAILLAUD (Benjamin) & BOURGUET (Henry)
[1905a] *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, tome I*, Paris: Gauthier-Villars, 1905.

[1905b] *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, tome II*, Paris: Gauthier-Villars, 1905.

BAIRE (René)
[1905] *Leçons sur les fonctions discontinues*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris: Gauthier-Villars, 1905.

[1990] Lettres à Émile Borel, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 11 (1990), p. 33–120.

BARBUSSE (Henri)
[1916] *Under Fire*, 1916, (le Feu), English tranlation available.

BARROW-GREEN (June)
[2008] Activities and attitudes of British mathematicians during the First World War, *to appear*, (2008).

BEAULIEU (Liliane)
[1990] Bourbaki, une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses

travaux (1934–1944), *Thèse, Université de Montréal*, (1990).

Becker (Jean-Jacques)

[1992] Mourir à Verdun, *in 14–18: Mourir pour la patrie*, Points histoire, Paris: Seuil, 1992, p. 152–169.

Beer (François-Joachim)

[1966] La vie de Paul Montel, *in* [MathNiçois 1966], (1966), p. 53–84.

Berteloot (François) & Mayer (Volker)

[2001] *Rudiments de dynamique holomorphe*, Cours Spécialisés, vol. 7, Paris: Société Mathématique de France, 2001.

Berthon (Pierre)

[1986] Les plis cachetés de l'Académie des sciences, *Rev. Hist. Sci.*, 39 (1986), p. 71–78.

Bieberbach (Ludwig)

[1927] *Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. II: Moderne Funktionentheorie*, Leipzig: Teubner, 1927.

Bloch (Léon)

[1931] Fatou (Pierre-Joseph-Louis), né à Lorient (Morbihan), le 28 février 1878, mort à Pornichet (Loire-Inférieure), le 9 août 1929, *Annuaire de l'association amicale des ancien élèves de l'École Normale Supérieure*, (1931), p. 52–58.

Bôcher (Maxime)

[1917] *Leçons sur la théorie des fonctions*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris: Gauthier-Villars, 1917.

Bonnet (Rose)

[1941] Publication des observations d'étoiles doubles faites à l'Équatorial de la tour de l'Ouest de 31 cm d'ouverture de l'Observatoire de Paris par M. P. Fatou, *Journal des Observateurs*, 24 (1941), p. 29 et 41.

[1945] Spectres, périodes et excentricités des binaires, *Thèse, Paris*, (1945).

Borel (Émile)

[1898] *Leçons sur la théorie des fonctions*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris: Gauthier-Villars, 1898.

[1901] *Leçons sur les séries divergentes*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris: Gauthier-Villars, 1901.

[1903a] Contribution à l'analyse arithmétique du continu, *J. Math. Pures Appl. (5)*, 9 (1903), p. 329–375.

[1903b] Sur l'approximation des nombres réels par les nombres quadratiques, *Bull. Soc. Math. France*, 31 (1903), p. 157–184.

[1917] *Leçons sur les fonctions monogènes*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris: Gauthier-Villars, 1917.

[1922] Notice sur la vie et les travaux de Georges Humbert, *Mémoires Acad. Sci.*, (1922).

[1947] Allocution, *in* [JubiléMontel 1947], (1947), p. 42–44.

[1966] Trente ans de travaux mathématiques de Paul Montel (1907–1937), *in* [MathNiçois 1966], (1966), p. 44–49, a 1937 text.

Böttcher (Lucien)

[1904a] Principaux résultats de convergence des itérées et applications à l'analyse (en russe), *Izv. Kazan*, 13 (1904), p. 1–37.

[1904b] Principaux résultats de convergence des itérées et applications à l'analyse (en russe), *Izv. Kazan*, 14 (1904), p. 155–200.

[1904c] Principaux résultats de convergence des itérées et applications à l'analyse (en russe), *Izv. Kazan*, 14 (1904), p. 201–234.

Bouligand (Georges)

[1932] *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris: Vuibert, 1932.

[1935] *Les définitions modernes de la dimension*, Exposés d'analyse générale publiés sous la direction de Maurice Fréchet, Paris: Hermann, 1935.

Bourdieu (Pierre)

[1984] *Homo academicus*, Le sens commun, Paris: Minuit, 1984, Nouvelle édition augmentée.

Brauer (Richard)

[1967] Emil Artin, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), p. 27–43.

Bruno (Alexandre)

[1971] Analytical forms of differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 25 (1971), p. 131–288.

[1972] Analytical forms of differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 26 (1972), p. 199–239.

Buff (Xavier) & Chéritat (Arnaud)

[2005] Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 341 (2005), p. 669–674.

Buhl (Adolphe)

[1921] Éloge de Samuel Lattès, *Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse*, 9 (1921), p. 1–13.

[1931a] Gabriel Kœnigs, *Enseignement Math.*, 30 (1931), p. 286–287.

[1931b] Paul Appell, *Enseignement Math.*, 30 (1931), p. 1–21.

Burali-Forti (Cesare) & Marcolongo (Roberto)

[1910] *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique*, Paris: Hermann, 1910, traduit de l'italien et augmenté d'un supplément par Samuel Lattès.

Burde (Gerhard), Schwarz (Wolfgang) & Wolfart (Jürgen)

[2002] Max Dehn und das Mathematische Seminar, *preprint*, (2002), http://www.math.uni-frankfurt.de/~schwarz/schwarz/dehnmat3.pdf.

Cabannes (Jean)
[1947] Allocution, *in* [JubiléMontel 1947], (1947), p. 11–16.

Cajori (Florian)
[1893] *A history of mathematics*, London: MacMillan, 1893, Réimprimé par Chelsea en 1980.

Calegari (Danny) & Gabai (David)
[2006] Shrinkwrapping and the taming of hyperbolic 3-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.*, 19(2) (2006), p. 385–446 (electronic).

Cantor (Georg)
[1884] De la puissance des ensembles parfaits de points, *Acta Math.*, 4 (1884), p. 381–392.

Cartan (Élie)
[1946] Léon Guillet, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 222 (1946), p. 1149–1151.

Cartan (Henri)
[1974] Notice nécrologique sur Arnaud Denjoy, membre de la section de géométrie, *C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique*, 279 (1974), p. 49–53.

[1979/80] Nicolas Bourbaki and contemporary mathematics, *Math. Intelligencer*, 2 (1979/80), p. 175–180.

Cartan (Henri) & Ferrand (Jacqueline)
[1988] Le cas André Bloch, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 9 (1988), p. 210–219.

Cassin (René)
[1966] Paul Montel, enfant et citoyen de Nice, *in* [MathNiçois 1966], (1966), p. 17–23.

Cayley (Arthur)
[1890] Sur les racines d'une équation algébrique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 110 (1890), p. 215–218.

Cerveau (Dominique), Ghys (Étienne), Sibony (Nessim) & Yoccoz (Jean-Christophe)
[1999] *Dynamique et géométrie complexes*, Panoramas et Synthèses, vol. 8, Paris: Société Mathématique de France, 1999.

Chabert (Jean-Luc)
[1990] Un demi-siècle de fratales 1870–1920, *Historia Math.*, 17 (1990), p. 339–365.

Châtelet (Albert)
[1913] *Leçons sur la théorie des nombres*, Paris: Gauthier-Villars, 1913.

[1950] Allocution prononcée lors de la cérémonie de remise d'une épée à Gaston Julia, *in* [Julia 1970], (1950), p. 142–148.

Chazy (Jean)
[1922] Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 174 (1922), p. 1280–1282.

[1932] Pierre Fatou, *Bulletin astronomique*, 8 (1932), p. 379–384.

Chevalley (Claude)
[1961] Allocution prononcée pour le jubilé scientifique de Gaston Julia le 16 décembre 1961, *in* [Julia 1970], (1961), p. 325–330.

Choquet (Gustave)
[1975] Notice sur Arnaud Denjoy, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1975), p. 29–33.

Coulomb (Jean)
[1968] Notice sur Charles Maurain, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1968).

Crawford (Elisabeth) & Olff-Nathan (Josiane), eds.
[2005] *La Science sous influence*, ed. par Crawford (Elisabeth) & Olff-Nathan (Josiane), Strasbourg: La Nuée bleue, 2005.

Cremer (Hubert)
[1925] Über die Iteration rationaler Funktionen, *Jahresbericht D. M. V.*, 33 (1925), p. 185–210.

[1927] Zum Zentrumproblem, *Math. Ann.*, 98 (1927), p. 151–163.

[1932] Über die Schrödersche Funktionalgleichung und das Schwarzsche Eckenabbildungsproblem., *Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig*, 84 (1932), p. 391–224.

Dauben (Joseph Warren)
[1980] Mathematicians and World War I: The international diplomacy of G.H. Hardy and Gösta Mittag-Leffler as reflected in their personal correspondence, *Historia Math.*, 7 (1980), p. 261–288.

Davenport (Harold)
[1985] Reminiscences of conversations with Carl Ludwig Siegel, *The Mathematical Intelligencer*, 7(2) (1985), p. 76–79, Edited by Mrs. Harold Davenport.

de la Vallée Poussin (Charles)
[1916] *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris: Gauthier-Villars, 1916.

[1921] *Cours d'analyse infinitésimale*, Louvain: A. Uystpruyst, 1921.

de Launay (Louis)
[1931] Notice nécrologique sur M. Gabriel Kœnigs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 193 (1931), p. 757–758.

Debré (Robert)
[1966] Souvenirs, *in* [MathNiçois 1966], (1966), p. 32.

Denjoy (Arnaud)
[1918] Sur une propriété générale des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 31–33.

[1926] Sur l'itération des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 182 (1926), p. 255–257.

[1932] Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. Math. Pures Appl. (9)*, 11 (1932), p. 333–375.

[1956] Notice sur Jean Chazy, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1956), p. 29–31.

