Annexe

Un certain nombre de lemmes généraux au sujet des courbes elliptiques à réduction semi-stable sur le corps des fonctions d'un trait hensélien sont utilisés de manière répétée tout au long du texte. Il a semblé plus commode de les rassembler ici, en dépit de leur disparité.

Dans toute l'annexe, on fixe un anneau de valuation discrète R de corps résiduel κ et de corps des fractions K et l'on suppose κ parfait[4] de caractéristique $p \neq 2$ (éventuellement nulle). Si E est une courbe elliptique sur K, on note $\mathscr{E}$ son modèle de Néron au-dessus de R, $\mathscr{E}^0 \subset \mathscr{E}$ la composante neutre de $\mathscr{E}$ et F le κ-schéma en groupes fini étale des composantes connexes de la fibre spéciale de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire la fibre spéciale de $\mathscr{E}/\mathscr{E}^0$. De même, si E' et E'' sont des courbes elliptiques sur K, on désigne par $\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}'^0$, F', $\mathscr{E}''$, $\mathscr{E}''^0$, F'' les objets correspondants. Soit enfin $\overline{\kappa}$ une clôture algébrique de κ.

Lemme A.1 — *Soient* E' *et* E'' *des courbes elliptiques sur* K *et* $\varphi' \colon \mathrm{E}' \to \mathrm{E}''$ *une isogénie. Si* p *ne divise pas* $\deg(\varphi')$*, le morphisme* $\varphi'^0 \colon \mathscr{E}'^0 \to \mathscr{E}''^0$ *induit par* φ' *est un épimorphisme de faisceaux étales sur* Spec(R)*.*

Démonstration — Il suffit de vérifier que φ'^0 est un morphisme de schémas surjectif et étale. Il est surjectif d'après [5, 7.3/6]. Pour qu'il soit étale, il suffit que le morphisme $\mathscr{E}' \to \mathscr{E}''$ induit par φ' le soit, et ceci résulte de [5, 7.3/2 (b) et 7.3/5]. □

Lemme A.2 — *Supposons* R *strictement hensélien. Soient* E' *et* E'' *des courbes elliptiques sur* K *et* $\varphi' \colon \mathrm{E}' \to \mathrm{E}''$ *une isogénie dont le degré n'est pas divisible par* p*. Alors l'application* $\mathrm{E}'(\mathrm{K}) \to \mathrm{E}''(\mathrm{K})$ *induite par* φ' *est surjective si et seulement si l'application* $\mathrm{F}'(\kappa) \to \mathrm{F}''(\kappa)$ *induite par* φ' *l'est.*

Démonstration — Comme R est strictement hensélien, les lignes du diagramme commutatif suivant sont exactes :

[4] Cette hypothèse est sans doute inutile ; elle permet néanmoins d'appliquer la classification de Kodaira-Néron telle qu'on la trouve dans la littérature.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{E}'^0(\mathrm{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{E}'(\mathrm{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{F}'(\kappa) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E}''^0(\mathrm{R}) \arrow[r] & \mathscr{E}''(\mathrm{R}) \arrow[r] & \mathrm{F}''(\kappa) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

La flèche verticale de gauche est surjective d'après le lemme A.1, ce qui permet de conclure, compte tenu que $\mathscr{E}'(\mathrm{R}) = \mathrm{E}'(\mathrm{K})$ et $\mathscr{E}''(\mathrm{R}) = \mathrm{E}''(\mathrm{K})$. $\square$

Proposition A.3 — *Soit* E *une courbe elliptique sur* K*, à réduction multiplicative. Le groupe* $\mathrm{F}(\overline{\kappa})$ *est cyclique. Si de plus* ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K}) \simeq \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$*, le groupe* $\mathrm{F}(\overline{\kappa})$ *est cyclique d'ordre pair. Dans tous les cas, si le* κ*-groupe* F *n'est pas constant, il existe une extension quadratique* ℓ/κ*, unique à isomorphisme près, telle que le* ℓ*-groupe* $\mathrm{F} \otimes_\kappa \ell$ *soit constant. Le groupe* $\mathrm{Gal}(\ell/\kappa)$ *agit alors sur* $\mathrm{F}(\ell)$ *par multiplication par* -1 *(et en particulier* $\mathrm{F}(\kappa)$ *est d'ordre* $\leqslant 2$*).*