[1975] Arnaud Denjoy, l'homme et l'œuvre, *Astérisque*, 28–29 (1975).

[1980] Lettres à Paul Lévy, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 1 (1980), p. 51–67.

Desforge (Julien)

[1979] Notice sur Gaston Julia, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1979), p. 59–65.

Devaux (Alice)

[2004] Recherche-médecine: destins croisés, *Le Journal de l'Institut Curie*, 58 (2004), p. 15.

Dieudonné (Jean)

[1990] Montel, Paul, *Dictionary of scientific biography, supplement*, 18 (1990), p. 649–650.

Dorgelès (Roland)

[1919] *Wooden Crosses*, 1919, (Les croix de bois), English translation available.

Douady (Adrien)

[1983] Systèmes dynamiques holomorphes, Séminaire Bourbaki, 1982-83, *Astérisque*, 105–106 (1983), p. 39–63.

[1987] Disques de Siegel et anneaux de Herman, Séminaire Bourbaki, 1986-87, *Astérisque*, 152–153 (1987), p. 151–172.

[2009] L'ensemble de Julia dépend-il continûment du polynôme?, *in* Berline (Nicole) & Sabbah (Claude), eds., *Aspects des systèmes dynamiques (Palaiseau, 1994)*, Journées X-UPS, Palaiseau: Éditions de l'École polytechnique, 2009, p. 125–166.

Drach (Jules)

[1920] L'équation différentielle de la balistique extérieure et son intégration par quadratures, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 37 (1920), p. 1–94.

Dubreil (Paul)

[1950] Allocution prononcée lors de la cérémonie de remise d'une épée à Gaston Julia, *in* [Julia 1970], (1950), p. 149–153.

[1982] L'algèbre en France, de 1900 à 1935, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 3 (1982), p. 69–81.

Dugac (Pierre)

[1984] Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874–1883), *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 5 (1984), p. 49–285, Transcription et annotations par Pierre Dugac.

[1985] Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1884–1891), *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 6 (1985), p. 79–216, Transcription et annotations par Pierre Dugac.

[1989] Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1892–1900), *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 10 (1989), p. 1–82, Transcription et annotations par Pierre Dugac.

[1990] René Baire, *in René Baire, Œuvres scientifiques*, Gauthier-Villars, 1990, p. 9–19.

Eisele (Carolyn)
[1971] Bôcher, Maxime, *Dictionary of scientific biography*, (1971).

EnsMath
[1920] La collaboration internationale, *l'Enseignement Math.*, 19 (1920), p. 294–298.

[1921] Unions scientifiques internationales, *l'Enseignement Math.*, 20 (1921), p. 59–61.

Fatou (Pierre)
[1904a] Sur les séries entières à coefficients entiers, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 138 (1904), p. 342–344.

[1904b] Sur la série de Fourier et la série de Taylor sur son cercle de convergence, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 139 (1904), p. 850–852.

[1904c] Sur l'approximation des incommensurables et les séries trigonométriqes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 139 (1904), p. 1019–1021.

[1905a] Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 140 (1905), p. 359–360.

[1905b] Sur quelques théorèmes de Riemann, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 140 (1905), p. 569–570.

[1906a] Sur l'application de l'analyse de Dirichlet aux formes quadratiques à coefficients et à indéterminées conjuguées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 142 (1906), p. 505–506.

[1906b] Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 142 (1906), p. 765–766.

[1906c] Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.*, 30 (1906), p. 335–400.

[1906d] Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 143 (1906), p. 546–548.

[1910] Sur une classe remarquable de séries de Taylor, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 27 (1910), p. 43–53.

[1913a] Sur la convergence absolue des séries trigonométriques, *Bull. Soc. Math. France*, 41 (1913), p. 47–53.

[1913b] Sur les conditions d'aplanétisme pour un système optique quelconque, *Bull. Soc. Math. France, Vie de la Société*, 41 (1913), p. 37.

[1913c] Sur les généralisations de la condition des sinus, *Bulletin Astronomique*, 30 (1913), p. 242–249.

[1913d] Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, *Bull. Soc. Math. France*, 41 (1913), p. 113–119.

[1917a] Sur l'aberration sphérique des lentilles épaisses, *Bulletin astronomique*, 34 (1917), p. 67–74.

[1917b] Sur les substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 164 (1917), p. 806–808.

[1917c] Sur les substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 165 (1917), p. 992–995.

[1918a] Sur les équations fonctionnelles et les propriétés de certaines frontières, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 204–206.

[1918b] Sur les suites de fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 167 (1918), p. 1024–1026.

[1919a] Sur l'équation fonctionnelle d'Abel, *Bull. Soc. Math. France, Vie de la Société*, 47 (1919), p. 41–42.

[1919b] Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 47 (1919), p. 161–271.

[1920a] Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 48 (1920), p. 33–94.

[1920b] Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 48 (1920), p. 208–314.

[1921a] Sur les fonctions qui admettent plusieurs théorèmes de multiplication, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 173 (1921), p. 571–573.

[1921b] Sur un groupe de substitutions algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 173 (1921), p. 694–696.

[1921c] Sur l'évanouissement d'une branche de fonction analytique aux points d'une ligne singulière, *Bull. Sci. Math. (2)*, 45 (1921), p. 65–81.

[1921d] Sur les domaines d'existence de certaines fonctions uniformes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 173 (1921), p. 344–346.

[1921e] Sur les propriétés d'une classe de fonctions uniformes analogues aux fonctions fuchsiennes, *Bull. Soc. Math. France, Vie de la Société*, 49 (1921), p. 20.

[1922a] Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant, *Bulletin Astronomique (2)*, 1 (1922), p. 293–301.

[1922b] Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 174 (1922), p. 1162–1165.

[1922c] Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 174 (1922), p. 1330–1332.

[1922d] Sur les fonctions méromorphes de deux variables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 175 (1922), p. 862–865.

[1922e] Sur certaines fonctions uniformes de deux variables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 175 (1922), p. 1030–1033.

[1922f] Note sur les fonctions invariantes par une substitution rationnelle, *Bull. Soc. Math. France*, 50 (1922), p. 37–41.

[1922g] Sur l'itération de certaines fonctions algébriques, *Bull. Sci. Math. (2)*, 46 (1922), p. 188–198.

[1923a] Sur les frontières de certains domaines, *Bull. Soc. Math. France*, 51 (1923), p. 12–22.

[1923b] Sur les fonctions holomorphes et bornées à l'intérieur d'un cercle, *Bull. Soc. Math. France*, 51 (1923), p. 191–202.

[1923c] Sur l'itération analytique et les substitutions permutables, *J. Math. Pures Appl. (9)*, 2 (1923), p. 343–384.

[1923d] Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant, *Bull. Sci. Math. (2)*, 47 (1923), p. 19–40.

[1924a] Sur l'itération analytique et les substitutions permutables (suite), *J. Math. Pures Appl. (9)*, 3 (1924), p. 1–49.

[1924b] Substitutions analytiques et équations fonctionnelles à deux variables, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 41 (1924), p. 67–142.

[1924c] Sur un théorème de M. Picard, *Bull. Soc. Math. France*, 52 (1924), p. 468–484.

[1925a] Sur le mouvement d'un point matériel soumis à l'attraction d'un sphéroïde aplati, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 180 (1925), p. 366–368.

[1925b] Sur une propriété de certaines fonctions analytiques multiformes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 181 (1925), p. 902–904.

[1926] Sur l'itération des fonctions transcendantes entières, *Acta Math.*, 47 (1926), p. 337–370.

[1927a] Sur la recherche des orbites périodiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 185 (1927), p. 35–36.

[1927b] Sur le mouvement des nœuds de certaines orbites, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 184 (1927), p. 1535–1537.

[1928a] Sur le mouvement du périhélie des planètes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 186 (1928), p. 65–67.

[1928b] Sur certains systèmes d'équations différentielles dépendant d'un paramètre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 186 (1928), p. 416–418.

[1928c] Sur le sens du déplacement du nœud de certaines orbites, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 186 (1928), p. 575–576.

[1928d] Observations d'étoiles doubles, *Journal des Observateurs*, 11 (1928), p. 11.

[1928e] Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période, *Bull. Soc. Math. France*, 56 (1928), p. 98–139.

[1929] Sur un critère de stabilité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 189 (1929), p. 967–969.

[1931] Sur le mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation fixe, *Acta Astron. (A)*, 2 (1931), p. 101–164.

Fatou (Pierre) & Giacobini (Michel)
[1924] Observations de la planète Baade, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 179 (1924), p. 963.

Favard (Jean)
[1961] Allocution prononcée à l'école polytechnique pour le quarantième anniversaire de la blessure de guerre du professeur Gaston Julia le 5 janvier 1955, *in* [Julia 1970], (1961), p. 237–240.

Félix (Lucienne)
[1956] Allocution, *in Centenaire d'Émile Picard*, Paris: Imprimerie Pierre Neveu, 1956.

[1974] *Message d'un mathématicien: Henri Lebesgue*, Paris: Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1974.

[2005] *Réflexions d'une agrégée de mathématiques au* XX^{e} *siècle*, Paris: L'Harmattan, 2005.

Fréchet (Maurice)
[1907] Sur l'approximation des fonctions par des suites trigonométriques limitées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 144 (1907), p. 124–125.

[1908] Sur l'approximation des fonctions continues périoiques par les suites trigonométriques limitées, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 25 (1908), p. 43–56.

[1921] Sur les ensembles abstraits, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 38 (1921), p. 341–358.

Frei (Günther) & Stammbach (Urs)
[1999] Heinz Hopf, *in* [James 1999], (1999), p. 991–1008.

Fricke (Robert) & Klein (Felix)
[1897] *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen. Erster Band; Die gruppentheoretischen Grundlagen*, Leipzig: Teubner, 1897.

Gallois (Jean)
[1994] *Ernest Chausson*, Paris: Fayard, 1994.

Galois (Évariste)
[1962] *Écrits et mémoires mathématiques*, Paris: Gauthier-Villars, 1962, Édi-

tion critique intégrale de ses manuscrits et publications, par R. Bourgne et J.-P. Azra.

Galuzzi (Massimo)
[2001] Galois' note on the approximative solutions of numerical equations (1830), *Arch. Hist. Exact Sci.*, 56 (2001), p. 29–37.

Garnier (René)
[1954] Les fonctions automorphes de Poincaré et la géométrie, *in Œuvres complètes de Poincaré, volume 11*, Paris: Gauthier-Villars, 1954.

[1978] Notice nécrologique sur Gaston Julia, *C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique*, 286(22-25) (1978), p. 126–133.

Gateaux (René)
[1919a] Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel et sur la théorie du potentiel, *Bull. Soc. Math. France*, 47 (1919), p. 47–70.

[1919b] Fonctions d'une infinité de variables indépendantes, *Bull. Soc. Math. France*, 47 (1919), p. 70–96.

Gispert (Hélène)
[1983] Sur les fondements de l'analyse en France, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 28 (1983), p. 37–106.

[1991] *La France mathématique*, Cahiers d'histoire & de philosophie des sciences, vol. 34, Paris: Société française d'histoire des sciences et des techniques, 1991.

[1995] La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue... et tous les autres, *Rev. Histoire Math.*, 1 (1995), p. 39–81.

Goldstein (Catherine)
[2009] La théorie des nombres en France dans l'entre-deux-guerres, *Revue d'histoire des sciences*, 62 (2009), p. 143–175.

Goodstein (Judith R.)
[2007] *The Volterra chronicles*, History of Mathematics, vol. 31, Providence, RI: American Mathematical Society, 2007, The life and times of an extraordinary mathematician 1860–1940.

Gray (Jeremy)
[2006] A history of prizes in mathematics, *in* Carlson (James), Jaffe (Arthur) & Wiles (Andrew), eds., *The Millenium prize problems*, Clay Math. Inst. and Amer. Math. Soc., 2006.

Guiraldenq (Pierre)
[1999] *Émile Borel 1871–1956, L'espace et le temps d'une vie sur deux siècles*, Saint-Affrique: publié par l'auteur, 1999.

Hadamard (Jacques)
[1920] Rapport sur les travaux examinés et retenus par la commission de balistique pendant la durée de la guerre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 170 (1920), p. 436–445.

[1921] L'Œuvre mathématique de Poincaré, *Acta Math.*, 38 (1921), p. 203–287.

HARDY (Godefrey Harold) & LITTLEWOOD (John Edensor)
[1917] Sur la convergence des séries de Fourier et des séries de Taylor, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 165 (1917), p. 1047–1049.

HAUSDORFF (Felix)
[1914] *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig: Veit & Comp, 1914.

[1919] Dimension und äusseres Mass, *Math. Annalen*, 79 (1919), p. 157–179.

[2001] *Gesammelte Werke. Band IV*, Berlin: Springer, 2001.

[2002] *Gesammelte Werke. Band II*, Berlin: Springer, 2002.

HERVÉ (Michel)
[1981] L'œuvre de Gaston Julia, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 2 (1981), p. 1–8.

HILBERT (David)
[1920] Gaston Darboux (1842–1917), *Acta Math.*, 42 (1920), p. 269–273.

HUMBERT (Georges)
[1917] Rapport sur une communication de M. Gaston Julia, intitulée: Sur les substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 165 (1917), p. 1096–1097.

[1918] Sur les représentations d'un entier par certaines formes quadratiques indéfinies, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 581–587.

HURWITZ (Adolf) & PÓLYA (George)
[1916] Zwei Beweise Eines von Herrn Fatou Vermuteten Satzes, *Acta Math.*, 40(1) (1916), p. 179–183, Aus einem Briefwechsel.

JAMES (Ioan), eds.
[1999] *History of topology*, ed. par James (Ioan), Amsterdam: North-Holland, 1999.

JAMES (Ioan)
[2002] *Remarkable mathematicians*, Cambridge University Press, 2002.

JORDAN (Camille)
[1893] *Analyse*, Cours de l'École polytechnique, 1893, Deuxième édition.

[1916] Allocution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 163 (1916), p. 777–787.

JUBILÉMONTEL
[1947] *Jubilé scientifique de M. Paul Montel*, Paris: Gauthier-Villars, 1947.

JULIA (Gaston)
[1913] Sur les lignes singulières de certaines fonctions analytiques, *Bull. Soc. Math. France*, 41 (1913), p. 351–366.

[1917] Sur les substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 165 (1917), p. 1098–1100.

[1918a] Sur l'itération des fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 61–64.

[1918b] Sur des problèmes concernant l'itération des fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 153–156.

[1918c] Sur les substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 599–601.

[1918d] Valeurs limites de l'intégrale de Poisson relative à la sphère, en un point de discontinuité des données, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 770–773.

[1918e] Sur les surfaces définies par une propriété cinématique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 167 (1918), p. 1026–1028.

[1918f] Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. Math. Pures Appl. (8)*, 1 (1918), p. 47–246.

[1919a] Notice sur Paul Lambert, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1919), p. 109–113.

[1919b] Sur quelques problèmes relatifs à l'itération des fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 168 (1919), p. 147–149.

[1919c] Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (premier mémoire), *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 36 (1919), p. 93–125.

[1920a] Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz, *Acta Math.*, 42 (1920), p. 349–355.

[1920b] Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (deuxième mémoire), *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 37 (1920), p. 165–218.

[1921a] Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (troisième mémoire), *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 38 (1921), p. 165–181.

[1921b] Sur la permutabilité des substitutions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 173 (1921), p. 690–693.

[1922] Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 39 (1922), p. 131–215.

[1923] Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 40 (1923), p. 97–150.

[1924a] *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris: Gauthier-Villars, 1924, Rédigées par P. Flamant.

[1924b] Sur quelques applications de la représentation conforme à la résolution d'équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 52 (1924), p. 279–315.

[1932] Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes, Vorhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich, 1932, p. 102–127, Erster Band, Bericht und allgemeine Vorträge.

[1942–1950] La vie et l'œuvre de J.-L. Lagrange, *Enseignement Math.*, 39 (1942–1950), p. 9–21.

[1943] Die Funktionentheorie und die Theorie der Operatoren im Hilbertschen Raum, *Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.*, (1943), 15 pages.

[1968] *Œuvres de Gaston Julia. Vol. I*, Paris: Gauthier-Villars, 1968, Editées par Michel Hervé.

[1970] *Œuvres de Gaston Julia. Vol. VI*, Paris: Gauthier-Villars, 1970, Éditées par Michel Hervé.

[1971] Notice nécrologique sur Louis Antoine, *C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique*, 272 (1971), p. 71–74.

[X] Souvenirs sur Georges Humbert et Camille Jordan, X, origine non déterminée.

Jünger (Ernst)

[1920] *Storm of Steel*, 1920, English transation available.

Kahane (Jean-Pierre)

[2006a] Adrien Douady (25 septembre 1935–2 novembre 2006), (2006), http://www.academie-sciences.fr/membres/D/Douady_Adrien.htm.

[2006b] L'affaire Doeblin: mon souvenir du pli cacheté de Wolfgang Doeblin, *Math. Sci. Hum. Math. Soc. Sci.*, (176) (2006), p. 9–11.

Kahane (Jean-Pierre) & Salem (Raphaël)

[1963] *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris: Hermann, 1963.

Kasner (Edward)

[1913] Conformal geometry, *in* Hobson (E.W.) & Love (A.E.H.), eds., *Proceedings of the fifth international congress of mathematicians (Cambridge, 1912)*, vol. 2, Cambridge: Cambridge University Press, 1913, p. 81–87.

Kline (Morris)

[1972] *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York: Oxford University Press, 1972.

Kœnigs (Gabriel)

[1884] Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 1 (1884), p. 3–41.

[1885] Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 2 (1885), p. 385–404.

Lacassagne (Antoine) & Lattès (J. Samuel)

[1924] Méthode auto-historadiographique pour la détection dans les organes du polonium injecté, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 178 (1924), p. 488–490.

Lambert (Paul)

[1912] Entiers imaginaires, *Nouvelles Annales de mathématiques (4)*, 12 (1912), p. 408–421.

Lampe (Emil)

[1916] Briefe von Ch. Hermite an P. du Bois-Reymond 1875–1888, *Archiv der Math. und Physik*, 24 (1916), p. 193–220 und 289–310, Mitgeteilt von E. Lampe.

Latarjet (Raymond)

[1979] Jeanne Lattès (1888–1979), *Bull. Cancer*, 66 (1979), p. 351–352.

Lattès (Jeanne)

[1926] *Étude, par la méthode d'absorbtion, du rayonnement du radium et de son rayonnement secondaire*, Thèse, Paris, 1926.

Lattès (Samuel)

[1911] Sur les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double, *Bull. Soc. Math. France*, 39 (1911), p. 309–345.

[1915] Sur les suites récurrentes non linéaires et sur les fonctions génératrices de ces suites, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (3)*, 3 (1915), p. 73–124.

[1918a] Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 26–28.

[1918b] Sur l'itération des substitutions rationnelles à deux variables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 151–153.

[1918c] Sur l'itération des fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 486–489.

Le Lionnais (François), eds.

[1948] *Les grands courants de la pensée mathématique*, ed. par Le Lionnais (François), Cahiers du Sud, 1948.

Leau (Léopold)

[1897] Étude sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, (1897), p. 25–110.

Lebesgue (Henri)

[1906] *Leçons sur les séries trigonométriques*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris: Gauthier-Villars, 1906.

[1991] Lettres d'Henri Lebesgue à Émile Borel, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 12 (1991), p. 1–506.

[2004] *Les lendemains de l'intégrale, lettres d'Henri Lebesgue à Émile Borel*, Paris: Vuibert, 2004.

Leblanc (Maurice)

[1916] *The Shell Shard*, 1916, (L'éclat d'obus).