Démonstration — Notons $\overline{s}$ le point géométrique de Spec(R) défini par $\overline{\kappa}$ et $\mathrm{E}^\star$ un modèle propre et régulier minimal de E au-dessus de R. Que le groupe $\mathrm{F}(\overline{\kappa})$ soit cyclique est une conséquence bien connue de l'hypothèse de réduction multiplicative ; plus précisément, il résulte de cette hypothèse que la fibre $\mathrm{E}^\star_{\overline{s}}$ de $\mathrm{E}^\star$ au-dessus de $\overline{s}$ est réduite et qu'il existe un générateur $\alpha \in \mathrm{F}(\overline{\kappa})$ et une bijection canonique et $\mathrm{Gal}(\overline{\kappa}/\kappa)$-équivariante m de $\mathrm{F}(\overline{\kappa})$ sur l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathrm{E}^\star_{\overline{s}}$ tels que $\{m(\alpha), m(0), m(-\alpha)\}$ soit exactement l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathrm{E}^\star_{\overline{s}}$ rencontrant $m(0)$.

Faute de référence satisfaisante, nous donnons ici une preuve de cette dernière assertion. (Le cœur de la démonstration se trouve au bas de [53, p. 105].) L'ouvert de lissité de $\mathrm{E}^\star$ sur Spec(R) est canoniquement isomorphe à $\mathscr{E}$ (cf. [64, Ch. IV, §6, Th. 6.1]). La fibre spéciale de $\mathrm{E}^\star$ étant réduite (grâce à l'hypothèse de réduction multiplicative, cf. [64, Ch IV, §9, Th. 8.2]), il en résulte une bijection canonique et $\mathrm{Gal}(\overline{\kappa}/\kappa)$-équivariante entre l'ensemble des composantes irréductibles de la fibre de $\mathrm{E}^\star$ au-dessus de $\overline{s}$ et $\mathrm{F}(\overline{\kappa})$. Pour vérifier qu'elle remplit la condition voulue, on peut supposer R strictement hensélien, puisque la formation du modèle propre et régulier minimal et la formation du modèle de Néron commutent tous deux aux changements de base étales (cf. [47, Chapter 9, Proposition 3.28] et [5, 1.2/2], respectivement). Vu la structure de la fibre spéciale de $\mathrm{E}^\star$ dans le cas de réduction multiplicative (cf. [64, Ch IV, §9, Th. 8.2]), il est possible de numéroter les composantes irréductibles $\mathrm{C}_0, \ldots, \mathrm{C}_{n-1}$ de la fibre spéciale de $\mathrm{E}^\star$ de telle sorte que C_0 soit la composante rencontrant la section nulle, que C_i rencontre transversalement C_{i+1} en un unique point $z_i \in \mathrm{E}^\star$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, où l'on a posé $\mathrm{C}_n = \mathrm{C}_0$, que les z_i soient deux à deux distincts et qu'il n'y ait aucune autre intersection entre les C_i que celles que l'on vient de spécifier. Si $n \leqslant 2$, le groupe $\mathrm{F}(\overline{\kappa})$ est trivial ou isomorphe à $\mathbf{Z}/2$ et il n'y a rien à prouver. Supposons donc que $n > 2$. Il reste seulement à établir que $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_i = \mathrm{C}_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, la somme étant calculée dans $\mathrm{F}(\overline{\kappa})$. Compte tenu que la fibre spéciale de $\mathrm{E}^\star$ est réduite et que R est strictement hensélien, il existe

un point $a \in \mathrm{E(K)}$ qui se spécialise sur C_1. D'après la propriété universelle caractérisant $\mathrm{E}^\star$, l'automorphisme de E de translation par a s'étend en un automorphisme τ de $\mathrm{E}^\star$. La restriction de τ à $\mathscr{E} \subset \mathrm{E}^\star$ est l'automorphisme de $\mathscr{E}$ déduit de la translation par a par la propriété universelle du modèle de Néron ; en particulier, si l'on munit l'ensemble des composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathrm{E}^\star$ de la loi de groupe de $\mathrm{F}(\overline{\kappa})$, l'application τ induit un endomorphisme du groupe $\{\mathrm{C}_0, \ldots, \mathrm{C}_{n-1}\}$. Comme C_0 est le neutre de ce groupe et que $\tau(\mathrm{C}_0) = \mathrm{C}_1$, il suffit, pour conclure, de montrer que $\tau(\mathrm{C}_i) = \mathrm{C}_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Utilisant à nouveau la propriété universelle du modèle de Néron, celle de $\mathrm{E}^\star$ et la comparaison entre $\mathrm{E}^\star$ et $\mathscr{E}$, on voit que la multiplication par -1 sur $\mathscr{E}$ s'étend en un automorphisme $\sigma\colon \mathrm{E}^\star \to \mathrm{E}^\star$. Celui-ci stabilise C_0 puisqu'il stabilise $\mathscr{E}^0$; étant donné que C_0 est κ-isomorphe à $\mathbf{P}^1_\kappa$, que C_0 est ensemblistement la réunion de $\mathscr{E}^0_\kappa$ et de $\{z_{n-1}, z_0\}$, que σ fixe un point de $\mathscr{E}^0_\kappa$ (le neutre du groupe), que la restriction de σ à $\mathscr{E}^0_\kappa$ n'est pas l'identité (c'est la multiplication par -1) et que l'identité est le seul automorphisme de $\mathbf{P}^1_\kappa$ fixant trois points, il est nécessaire que $\sigma(z_0) = z_{n-1}$. Par ailleurs, on a $\tau\sigma = \sigma\tau^{-1}$ puisque cette égalité vaut après restriction à la fibre générique de $\mathrm{E}^\star$. D'autre part, on a $\tau(\{z_{n-1}, z_0\}) = \{z_0, z_1\}$ puisque $\tau(\mathrm{C}_0) = \mathrm{C}_1$ et que τ stabilise le lieu singulier de la fibre spéciale de $\mathrm{E}^\star$. Si l'on avait $\tau(z_0) = z_0$, les relations $\tau\sigma = \sigma\tau^{-1}$ et $\sigma(z_0) = z_{n-1}$ entraîneraient que $\tau(z_{n-1}) = z_{n-1}$, d'où $z_{n-1} \in \{z_0, z_1\}$, ce qui contredirait l'hypothèse selon laquelle $n > 2$. On a donc $\tau(z_0) = z_1$. Le résultat voulu s'en déduit par des considérations purement combinatoires ; en effet, τ agit sur le graphe dont les sommets sont les z_i et dont les arêtes sont les C_i, or le seul automorphisme de ce graphe envoyant C_0 sur C_1 et z_0 sur z_1 est la rotation évidente.

Compte tenu que la propriété que deux composantes irréductibles de la fibre de $\mathrm{E}^\star$ au-dessus de $\overline{s}$ se rencontrent est préservée par l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\kappa}/\kappa)$ et que $m(0)$ est invariant sous $\mathrm{Gal}(\overline{\kappa}/\kappa)$, l'assertion que l'on vient de démontrer suffit à assurer que $\mathrm{Gal}(\overline{\kappa}/\kappa)$ agit soit trivialement sur $\mathrm{F}(\overline{\kappa})$, soit par multiplication par -1 à travers le groupe de Galois d'une extension quadratique ℓ/κ, nécessairement unique à isomorphisme près.