Legendre (Adrien-Marie)

[1955] *Théorie des nombres, tome II*, Paris: Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1955, reproduction de l'édition de 1830.

Lehto (Olli)

[1998] *Mathematics without borders*, New York: Springer-Verlag, 1998, A history of the International Mathematical Union.

Leloup (Juliette)

[2009] *L'entre-deux guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France*, Thèse, Paris, 2009.

LERAY (Jean)

[1973] Notice sur Henri Villat, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1973), p. 37–39.

LEROUX (Gaston)

[1917] *Rouletabille chez Krupp*, 1917, disponible en livre de poche.

LÉVY (Paul)

[1970] *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien. Introduction. Première partie: Souvenirs mathématiques. Deuxième partie: Considérations philosophiques*, Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1970.

LÉVY (Paul) & FRÉCHET (Maurice)

[2004] *50 ans de correspondance mathématique*, Paris: Hermann, 2004, lettres éditées par Marc Barbut, Bernard Locker, Laurent Mazliak.

LISTING (Johann Benedict)

[1847] *Vorstudien zur Topologie*, Göttingen: Göttinger Studien, 1847.

LORCH (Edgar)

[1951] Obituary: Joseph Fels Ritt, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 57 (1951), p. 307–318.

MALLIAVIN (Paul)

[1989] La vie et l'œuvre de René Garnier, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Gén. Vie Sci.*, 6(6) (1989), p. 569–572.

MANDELBROJT (Szolem)

[1942] Obituary: Émile Picard. 1856–1941, *Amer. Math. Monthly*, 49 (1942), p. 277–278.

[1975] Notice nécrologique sur Paul Montel, *C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique*, 280 (1975), p. 186–188.

[1985] Souvenirs à bâtons rompus de Szolem Mandelbrojt, recueillis en 1970 et préparés par Benoit Mandelbrot, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 6 (1985), p. 1–46.

MANDELBROT (Benoit)

[1982] *The fractal geometry of nature*, San Francisco, Calif.: W. H. Freeman and Co., 1982.

[1983] Self-inverse fractals osculated by sigma-discs and the limit sets of inversion groups, *Math. Intelligencer*, 5(2) (1983), p. 9–17.

MARBO (Camille)

[1968] *À travers deux siècles – Souvenirs et rencontres (1883–1967)*, Paris: Grasset, 1968.

MATHNIÇOIS

[1966] *Paul Montel, mathématicien niçois*, Ville de Nice, 1966.

MAZLIAK (Laurent)

[2007] The ghosts of the Ecole Normale. Life, death and destiny of René Gateaux, (2007), arXiv: 0701490.

Maz'ya (Vladimir) & Shaposhnikova (Tatyana)
[1998] *Jacques Hadamard, A Universal Mathematician*, American Mathematical Society and London Mathematical Society, 1998.

McMullen (Curtis)
[2000] The Mandelbrot set is universal, *in* [Tan 2000], (2000), p. 1–17.

Milloux (Henri)
[1924] Le théorème de M. Picard; suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières, *J. Math. Pures Appl. (9)*, 36 (1924), p. 345–402.

Milnor (John)
[2006a] *Dynamics in one complex variable*, Annals of Mathematics Studies, vol. 160, Princeton, NJ: Princeton University Press, third edition, 2006.

[2006b] On Lattès maps, *in Dynamics on the Riemann sphere*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 9–43.

Mineur (Henri)
[1929] Discours, *le Nouvelliste du Morbihan*, (1929), p. 3, édition du 14 août 1929.

Molk (Jules)
[1912] *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Paris: Gauthier-Villars, 1912.

Montbrial (Thierry de)
[2003] Témoignage d'un élève et d'un collègue, *Gaz. Math.*, (2003), volume spécial Laurent Schwartz (1915–2002).

Montel (Paul)
[1903] Sur l'intégrabilité d'une expression différentielle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 136 (1903), p. 1233–1236.

[1904] Sur les suites de fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 138 (1904), p. 469–471.

[1907] Sur les suites infinies de fonctions, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 24 (1907), p. 233–334.

[1912] Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 29 (1912), p. 487–535.

[1916] Sur les familles normales de fonctions analytiques, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 33 (1916), p. 223–302.

[1917a] Sur la représentation conforme, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 164 (1917), p. 879–881.

[1917b] Sur la représentation conforme, *J. Math. Pures Appl. (7)*, 3 (1917), p. 1–54.

[1919] Notice sur Samuel Lattès, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1919), p. 79–81.

[1927] *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris: Gauthier-Villars, 1927.

[1931a] Sur les couples de polynômes dont les zéros sont entrelacés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 192 (1931), p. 1014–1015.

[1931b] Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés, *Mathematica, Cluj*, 5 (1931), p. 110–129.

[1932] Sur une classe de fonctions méromorphes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 194 (1932), p. 643–645.

[1933] Sur les fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles à termes entrelacés, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 50 (1933), p. 171–196.

[1941] Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 213 (1941), p. 197–200.

[1948] Le rôle des familles de fonctions dans l'analyse mathématiques, *in* [Le Lionnais 1948], (1948), p. 173–178.

[1956] Notice nécrologique sur M. Émile Borel, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 242 (1956), p. 845–850.

[1957] *Leçons sur les récurrences et leurs applicationse*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris: Gauthier-Villars, 1957.

[1966] Anecdotes, *in* [MathNiçois 1966], (1966), p. 147–153.

Mumford (David), Series (Carolyn) & Wright (David)

[2002] *Indra's pearls*, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

Nathan (Henry)

[1971] Fatou, Pierre Joseph Louis, *Dictionary of scientific biography*, 4 (1971), p. 547–548.

Nevanlinna (Rolf)

[1922] Kriterien für die Randwerte beschränkter Funktionen, *Math. Z.*, 13(1) (1922), p. 1–9.

[1961] Allocution prononcée pour le jubilé scientifique de Gaston Julia le 16 décembre 1961, *in* [Julia 1970], (1961), p. 355–357.

Ostrowski (Alexander)

[1925] Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschäfunger des Picardschen Satzes, *Math. Z.*, 24 (1925), p. 213–258.

Painlevé (Paul)

[1918a] Allocution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 17–19.

[1918b] Allocution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 167 (1918), p. 741–742.

[1918c] Allocution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 167 (1918), p. 797–810.

[1975] *Œuvres de Paul Painlevé, Volume III*, Paris: CNRS, 1975.

Pérez Marco (Ricardo)
[1992] Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe (d'après J.-C. Yoccoz), *Astérisque*, (206) (1992), p. 273–310, Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92.

Perrier (Edmond)
[1915] Allocution, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 161 (1915), p. 801–819.

Perrier (Georges)
[1940] Notice nécrologique sur Jules-Louis Breton, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 211 (1940), p. 85–87.

Pfeiffer (George A.)
[1917] On the conformal mapping of curvilinear angles. The functional equation $\phi[f(x)] = a_1\phi(x)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18 (1917), p. 185–198.

Picard (Émile)
[1879] Sur une propriété des fonctions entières, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 88 (1879), p. 1024–1027.

[1921] Allocution de clôture, *Congrès international des mathématiciens (Strasbourg 22-30 septembre 1920)*, (1921), p. xxxi–xxxiii.

Pierrard (Pierre)
[1992] Lille, ville allemande, *in 14–18: Mourir pour la patrie*, Points histoire, Paris: Seuil, 1992, p. 242–254.

Piglowski (Jean)
[1911] Note sur le mouvement des projectiles, *Revue de Math. spéc.*, 22 (1911), p. 341.

Pinault (Michel)
[2000] *Frédéric Joliot-Curie*, Paris: Odile Jacob, 2000.

Pincherle (Salvatore)
[1925] Notice sur les travaux, *Acta Math.*, 46 (1925), p. 341–362.

[1929a] Discorso, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, 1 (1929), p. 72–74.

[1929b] Rapporti con gli Istituti scientifici, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, 1 (1929), p. 6–10.

Poggendorff (Johann Christian)
[1922] *Biographisch-literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften*, Leipzig: Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, 1922.

Poincaré (Henri)
[1883] Mémoire sur les groupes kleinéens, *Acta Mathematica*, 3 (1883), p. 49–92.

[1890] Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes, *J. Math. Pures Appl. (4)*, 6 (1890), p. 313–365.

[1905] Sur la dynamique de l'électron, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 140 (1905), p. 1504–1508.

Purkert (Walter)
[2002] Grundzüge der Mengenlehre — Historische Einführung, *in* [Hausdorff 2002], (2002), p. 1–89.

Reid (Constance)
[1976] *Courant in Göttingen and New York*, New York: Springer-Verlag, 1976, The story of an improbable mathematician.

Remarque (Erich Maria)
[1928] *All Quiet on the Western Front*, 1928, English translation available.

Remmert (Volker)
[2000] Mathematical publishing in the Third Reich: Springer-Verlag and the Deutsche Mathematiker-Vereinigung, *Math. Intell.*, 22(3) (2000), p. 22–30.

Riesz (Frédéric) & Riesz (Marcel)
[1916] Ueber die Randwerte einer Analytischen Funktion, *in 4e Congrès des mathématiciens scandinaves*, Stockholm, 1916.

Riesz (Marcel)
[1916a] Ein konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen, *Acta Math.*, 40 (1916), p. 349–361.

[1916b] Neuer Beweis des Fatouschen Satzes, *Gött. Nachr.*, (1916), p. 62–65.

Rippon (Phil)
[2005] Obituary Irvine Noel Baker (1932–2001), *Bull. London Math. Soc.*, 37 (2005), p. 301–315.

Ritt (Joseph Fels)
[1918] Sur l'itération des fractions rationnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166 (1918), p. 380–381.

[1920] On the iteration of rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 21(3) (1920), p. 348–356.

[1923] Permutable rational functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 25 (1923), p. 399–448.