Comme $p \neq 2$, la flèche de spécialisation ${}_2\mathrm{E(K)} \to {}_2\mathscr{E}(\kappa)$ est injective (cf. [5, 7.3/3]). Il s'ensuit que $\mathrm{F}(\overline{\kappa})$ est d'ordre pair si ${}_2\mathrm{E(K)} \simeq \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$, compte tenu que $\mathrm{F}(\overline{\kappa}) = \mathscr{E}(\overline{\kappa})/\mathscr{E}^0(\overline{\kappa})$ et que $\mathscr{E}^0(\overline{\kappa}) \simeq \overline{\kappa}^\star$. □

Rappelons que si E est une courbe elliptique sur K à réduction multiplicative, la fibre spéciale $\mathscr{E}^0_\kappa$ de $\mathscr{E}^0$ est un tore, et l'on dit que E est à réduction multiplicative déployée lorsque ce tore est lui-même déployé. Les tores de dimension 1 sur κ sont classifiés par le groupe $\mathrm{H}^1(\kappa, \mathbf{Z}/2)$, de sorte qu'un tel tore est soit déployé sur κ, soit déployé sur une extension quadratique, unique à isomorphisme près. Ceci fournit une seconde extension quadratique ou triviale de κ naturellement associée à toute courbe elliptique à réduction multiplicative sur K (la première étant donnée par la proposition A.3). Il est

faux que ces deux extensions soient isomorphes en général, mais ce n'est pas non plus loin d'être vrai :

Proposition A.4 — *Soit* E *une courbe elliptique sur* K*, à réduction de type* I_n *avec* $n > 2$*. L'extension quadratique ou triviale minimale* ℓ/κ *telle que le* ℓ*-groupe* $\mathrm{F} \otimes_\kappa \ell$ *soit constant (cf. proposition A.3) est isomorphe à l'extension quadratique ou triviale minimale de* κ *qui déploie le tore* $\mathscr{E}^0_\kappa$*.*

Corollaire A.5 — *Soit* E *une courbe elliptique sur* K*, à réduction multiplicative. Le* κ*-groupe* F *est constant si et seulement si* E *est à réduction multiplicative déployée ou à réduction de type* I_1 *ou* I_2*.*

Démonstration — Si le type de réduction de E est I_1 ou I_2, il est évident que F ne peut être que constant. Sinon, il suffit d'appliquer la proposition A.4. □

Avant de prouver la proposition A.4, rappelons, sans démonstration, une propriété très élémentaire des tores de dimension 1.

Lemme A.6 — *Soit* T *un tore sur* κ*,* $\mathrm{T} \hookrightarrow \mathbf{P}^1_\kappa$ *une* κ*-immersion ouverte et* $x \in \mathbf{P}^1_\kappa \setminus \mathrm{T}$*. L'extension* $\kappa(x)/\kappa$ *est la plus petite extension de* κ *qui déploie le tore* T*.*

Démonstration de la proposition A.4 — La preuve de la proposition A.3 montre que pour toute sous-extension quadratique ou triviale ℓ/κ de $\overline{\kappa}/\kappa$, lorsque $n > 2$, le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\kappa}/\ell)$ agit trivialement sur $\mathrm{F}(\overline{\kappa})$ si et seulement si les points singuliers de la fibre spéciale $\mathrm{E}^\star_\kappa$ de $\mathrm{E}^\star$ sont tous ℓ-rationnels, si et seulement si l'un d'entre eux est ℓ-rationnel. En particulier, notant ℓ/κ l'extension quadratique ou triviale minimale telle que le ℓ-groupe $\mathrm{F} \otimes_\kappa \ell$ soit constant, tous les points singuliers de $\mathrm{E}^\star_\kappa$ ont un corps résiduel κ-isomorphe à ℓ. Par ailleurs, la composante irréductible de $\mathrm{E}^\star_\kappa$ contenant $\mathscr{E}^0_\kappa$ est κ-isomorphe à $\mathbf{P}^1_\kappa$ et le complémentaire de $\mathscr{E}^0_\kappa$ dans cette composante est formé de points singuliers de $\mathrm{E}^\star_\kappa$. Le lemme A.6 permet donc de conclure. □

Le lemme suivant est extrêmement bien connu, mais une démonstration semble plus facile à fournir qu'une référence.