Roubaud (Jacques)
[1997] *Mathématique: (récit)*, Fiction & Cie, Paris: Seuil, 1997.

Roussy (Gustave)
[1947] Allocution, *in* [JubiléMontel 1947], (1947), p. 7–10.

Rudin (Walter)
[1966] *Real and complex analysis*, New York: McGraw Hill, 1966.

Russell (Bertrand)
[1911] Sur les axiomes de l'infini et du transfini, *Bull. Soc. Math. France, Vie de la Société*, 39 (1911), p. 488–501.

RÜSSMANN (Helmut)
[1967] Über die Iteration analytischer Funktionen, *J. Math. Mech.*, 17 (1967), p. 523–532.

SAINT-MARTIN (Arnaud)
[2008] *L'office et le télescope. Une sociologie historique de l'astronomie française, 1900-1940*, Thèse, Université de Paris-Sorbonne, 2008.

SARTRE (Louis)
[1948] Notice sur Paul Flamant, *Annuaire de l'association amicale des anciens élèves de l'École Normale Supérieure*, (1948), p. 47–50.

SCHOENFLIES (Arthur)
[1913] *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Leipzig: Teubner, 1913.

SCHRÖDER (Ernst)
[1871] Ueber iterirte Functionen, *Math. Ann.*, 3 (1871), p. 296–322.

SCHWARTZ (Laurent)
[1997] *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Paris: Odile Jacob, 1997.

SEGAL (Sanford)
[2003] *Mathematicians under the Nazis*, Princeton: Princeton University Press, 2003.

[2008] *Nine introductions in complex analysis*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 208, Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2008.

SIEGEL (Carl Ludwig)
[1942] Iterations of analytic functions, *Ann. Math.*, 43 (1942), p. 807–812.

[1978] On the history of the Frankfurt Mathematics Seminar, *Math. Intelligencer*, 1(4) (1978), p. 223–230, talk given in Frankfurt in 1964, original text *Zur Geschichte des Frankfurter Mathematischen Seminars* in the complete works of Siegel.

SIEGMUND-SCHULTZE (Reinhard)
[2005] Maurice Fréchet à Strasbourg, *in* [Crawford & Olff-Nathan 2005], (2005), p. 185–196.

SIERPINSKI (Waclaw)
[1915] Sur une courbe dont tout point est un point de ramification, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 160 (1915), p. 302–305.

SIMON (Claude)
[1989] *The acacia*, 1989, (L'acacia) English translation available.

SINGER (Claude)
[1997] *L'Université libérée, l'université épurée 1943–1947*, Paris: Les Belles lettres, 1997.

SIRINELLI (Jean-François)
[1992] La génération du feu, *in 14–18: Mourir pour la patrie*, Points histoire, Paris: Seuil, 1992, p. 298–312.

Smith (Henry J. Stephen)
[1874] On the integration of discontinuous functions, *Proc. London Math. Soc.*, 6 (1874), p. 140–153.

Steinmetz (Norbert)
[1993] *Rational iteration*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 16, Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1993.

Sullivan (Dennis)
[1985] Quasiconformal homeomorphisms, *Ann. of Math. (2)*, 122 (1985), p. 401–418.

Tan (Lei), eds.
[2000] *The Mandelbrot set, theme and variations*, ed. par Tan (Lei), London mathematical society lecture note series, Cambridge: Cambridge university press, 2000.

Taylor (Angus)
[1982] A Study of Maurice Fréchet: I His Early Work on Point Set Theory and the Theory of Functionals, *Archive for History of Exact Sciences*, 27 (1982), p. 233–295.

[1985] A Study of Maurice Fréchet: II Mainly about his Work on General Topology, *Archive for History of Exact Sciences*, 34 (1985), p. 279–380.

Taylor (Angus) & Dugac (Pierre)
[1981] Quatre lettres de Lebesgue à Fréchet, *Rev. Hist. Sci.*, 34 (1981), p. 149–169.

Thebaud (Françoise)
[1992] Au travail, les femmes et les étrangers!, *in 14–18: Mourir pour la patrie*, Points histoire, Paris: Seuil, 1992, p. 228–241.

van Dalen (Dirk) & Remmert (Volker R.)
[2006] The birth and youth of Compositio Mathematica: 'Ce périodique foncièrement international', *Compos. Math.*, 142 (2006), p. 1083–1102.

Véron (Philippe)
[2004] Dictionnaire biographique des astronomes français (1850-1950), 2004, non publié.

von Koch (Helge)
[1906] Une méthode élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, *Acta Math.*, 30 (1906), p. 145–174.

Weil (André)
[1992] *The Apprenticeship of a Mathematician*, Basel: Birkhäuser, 1992, Translated from the French by Jennifer Gage.

Wolff (Julius)
[1926] Sur l'itération des fonctions bornées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 182 (1926), p. 200–201.

Yoccoz (Jean-Christophe)
[1995] Petits diviseurs en dimension 1, *Astérisque*, 231 (1995).

[1999] Dynamique des polynômes quadratiques. Notes rédigés par Marguerite Flexor, *in* [Cerveau et al. 1999], (1999), p. 187–222.

Young (William) & Chisholm Young (Grace)
[1906] *The Theory of sets of points*, Cambridge: Cambridge University Press, 1906.

Zerner (Martin)
[1991] Joseph Bertrand, *in* [Gispert 1991], p. 298–322.

Zoretti (Ludovic)
[1912] Les ensembles de points, *in* [Molk 1912], 2 (1912), p. 113–170.

Index

Lecture Notes in Mathematics

For information about earlier volumes
please contact your bookseller or Springer
LNM Online archive: springerlink.com

Vol. 1824: J. A. Navarro González, J. B. Sancho de Salas, $\mathcal{C}^{\infty}$ – Differentiable Spaces (2003)
Vol. 1825: J. H. Bramble, A. Cohen, W. Dahmen, Multiscale Problems and Methods in Numerical Simulations, Martina Franca, Italy 2001. Editor: C. Canuto (2003)
Vol. 1826: K. Dohmen, Improved Bonferroni Inequalities via Abstract Tubes. Inequalities and Identities of Inclusion-Exclusion Type. VIII, 113 p, 2003.
Vol. 1827: K. M. Pilgrim, Combinations of Complex Dynamical Systems. IX, 118 p, 2003.
Vol. 1828: D. J. Green, Grbner Bases and the Computation of Group Cohomology. XII, 138 p, 2003.
Vol. 1829: E. Altman, B. Gaujal, A. Hordijk, Discrete-Event Control of Stochastic Networks: Multimodularity and Regularity. XIV, 313 p, 2003.
Vol. 1830: M. I. Gil', Operator Functions and Localization of Spectra. XIV, 256 p, 2003.
Vol. 1831: A. Connes, J. Cuntz, E. Guentner, N. Higson, J. E. Kaminker, Noncommutative Geometry, Martina Franca, Italy 2002. Editors: S. Doplicher, L. Longo (2004)
Vol. 1832: J. Azéma, M. Émery, M. Ledoux, M. Yor (Eds.), Séminaire de Probabilités XXXVII (2003)
Vol. 1833: D.-Q. Jiang, M. Qian, M.-P. Qian, Mathematical Theory of Nonequilibrium Steady States. On the Frontier of Probability and Dynamical Systems. IX, 280 p, 2004.
Vol. 1834: Yo. Yomdin, G. Comte, Tame Geometry with Application in Smooth Analysis. VIII, 186 p, 2004.
Vol. 1835: O.T. Izhboldin, B. Kahn, N.A. Karpenko, A. Vishik, Geometric Methods in the Algebraic Theory of Quadratic Forms. Summer School, Lens, 2000. Editor: J.-P. Tignol (2004)
Vol. 1836: C. Năstăsescu, F. Van Oystaeyen, Methods of Graded Rings. XIII, 304 p, 2004.
Vol. 1837: S. Tavaré, O. Zeitouni, Lectures on Probability Theory and Statistics. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXI-2001. Editor: J. Picard (2004)
Vol. 1838: A.J. Ganesh, N.W. O'Connell, D.J. Wischik, Big Queues. XII, 254 p, 2004.
Vol. 1839: R. Gohm, Noncommutative Stationary Processes. VIII, 170 p, 2004.
Vol. 1840: B. Tsirelson, W. Werner, Lectures on Probability Theory and Statistics. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXII-2002. Editor: J. Picard (2004)
Vol. 1841: W. Reichel, Uniqueness Theorems for Variational Problems by the Method of Transformation Groups (2004)
Vol. 1842: T. Johnsen, A. L. Knutsen, K_3 Projective Models in Scrolls (2004)
Vol. 1843: B. Jefferies, Spectral Properties of Noncommuting Operators (2004)
Vol. 1844: K.F. Siburg, The Principle of Least Action in Geometry and Dynamics (2004)
Vol. 1845: Min Ho Lee, Mixed Automorphic Forms, Torus Bundles, and Jacobi Forms (2004)
Vol. 1846: H. Ammari, H. Kang, Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements (2004)
Vol. 1847: T.R. Bielecki, T. Bjrk, M. Jeanblanc, M. Rutkowski, J.A. Scheinkman, W. Xiong, Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2003 (2004)
Vol. 1848: M. Abate, J. E. Fornaess, X. Huang, J. P. Rosay, A. Tumanov, Real Methods in Complex and CR Geometry, Martina Franca, Italy 2002. Editors: D. Zaitsev, G. Zampieri (2004)
Vol. 1849: Martin L. Brown, Heegner Modules and Elliptic Curves (2004)
Vol. 1850: V. D. Milman, G. Schechtman (Eds.), Geometric Aspects of Functional Analysis. Israel Seminar 2002-2003 (2004)
Vol. 1851: O. Catoni, Statistical Learning Theory and Stochastic Optimization (2004)
Vol. 1852: A.S. Kechris, B.D. Miller, Topics in Orbit Equivalence (2004)
Vol. 1853: Ch. Favre, M. Jonsson, The Valuative Tree (2004)
Vol. 1854: O. Saeki, Topology of Singular Fibers of Differential Maps (2004)
Vol. 1855: G. Da Prato, P.C. Kunstmann, I. Lasiecka, A. Lunardi, R. Schnaubelt, L. Weis, Functional Analytic Methods for Evolution Equations. Editors: M. Iannelli, R. Nagel, S. Piazzera (2004)
Vol. 1856: K. Back, T.R. Bielecki, C. Hipp, S. Peng, W. Schachermayer, Stochastic Methods in Finance, Bressanone/Brixen, Italy, 2003. Editors: M. Fritelli, W. Runggaldier (2004)
Vol. 1857: M. Émery, M. Ledoux, M. Yor (Eds.), Séminaire de Probabilités XXXVIII (2005)
Vol. 1858: A.S. Cherny, H.-J. Engelbert, Singular Stochastic Differential Equations (2005)
Vol. 1859: E. Letellier, Fourier Transforms of Invariant Functions on Finite Reductive Lie Algebras (2005)
Vol. 1860: A. Borisyuk, G.B. Ermentrout, A. Friedman, D. Terman, Tutorials in Mathematical Biosciences I. Mathematical Neurosciences (2005)
Vol. 1861: G. Benettin, J. Henrard, S. Kuksin, Hamiltonian Dynamics – Theory and Applications, Cetraro, Italy, 1999. Editor: A. Giorgilli (2005)
Vol. 1862: B. Helffer, F. Nier, Hypoelliptic Estimates and Spectral Theory for Fokker-Planck Operators and Witten Laplacians (2005)
Vol. 1863: H. Führ, Abstract Harmonic Analysis of Continuous Wavelet Transforms (2005)
Vol. 1864: K. Efstathiou, Metamorphoses of Hamiltonian Systems with Symmetries (2005)
Vol. 1865: D. Applebaum, B.V. R. Bhat, J. Kustermans, J. M. Lindsay, Quantum Independent Increment Processes I. From Classical Probability to Quantum Stochastic Calculus. Editors: M. Schürmann, U. Franz (2005)
Vol. 1866: O.E. Barndorff-Nielsen, U. Franz, R. Gohm, B. Kümmerer, S. Thorbjønsen, Quantum Independent Increment Processes II. Structure of Quantum Lévy Processes, Classical Probability, and Physics. Editors: M. Schürmann, U. Franz, (2005)