Lemme A.7 — *Soit* E *une courbe elliptique sur* K*, à réduction multiplicative. Choisissons une équation de Weierstrass minimale de* E *et notons* C *la courbe sur* κ *définie par cette équation (c'est donc une cubique plane à point double). Alors la courbe* E *est à réduction multiplicative déployée si et seulement si les pentes des directions tangentes à* C *en son point singulier sont* κ*-rationnelles.*

Démonstration — Comme l'équation de Weierstrass choisie est minimale, la κ-variété $\mathscr{E}^0_\kappa$ est isomorphe à l'ouvert de lissité C^0 de C (cf. [64, Ch. IV, §9, Cor. 9.1]). D'autre part, si $\pi \colon \widetilde{\mathrm{C}} \to \mathrm{C}$ désigne la normalisation de C, le

complémentaire de $\pi^{-1}(\mathrm{C}^0)$ dans $\widetilde{\mathrm{C}}$ est un κ-schéma fini de degré 2, déployé si et seulement si les pentes des directions tangentes à C en son point singulier sont κ-rationnelles. Le lemme A.6 permet de conclure, compte tenu que $\widetilde{\mathrm{C}}$ est κ-isomorphe à $\mathbf{P}^1_\kappa$. □

Comparons maintenant les groupes de composantes connexes des fibres spéciales des modèles de Néron de deux courbes elliptiques 2-isogènes dans le cas de réduction multiplicative.

Proposition A.8 — *Soient* E' *et* E'' *des courbes elliptiques sur* K*, à réduction multiplicative, et* $\varphi' \colon \mathrm{E}' \to \mathrm{E}''$ *une isogénie de degré* 2*. Notons* P' *le* K*-point non nul de* $\mathrm{Ker}(\varphi')$ *et* P'' *le* K*-point non nul de* $\mathrm{Ker}(\varphi'')$*, où* φ'' *est l'isogénie duale de* φ'*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le point* P' *se spécialise dans* $\mathscr{E}'^0(\kappa)$*.*
2. *Le point* P'' *ne se spécialise pas dans* $\mathscr{E}''^0(\kappa)$*.*
3. *Le morphisme* $\mathrm{F}' \to \mathrm{F}''$ *induit par* φ' *est injectif et a pour conoyau* $\mathbf{Z}/2$*.*
4. *Le morphisme* $\mathrm{F}'' \to \mathrm{F}'$ *induit par* φ'' *est surjectif et a pour noyau* $\mathbf{Z}/2$*.*

Démonstration — Comme $p \neq 2$, la courbe elliptique E' admet une équation de Weierstrass minimale de la forme $y^2 = (x-c)(x^2-d)$ avec $c, d \in \mathrm{R}$, telle que le point P' ait pour coordonnées $(x,y) = (c,0)$. Son discriminant est $\Delta' = 16d(c^2-d)^2$. L'hypothèse de réduction multiplicative se traduit par la condition que l'un de d et de c^2-d est inversible dans R et que l'autre ne l'est pas. Il en résulte notamment que l'équation de Weierstrass $y^2 = (x+2c)(x^2-4(c^2-d))$ est minimale. Celle-ci définit une courbe elliptique isomorphe à E'', son discriminant vaut $\Delta'' = 4096d^2(c^2-d)$ et le point P'' a pour coordonnées $(x,y) = (-2c,0)$. Comme les équations de Weierstrass considérées sont minimales, les ouverts de lissité des R-schémas projectifs W' et W'' qu'elles définissent sont respectivement isomorphes à $\mathscr{E}'^0$ et $\mathscr{E}''^0$; un point rationnel de E' (resp. de E'') se spécialise donc sur $\mathscr{E}'^0$ (resp. $\mathscr{E}''^0$) si et seulement si la section de W' (resp. W'') qu'il définit ne rencontre pas le point singulier de la fibre spéciale de W' (resp. W''). En particulier, la condition 1 (resp. la condition 2) équivaut à ce que $d \notin \mathrm{R}^\star$ (resp. $c^2 - d \in \mathrm{R}^\star$), d'où l'équivalence entre 1 et 2.

Notons v la valuation normalisée de K associée à R. Les groupes $\mathrm{F}'(\overline{\kappa})$ et $\mathrm{F}''(\overline{\kappa})$ sont cycliques, d'ordres respectifs $v(\Delta')$ et $v(\Delta'')$ (cf. [64, Step 2, p. 366]). On voit sur les expressions de Δ' et Δ'' que $d \notin \mathrm{R}^\star$ si et seulement si $v(\Delta'') = 2v(\Delta')$, si et seulement si $v(\Delta') \neq 2v(\Delta'')$. L'observation suivante permet donc de conclure : si A et B sont deux groupes cycliques tels que $\mathrm{Card}(\mathrm{B}) = 2\,\mathrm{Card}(\mathrm{A})$ et si $u \colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ et $v \colon \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ sont des morphismes de groupes vérifiant $uv = 2$ et $vu = 2$, on a nécessairement $\mathrm{Ker}(u) = 0$, $\mathrm{Coker}(u) = \mathbf{Z}/2$, $\mathrm{Ker}(v) = \mathbf{Z}/2$ et $\mathrm{Coker}(v) = 0$. □

Corollaire A.9 — *Soient* E' *et* E'' *des courbes elliptiques sur* K*, à réduction multiplicative, et* $\varphi' \colon \mathrm{E}' \to \mathrm{E}''$ *une isogénie de degré 2. Si* E' *n'est pas à réduction de type* I_1 *ou* I_2*, alors l'extension quadratique ou triviale minimale* ℓ/κ *qui déploie le tore* $\mathscr{E}'^0_\kappa$ *est aussi la plus petite extension de* κ *telle que les deux* ℓ*-groupes* $\mathrm{F}' \otimes_\kappa \ell$ *et* $\mathrm{F}'' \otimes_\kappa \ell$ *soient constants.*

Démonstration — Vu la proposition A.4, il suffit de vérifier que pour toute extension ℓ/κ, si le ℓ-groupe $\mathrm{F}' \otimes_\kappa \ell$ est constant, il en va de même de $\mathrm{F}'' \otimes_\kappa \ell$. D'après la proposition A.8, l'un des deux κ-groupes F' et F'' est isomorphe à un sous-groupe de l'autre. Si $\mathrm{F}'' \hookrightarrow \mathrm{F}'$, l'assertion est évidente. Supposons donc que $\mathrm{F}' \hookrightarrow \mathrm{F}''$ et que $\mathrm{F}' \otimes_\kappa \ell$ soit constant. Le groupe $\mathrm{F}'(\ell)$ est d'ordre > 2, compte tenu de l'hypothèse sur E' ; il en résulte que $\mathrm{F}''(\ell)$ est lui aussi d'ordre > 2. La proposition A.3 montre alors que le ℓ-groupe $\mathrm{F}'' \otimes_\kappa \ell$ est nécessairement constant. ☐

Corollaire A.10 — *Mêmes notations que dans la proposition A.8. Soient* $\mathrm{E}'^\star$ *un modèle propre et régulier minimal de* E' *au-dessus de* R *et* $x \in \mathrm{E}'^\star$ *un point en lequel* $\mathrm{E}'^\star \to \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ *n'est pas lisse. Si* E' *est à réduction de type* I_1 *ou* I_2 *et que* P' *se spécialise dans* $\mathscr{E}'^0(\kappa)$*, alors l'extension quadratique ou triviale minimale* ℓ/κ *telle que le* ℓ*-groupe* $\mathrm{F}'' \otimes_\kappa \ell$ *soit constant est* κ*-isomorphe à* $\kappa(x)$*.*