Vol. 1867: J. Sneyd (Ed.), Tutorials in Mathematical Biosciences II. Mathematical Modeling of Calcium Dynamics and Signal Transduction. (2005)
Vol. 1868: J. Jorgenson, S. Lang, $\mathrm{Pos}_n(\mathrm{R})$ and Eisenstein Series. (2005)
Vol. 1869: A. Dembo, T. Funaki, Lectures on Probability Theory and Statistics. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXIII-2003. Editor: J. Picard (2005)
Vol. 1870: V.I. Gurariy, W. Lusky, Geometry of Mntz Spaces and Related Questions. (2005)
Vol. 1871: P. Constantin, G. Gallavotti, A.V. Kazhikhov, Y. Meyer, S. Ukai, Mathematical Foundation of Turbulent Viscous Flows, Martina Franca, Italy, 2003. Editors: M. Cannone, T. Miyakawa (2006)
Vol. 1872: A. Friedman (Ed.), Tutorials in Mathematical Biosciences III. Cell Cycle, Proliferation, and Cancer (2006)
Vol. 1873: R. Mansuy, M. Yor, Random Times and Enlargements of Filtrations in a Brownian Setting (2006)
Vol. 1874: M. Yor, M. Émery (Eds.), In Memoriam Paul-Andr Meyer - Sminaire de Probabilits XXXIX (2006)
Vol. 1875: J. Pitman, Combinatorial Stochastic Processes. Ecole d'Et de Probabilits de Saint-Flour XXXII-2002. Editor: J. Picard (2006)
Vol. 1876: H. Herrlich, Axiom of Choice (2006)
Vol. 1877: J. Steuding, Value Distributions of *L*-Functions (2007)
Vol. 1878: R. Cerf, The Wulff Crystal in Ising and Percolation Models, Ecole d'Et de Probabilités de Saint-Flour XXXIV-2004. Editor: Jean Picard (2006)
Vol. 1879: G. Slade, The Lace Expansion and its Applications, Ecole d'Et de Probabilits de Saint-Flour XXXIV-2004. Editor: Jean Picard (2006)
Vol. 1880: S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet, Open Quantum Systems I, The Hamiltonian Approach (2006)
Vol. 1881: S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet, Open Quantum Systems II, The Markovian Approach (2006)
Vol. 1882: S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet, Open Quantum Systems III, Recent Developments (2006)
Vol. 1883: W. Van Assche, F. Marcellàn (Eds.), Orthogonal Polynomials and Special Functions, Computation and Application (2006)
Vol. 1884: N. Hayashi, E.I. Kaikina, P.I. Naumkin, I.A. Shishmarev, Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations (2006)
Vol. 1885: A. Telcs, The Art of Random Walks (2006)
Vol. 1886: S. Takamura, Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves (2006)
Vol. 1887: K. Habermann, L. Habermann, Introduction to Symplectic Dirac Operators (2006)
Vol. 1888: J. van der Hoeven, Transseries and Real Differential Algebra (2006)
Vol. 1889: G. Osipenko, Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms (2006)
Vol. 1890: M. Bunge, J. Funk, Singular Coverings of Toposes (2006)
Vol. 1891: J.B. Friedlander, D.R. Heath-Brown, H. Iwaniec, J. Kaczorowski, Analytic Number Theory, Cetraro, Italy, 2002. Editors: A. Perelli, C. Viola (2006)
Vol. 1892: A. Baddeley, I. Bárány, R. Schneider, W. Weil, Stochastic Geometry, Martina Franca, Italy, 2004. Editor: W. Weil (2007)
Vol. 1893: H. Hanßmann, Local and Semi-Local Bifurcations in Hamiltonian Dynamical Systems, Results and Examples (2007)
Vol. 1894: C.W. Groetsch, Stable Approximate Evaluation of Unbounded Operators (2007)
Vol. 1895: L. Molnár, Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces (2007)
Vol. 1896: P. Massart, Concentration Inequalities and Model Selection, Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIII-2003. Editor: J. Picard (2007)
Vol. 1897: R. Doney, Fluctuation Theory for Lévy Processes, Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXV-2005. Editor: J. Picard (2007)
Vol. 1898: H.R. Beyer, Beyond Partial Differential Equations, On linear and Quasi-Linear Abstract Hyperbolic Evolution Equations (2007)
Vol. 1899: Séminaire de Probabilités XL. Editors: C. Donati-Martin, M. Émery, A. Rouault, C. Stricker (2007)
Vol. 1900: E. Bolthausen, A. Bovier (Eds.), Spin Glasses (2007)
Vol. 1901: O. Wittenberg, Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre 1, Intersections of Two Quadrics and Pencils of Curves of Genus 1 (2007)
Vol. 1902: A. Isaev, Lectures on the Automorphism Groups of Kobayashi-Hyperbolic Manifolds (2007)
Vol. 1903: G. Kresin, V. Maz'ya, Sharp Real-Part Theorems (2007)
Vol. 1904: P. Giesl, Construction of Global Lyapunov Functions Using Radial Basis Functions (2007)
Vol. 1905: C. Prévôt, M. Röckner, A Concise Course on Stochastic Partial Differential Equations (2007)
Vol. 1906: T. Schuster, The Method of Approximate Inverse: Theory and Applications (2007)
Vol. 1907: M. Rasmussen, Attractivity and Bifurcation for Nonautonomous Dynamical Systems (2007)
Vol. 1908: T.J. Lyons, M. Caruana, T. Lévy, Differential Equations Driven by Rough Paths, Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIV-2004 (2007)
Vol. 1909: H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, Y. Yamashita, Punctured Torus Groups and 2-Bridge Knot Groups (I) (2007)
Vol. 1910: V.D. Milman, G. Schechtman (Eds.), Geometric Aspects of Functional Analysis. Israel Seminar 2004-2005 (2007)
Vol. 1911: A. Bressan, D. Serre, M. Williams, K. Zumbrun, Hyperbolic Systems of Balance Laws. Cetraro, Italy 2003. Editor: P. Marcati (2007)
Vol. 1912: V. Berinde, Iterative Approximation of Fixed Points (2007)
Vol. 1913: J.E. Marsden, G. Misiołek, J.-P. Ortega, M. Perlmutter, T.S. Ratiu, Hamiltonian Reduction by Stages (2007)
Vol. 1914: G. Kutyniok, Affine Density in Wavelet Analysis (2007)
Vol. 1915: T. Bıyıkoğlu, J. Leydold, P.F. Stadler, Laplacian Eigenvectors of Graphs. Perron-Frobenius and Faber-Krahn Type Theorems (2007)
Vol. 1916: C. Villani, F. Rezakhanlou, Entropy Methods for the Boltzmann Equation. Editors: F. Golse, S. Olla (2008)
Vol. 1917: I. Veselić, Existence and Regularity Properties of the Integrated Density of States of Random Schrdinger (2008)
Vol. 1918: B. Roberts, R. Schmidt, Local Newforms for GSp(4) (2007)
Vol. 1919: R.A. Carmona, I. Ekeland, A. Kohatsu-Higa, J.-M. Lasry, P.-L. Lions, H. Pham, E. Taflin, Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2004. Editors: R.A. Carmona, E. inlar, I. Ekeland, E. Jouini, J.A. Scheinkman, N. Touzi (2007)