Démonstration — Notons n l'ordre du groupe $\mathrm{F}'(\overline{\kappa})$. D'après la proposition A.8, les courbes elliptiques E' et E'' sont respectivement à réduction de type I_n et I_{2n}. Si $n = 1$, alors $\mathrm{F}'' = \mathbf{Z}/2$ et $\ell = \kappa$, et d'autre part la fibre spéciale de $\mathrm{E}'^\star$ contient un unique point singulier, qui est rationnel ; la conclusion du corollaire est donc satisfaite. Supposons maintenant que $n = 2$. L'extension ℓ/κ est alors la plus petite extension qui déploie le tore $\mathscr{E}''^0_\kappa$ (cf. proposition A.4). Comme les tores $\mathscr{E}'^0_\kappa$ et $\mathscr{E}''^0_\kappa$ sont isomorphes (deux κ-tores isogènes de dimension 1 étant nécessairement isomorphes), le lemme suivant permet de conclure. ☐

Lemme A.11 — *Soient* E *une courbe elliptique sur* K*, à réduction de type* I_2*. Soient* $\mathrm{E}^\star$ *un modèle propre et régulier minimal de* E *au-dessus de* R *et* $x \in \mathrm{E}^\star$ *un point en lequel* $\mathrm{E}^\star \to \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ *n'est pas lisse. L'extension quadratique ou triviale minimale de* κ *qui déploie le tore* $\mathscr{E}^0_\kappa$ *est* κ*-isomorphe à* $\kappa(x)$*.*

Démonstration — Vu la structure de la fibre spéciale de $\mathrm{E}^\star$, et compte tenu que $\mathscr{E}$ est isomorphe à l'ouvert de lissité de $\mathrm{E}^\star$ sur R (cf. [64, Ch. IV, §6, Th. 6.1]), il suffit d'appliquer le lemme A.6. ☐

Voici enfin quelques propriétés spécifiques aux courbes elliptiques dont tous les points d'ordre 2 sont rationnels.

Proposition A.12 — *Soit* E *une courbe elliptique sur* K *telle que* ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K}) \simeq \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$. *Si* R *est hensélien (resp. strictement hensélien), la flèche de spécialisation* $\mathrm{E}(\mathrm{K})/2 \to \mathrm{F}(\kappa)/2$ *est surjective (resp. bijective).*

Démonstration — Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}^0 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow i_\star \mathrm{F} \longrightarrow 0 \tag{A.1}$$

de faisceaux étales sur Spec(R), où $i\colon \mathrm{Spec}(\kappa) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ désigne l'immersion fermée canonique. Si R est strictement hensélien, cette suite reste exacte par passage aux sections globales, d'où il résulte (compte tenu que $\mathrm{E}(\mathrm{K}) = \mathscr{E}(\mathrm{R})$) que le noyau de la flèche de spécialisation $\mathrm{E}(\mathrm{K})/2 \to \mathrm{F}(\kappa)/2$ est un quotient de $\mathscr{E}^0(\mathrm{R})/2$; or ce dernier groupe est nul (cf. lemme A.1).

Il reste à établir la surjectivité de la flèche $\mathrm{E}(\mathrm{K})/2 \to \mathrm{F}(\kappa)/2$ lorsque R est hensélien. Nous allons en fait montrer que $s\colon \mathrm{E}(\mathrm{K}) \to \mathrm{F}(\kappa)$ est surjective. On peut évidemment supposer que E a mauvaise réduction. Comme $p \neq 2$, la flèche de spécialisation ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K}) \to {}_2\mathscr{E}(\kappa)$ est injective (cf. [5, 7.3/3]). D'autre part, le groupe ${}_2\mathscr{E}^0(\kappa)$ est d'ordre $\leqslant 2$ puisque $\mathscr{E}^0(\overline{\kappa}^\star)$ est isomorphe à $\overline{\kappa}$ ou à $\overline{\kappa}^\star$. Compte tenu que ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K})$ est d'ordre 4, il en résulte que s est surjective si $\mathrm{F}(\kappa)$ est d'ordre $\leqslant 2$. Supposons maintenant $\mathrm{F}(\kappa)$ d'ordre > 2. Si E est à réduction multiplicative, la proposition A.3 montre que le κ-groupe F est constant ; comme il est constant et d'ordre > 2, la courbe elliptique E est alors à réduction multiplicative déployée (cf. corollaire A.5). Ainsi le groupe $\mathscr{E}^0_\kappa$ est-il nécessairement isomorphe à $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ ou à $\mathbf{G}_\mathrm{a}$. Dans les deux cas, on a $\mathrm{H}^1(\kappa, \mathscr{E}^0_\kappa) = 0$ (théorème de Hilbert 90 et sa version additive, cf. [60, Ch. X, §1]), d'où l'on déduit, puisque R est hensélien, que $\mathrm{H}^1(\mathrm{R}, \mathscr{E}^0) = 0$ (par exemple à l'aide de la représentabilité des éléments de ce groupe par des torseurs, cf. [50, Theorem 4.3]). L'exactitude de (A.1) est donc préservée par passage aux sections globales, ce qui prouve le résultat voulu. □