Vol. 1920: S.N. Evans, Probability and Real Trees. Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXV-2005 (2008)
Vol. 1921: J.P. Tian, Evolution Algebras and their Applications (2008)
Vol. 1922: A. Friedman (Ed.), Tutorials in Mathematical BioSciences IV. Evolution and Ecology (2008)
Vol. 1923: J.P.N. Bishwal, Parameter Estimation in Stochastic Differential Equations (2008)
Vol. 1924: M. Wilson, Littlewood-Paley Theory and Exponential-Square Integrability (2008)
Vol. 1925: M. du Sautoy, L. Woodward, Zeta Functions of Groups and Rings (2008)
Vol. 1926: L. Barreira, V. Claudia, Stability of Nonautonomous Differential Equations (2008)
Vol. 1927: L. Ambrosio, L. Caffarelli, M.G. Crandall, L.C. Evans, N. Fusco, Calculus of Variations and Non-Linear Partial Differential Equations. Cetraro, Italy 2005. Editors: B. Dacorogna, P. Marcellini (2008)
Vol. 1928: J. Jonsson, Simplicial Complexes of Graphs (2008)
Vol. 1929: Y. Mishura, Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes (2008)
Vol. 1930: J.M. Urbano, The Method of Intrinsic Scaling. A Systematic Approach to Regularity for Degenerate and Singular PDEs (2008)
Vol. 1931: M. Cowling, E. Frenkel, M. Kashiwara, A. Valette, D.A. Vogan, Jr., N.R. Wallach, Representation Theory and Complex Analysis. Venice, Italy 2004. Editors: E.C. Tarabusi, A. D'Agnolo, M. Picardello (2008)
Vol. 1932: A.A. Agrachev, A.S. Morse, E.D. Sontag, H.J. Sussmann, V.I. Utkin, Nonlinear and Optimal Control Theory. Cetraro, Italy 2004. Editors: P. Nistri, G. Stefani (2008)
Vol. 1933: M. Petkovic, Point Estimation of Root Finding Methods (2008)
Vol. 1934: C. Donati-Martin, M. Émery, A. Rouault, C. Stricker (Eds.), Séminaire de Probabilités XLI (2008)
Vol. 1935: A. Unterberger, Alternative Pseudodifferential Analysis (2008)
Vol. 1936: P. Magal, S. Ruan (Eds.), Structured Population Models in Biology and Epidemiology (2008)
Vol. 1937: G. Capriz, P. Giovine, P.M. Mariano (Eds.), Mathematical Models of Granular Matter (2008)
Vol. 1938: D. Auroux, F. Catanese, M. Manetti, P. Seidel, B. Siebert, I. Smith, G. Tian, Symplectic 4-Manifolds and Algebraic Surfaces. Cetraro, Italy 2003. Editors: F. Catanese, G. Tian (2008)
Vol. 1939: D. Boffi, F. Brezzi, L. Demkowicz, R.G. Durán, R.S. Falk, M. Fortin, Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions, and Applications. Cetraro, Italy 2006. Editors: D. Boffi, L. Gastaldi (2008)
Vol. 1940: J. Banasiak, V. Capasso, M.A.J. Chaplain, M. Lachowicz, J. Miękisz, Multiscale Problems in the Life Sciences. From Microscopic to Macroscopic. Będlewo, Poland 2006. Editors: V. Capasso, M. Lachowicz (2008)
Vol. 1941: S.M.J. Haran, Arithmetical Investigations. Representation Theory, Orthogonal Polynomials, and Quantum Interpolations (2008)
Vol. 1942: S. Albeverio, F. Flandoli, Y.G. Sinai, SPDE in Hydrodynamic. Recent Progress and Prospects. Cetraro, Italy 2005. Editors: G. Da Prato, M. Rckner (2008)
Vol. 1943: L.L. Bonilla (Ed.), Inverse Problems and Imaging. Martina Franca, Italy 2002 (2008)
Vol. 1944: A. Di Bartolo, G. Falcone, P. Plaumann, K. Strambach, Algebraic Groups and Lie Groups with Few Factors (2008)
Vol. 1945: F. Brauer, P. van den Driessche, J. Wu (Eds.), Mathematical Epidemiology (2008)
Vol. 1946: G. Allaire, A. Arnold, P. Degond, T.Y. Hou, Quantum Transport. Modelling, Analysis and Asymptotics. Cetraro, Italy 2006. Editors: N.B. Abdallah, G. Frosali (2008)
Vol. 1947: D. Abramovich, M. Mariño, M. Thaddeus, R. Vakil, Enumerative Invariants in Algebraic Geometry and String Theory. Cetraro, Italy 2005. Editors: K. Behrend, M. Manetti (2008)
Vol. 1948: F. Cao, J-L. Lisani, J-M. Morel, P. Mus, F. Sur, A Theory of Shape Identification (2008)
Vol. 1949: H.G. Feichtinger, B. Helffer, M.P. Lamoureux, N. Lerner, J. Toft, Pseudo-Differential Operators. Quantization and Signals. Cetraro, Italy 2006. Editors: L. Rodino, M.W. Wong (2008)
Vol. 1950: M. Bramson, Stability of Queueing Networks, Ecole d'Eté de Probabilits de Saint-Flour XXXVI-2006 (2008)
Vol. 1951: A. Moltó, J. Orihuela, S. Troyanski, M. Valdivia, A Non Linear Transfer Technique for Renorming (2009)
Vol. 1952: R. Mikhailov, I.B.S. Passi, Lower Central and Dimension Series of Groups (2009)
Vol. 1953: K. Arwini, C.T.J. Dodson, Information Geometry (2008)
Vol. 1954: P. Biane, L. Bouten, F. Cipriani, N. Konno, N. Privault, Q. Xu, Quantum Potential Theory. Editors: U. Franz, M. Schuermann (2008)
Vol. 1955: M. Bernot, V. Caselles, J.-M. Morel, Optimal Transportation Networks (2008)
Vol. 1956: C.H. Chu, Matrix Convolution Operators on Groups (2008)
Vol. 1957: A. Guionnet, On Random Matrices: Macroscopic Asymptotics, Ecole d'Eté de Probabilits de Saint-Flour XXXVI-2006 (2009)
Vol. 1958: M.C. Olsson, Compactifying Moduli Spaces for Abelian Varieties (2008)
Vol. 1959: Y. Nakkajima, A. Shiho, Weight Filtrations on Log Crystalline Cohomologies of Families of Open Smooth Varieties (2008)
Vol. 1960: J. Lipman, M. Hashimoto, Foundations of Grothendieck Duality for Diagrams of Schemes (2009)
Vol. 1961: G. Buttazzo, A. Pratelli, S. Solimini, E. Stepanov, Optimal Urban Networks via Mass Transportation (2009)
Vol. 1962: R. Dalang, D. Khoshnevisan, C. Mueller, D. Nualart, Y. Xiao, A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations (2009)
Vol. 1963: W. Siegert, Local Lyapunov Exponents (2009)
Vol. 1964: W. Roth, Operator-valued Measures and Integrals for Cone-valued Functions and Integrals for Cone-valued Functions (2009)
Vol. 1965: C. Chidume, Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations (2009)
Vol. 1966: D. Deng, Y. Han, Harmonic Analysis on Spaces of Homogeneous Type (2009)
Vol. 1967: B. Fresse, Modules over Operads and Functors (2009)
Vol. 1968: R. Weissauer, Endoscopy for GSP(4) and the Cohomology of Siegel Modular Threefolds (2009)
Vol. 1969: B. Roynette, M. Yor, Penalising Brownian Paths (2009)
Vol. 1970: M. Biskup, A. Bovier, F. den Hollander, D. Ioffe, F. Martinelli, K. Netočný, F. Toninelli, Methods of Contemporary Mathematical Statistical Physics. Editor: R. Kotecký (2009)

Vol. 1971: L. Saint-Raymond, Hydrodynamic Limits of the Boltzmann Equation (2009)
Vol. 1972: T. Mochizuki, Donaldson Type Invariants for Algebraic Surfaces (2009)
Vol. 1973: M.A. Berger, L.H. Kauffmann, B. Khesin, H.K. Moffatt, R.L. Ricca, De W. Sumners, Lectures on Topological Fluid Mechanics. Cetraro, Italy 2001. Editor: R.L. Ricca (2009)
Vol. 1974: F. den Hollander, Random Polymers: École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXVII – 2007 (2009)
Vol. 1975: J.C. Rohde, Cyclic Coverings, Calabi-Yau Manifolds and Complex Multiplication (2009)
Vol. 1976: N. Ginoux, The Dirac Spectrum (2009)
Vol. 1977: M.J. Gursky, E. Lanconelli, A. Malchiodi, G. Tarantello, X.-J. Wang, P.C. Yang, Geometric Analysis and PDEs. Cetraro, Italy 2001. Editors: A. Ambrosetti, S.-Y.A. Chang, A. Malchiodi (2009)
Vol. 1978: M. Qian, J.-S. Xie, S. Zhu, Smooth Ergodic Theory for Endomorphisms (2009)
Vol. 1979: C. Donati-Martin, M. Émery, A. Rouault, C. Stricker (Eds.), Śeminaire de Probablitiés XLII (2009)
Vol. 1980: P. Graczyk, A. Stos (Eds.), Potential Analysis of Stable Processes and its Extensions (2009)
Vol. 1981: M. Chlouveraki, Blocks and Families for Cyclotomic Hecke Algebras (2009)
Vol. 1982: N. Privault, Stochastic Analysis in Discrete and Continuous Settings. With Normal Martingales (2009)
Vol. 1983: H. Ammari (Ed.), Mathematical Modeling in Biomedical Imaging I. Electrical and Ultrasound Tomographies, Anomaly Detection, and Brain Imaging (2009)
Vol. 1984: V. Caselles, P. Monasse, Geometric Description of Images as Topographic Maps (2010)
Vol. 1985: T. Linß, Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems (2010)
Vol. 1986: J.-P. Antoine, C. Trapani, Partial Inner Product Spaces. Theory and Applications (2009)
Vol. 1987: J.-P. Brasselet, J. Seade, T. Suwa, Vector Fields on Singular Varieties (2010)
Vol. 1988: M. Broué, Introduction to Complex Reflection Groups and Their Braid Groups (2010)
Vol. 1989: I.M. Bomze, V. Demyanov, Nonlinear Optimization. Cetraro, Italy 2007. Editors: G. di Pillo, F. Schoen (2010)
Vol. 1990: S. Bouc, Biset Functors for Finite Groups (2010)
Vol. 1991: F. Gazzola, H.-C. Grunau, G. Sweers, Polyharmonic Boundary Value Problems (2010)
Vol. 1992: A. Parmeggiani, Spectral Theory of Non-Commutative Harmonic Oscillators: An Introduction (2010)
Vol. 1993: P. Dodos, Banach Spaces and Descriptive Set Theory: Selected Topics (2010)
Vol. 1994: A. Baricz, Generalized Bessel Functions of the First Kind (2010)
Vol. 1995: A.Y. Khapalov, Controllability of Partial Differential Equations Governed by Multiplicative Controls (2010)
Vol. 1996: T. Lorenz, Mutational Analysis. A Joint Framework for Cauchy Problems *In* and *Beyond* Vector Spaces (2010)
Vol. 1997: M. Banagl, Intersection Spaces, Spatial Homology Truncation, and String Theory (2010)
Vol. 1998: M. Abate, E. Bedford, M. Brunella, T.-C. Dinh, D. Schleicher, N. Sibony, Holomorphic Dynamical Systems. Cetraro, Italy 2008. Editors: G. Gentili, J. Guenot, G. Patrizio (2010)
Vol. 1999: H. Schoutens, The Use of Ultraproducts in Commutative Algebra (2010)
Vol. 2000: H. Yserentant, Regularity and Approximability of Electronic Wave Functions (2010)
Vol. 2001: T. Duquesne, O. Reichmann, K.-i. Sato, C. Schwab, Lévy Matters I. Editors: O.E. Barndorff-Nielson, J. Bertoin, J. Jacod, C. Klüppelberg (2010)
Vol. 2002: C. Pötzsche, Geometric Theory of Discrete Nonautonomous Dynamical Systems (2010)
Vol. 2003: A. Cousin, S. Crépey, O. Guéant, D. Hobson, M. Jeanblanc, J.-M. Lasry, J.-P. Laurent, P.-L. Lions, P. Tankov, Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2010. Editors: R.A. Carmona, E. Cinlar, I. Ekeland, E. Jouini, J.A. Scheinkman, N. Touzi (2010)
Vol. 2004: K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations (2010)
Vol. 2005: W. Yuan, W. Sickel, D. Yang, Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel (2011)
Vol. 2006: C. Donati-Martin, A. Lejay, W. Rouault (Eds.), Séminaire de Probabilités XLIII (2011)
Vol. 2007: E. Bujalance, F.J. Cirre, J.M. Gamboa, G. Gromadzki, Symmetries of Compact Riemann Surfaces (2010)
Vol. 2008: P.F. Baum, G. Cortiñas, R. Meyer, R. Sánchez-García, M. Schlichting, B. Toën, Topics in Algebraic and Topological K-Theory. Editor: G. Cortiñas (2011)
Vol. 2009: J.-L. Colliot-Thélène, P.S. Dyer, P. Vojta, Arithmetic Geometry. Cetraro, Italy 2007. Editors: P. Corvaja, C. Gasbarri (2011)
Vol. 2010: A. Farina, A. Klar, R.M.M. Mattheij, A. Mikelić, N. Siedow, Mathematical Models in the Manufacturing of Glass. Cetraro, Italy 2008. Editor: A. Fasano (2011)
Vol. 2011: B. Andrews, C. Hopper, The Ricci Flow in Riemannian Geometry, A Complete Proof of the Differentiable 1/4-Pinching Sphere Theorem (2011)
Vol. 2012: A. Etheridge, Some Mathematical Models from Population Genetics. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIX-2009 (2011)
Vol. 2013: A. Bobenko, C. Klein (Eds.), Computational Approach to Riemann Surfaces (2011)
Vol. 2014: M. Audin, Fatou, Julia, Montel. The Great Prize of Mathematical Sciences of 1918, and beyond (2011)

Recent Reprints and New Editions

Vol. 1702: J. Ma, J. Yong, Forward-Backward Stochastic Differential Equations and their Applications. 1999 – Corr. 3rd printing (2007)
Vol. 830: J.A. Green, Polynomial Representations of GL_n, with an Appendix on Schensted Correspondence and Littelmann Paths by K. Erdmann, J.A. Green and M. Schoker 1980 – 2nd corr. and augmented edition (2007)
Vol. 1693: S. Simons, From Hahn-Banach to Monotonicity (Minimax and Monotonicity 1998) – 2nd exp. edition (2008)
Vol. 470: R.E. Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. With a preface by D. Ruelle. Edited by J.-R. Chazottes. 1975 – 2nd rev. edition (2008)
Vol. 523: S.A. Albeverio, R.J. Høegh-Krohn, S. Mazzucchi, Mathematical Theory of Feynman Path Integral. 1976 – 2nd corr. and enlarged edition (2008)
Vol. 1764: A. Cannas da Silva, Lectures on Symplectic Geometry 2001 – Corr. 2nd printing (2008)

LECTURE NOTES IN MATHEMATICS Springer

Edited by J.-M. Morel, F. Takens, B. Teissier, P.K. Maini

Editorial Policy (for the publication of monographs)

1. Lecture Notes aim to report new developments in all areas of mathematics and their applications - quickly, informally and at a high level. Mathematical texts analysing new developments in modelling and numerical simulation are welcome.

   Monograph manuscripts should be reasonably self-contained and rounded off. Thus they may, and often will, present not only results of the author but also related work by other people. They may be based on specialised lecture courses. Furthermore, the manuscripts should provide sufficient motivation, examples and applications. This clearly distinguishes Lecture Notes from journal articles or technical reports which normally are very concise. Articles intended for a journal but too long to be accepted by most journals, usually do not have this "lecture notes" character. For similar reasons it is unusual for doctoral theses to be accepted for the Lecture Notes series, though habilitation theses may be appropriate.

2. Manuscripts should be submitted either online at www.editorialmanager.com/lnm to Springer's mathematics editorial in Heidelberg, or to one of the series editors. In general, manuscripts will be sent out to 2 external referees for evaluation. If a decision cannot yet be reached on the basis of the first 2 reports, further referees may be contacted: The author will be informed of this. A final decision to publish can be made only on the basis of the complete manuscript, however a refereeing process leading to a preliminary decision can be based on a pre-final or incomplete manuscript. The strict minimum amount of material that will be considered should include a detailed outline describing the planned contents of each chapter, a bibliography and several sample chapters.

   Authors should be aware that incomplete or insufficiently close to final manuscripts almost always result in longer refereeing times and nevertheless unclear referees' recommendations, making further refereeing of a final draft necessary.

   Authors should also be aware that parallel submission of their manuscript to another publisher while under consideration for LNM will in general lead to immediate rejection.

3. Manuscripts should in general be submitted in English. Final manuscripts should contain at least 100 pages of mathematical text and should always include

   - a table of contents;
   - an informative introduction, with adequate motivation and perhaps some historical remarks: it should be accessible to a reader not intimately familiar with the topic treated;
   - a subject index: as a rule this is genuinely helpful for the reader.

   For evaluation purposes, manuscripts may be submitted in print or electronic form (print form is still preferred by most referees), in the latter case preferably as pdf- or zipped ps-files. Lecture Notes volumes are, as a rule, printed digitally from the authors' files. To ensure best results, authors are asked to use the LaTeX2e style files available from Springer's web-server at:

   ftp://ftp.springer.de/pub/tex/latex/svmonot1/ (for monographs) and
   ftp://ftp.springer.de/pub/tex/latex/svmultt1/ (for summer schools/tutorials).
   Additional technical instructions, if necessary, are available on request from:
   lnm@springer.com.

4. Careful preparation of the manuscripts will help keep production time short besides ensuring satisfactory appearance of the finished book in print and online. After acceptance of the manuscript authors will be asked to prepare the final LaTeX source files and also the corresponding dvi-, pdf- or zipped ps-file. The LaTeX source files are essential for producing the full-text online version of the book (see
http://www.springerlink.com/openurl.asp?genre=journal&issn=0075-8434 for the existing online volumes of LNM).
   The actual production of a Lecture Notes volume takes approximately 12 weeks.

5. Authors receive a total of 50 free copies of their volume, but no royalties. They are entitled to a discount of 33.3% on the price of Springer books purchased for their personal use, if ordering directly from Springer.

6. Commitment to publish is made by letter of intent rather than by signing a formal contract. Springer-Verlag secures the copyright for each volume. Authors are free to reuse material contained in their LNM volumes in later publications: a brief written (or e-mail) request for formal permission is sufficient.

Addresses:

Professor J.-M. Morel, CMLA,
École Normale Supérieure de Cachan,
61 Avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France
E-mail: Jean-Michel.Morel@cmla.ens-cachan.fr

Professor F. Takens, Mathematisch Instituut,
Rijksuniversiteit Groningen, Postbus 800,
9700 AV Groningen, The Netherlands
E-mail: F.Takens@rug.nl

Professor B. Teissier, Institut Mathématique de Jussieu,
UMR 7586 du CNRS, Équipe "Géométrie et Dynamique",
175 rue du Chevaleret,
75013 Paris, France
E-mail: teissier@math.jussieu.fr

For the "Mathematical Biosciences Subseries" of LNM:

Professor P.K. Maini, Center for Mathematical Biology,
Mathematical Institute, 24-29 St Giles,
Oxford OX1 3LP, UK
E-mail: maini@maths.ox.ac.uk

Springer, Mathematics Editorial, Tiergartenstr. 17,
69121 Heidelberg, Germany,
Tel.: +49 (6221) 487-259
Fax: +49 (6221) 4876-8259
E-mail: lnm@springer.com