Remarque — Voici un exemple montrant que la conclusion de la proposition A.12 peut être en défaut si l'on suppose seulement que ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K}) \neq 0$. Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ sur lequel il existe une conique sans point rationnel, disons $ax^2 + by^2 = 1$ avec $a, b \in k^\star$. Notons C cette conique et considérons la courbe elliptique E sur $k((t))$ définie par l'équation de Weierstrass $y^2 = (x+a)(x^2 - bt^2)$. Elle est à réduction de type I_2, possède un point rationnel d'ordre 2, et l'on vérifie sans peine (par un calcul d'éclatement) que la composante connexe non neutre de la fibre spéciale de son modèle de Néron est k-birationnelle à C, de sorte qu'elle ne possède pas de point rationnel. La flèche de spécialisation $\mathrm{E}(\mathrm{K}) \to \mathrm{F}(\kappa)$ est donc nulle, alors que $\mathrm{F}(\kappa) = \mathbf{Z}/2$.

Lemme A.13 — *Soit* E *une courbe elliptique sur* K*, à réduction multiplicative et telle que* ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K}) \simeq \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$. *Il existe un unique point de* ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K}) \setminus \{0\}$ *qui se spécialise dans* $\mathscr{E}^0(\kappa)$.

Démonstration — Comme la flèche de spécialisation ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K}) \to {}_2\mathscr{E}(\kappa)$ est injective et que ${}_2\mathscr{E}^0(\kappa) = \mathbf{Z}/2$ (puisque $\mathscr{E}^0$ est un tore de dimension 1), l'unicité est claire. Quant à l'existence, il suffit de remarquer que la composée ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K}) \to {}_2\mathscr{E}(\kappa) \to {}_2\mathrm{F}(\kappa)$ ne peut être injective, le groupe ${}_2\mathrm{F}(\kappa)$ étant d'ordre 2 (cf. proposition A.3). □

Proposition A.14 — *Supposons* R *strictement hensélien. Soit* E *une courbe elliptique sur* K, *à réduction multiplicative et telle que* ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K}) \simeq \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$. *Le sous-groupe* $\mathrm{E}(\mathrm{K})/2 \hookrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, {}_2\mathrm{E})$ *est égal à l'image du morphisme*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/2) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, {}_2\mathrm{E})$$

induit par l'inclusion $\mathbf{Z}/2 \subset {}_2\mathrm{E}$ *de l'unique point de* ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K}) \setminus \{0\}$ *qui se spécialise dans* $\mathscr{E}^0(\kappa)$.

Démonstration — Notons $\varphi\colon \mathrm{E} \to \mathrm{E}''$ le quotient de E par l'unique point P de ${}_2\mathrm{E}(\mathrm{K}) \setminus \{0\}$ qui se spécialise dans $\mathscr{E}^0(\kappa)$ et $\varphi''\colon \mathrm{E}'' \to \mathrm{E}$ l'isogénie duale. Il résulte de la proposition A.8 et du lemme A.2 que l'application $\mathrm{E}''(\mathrm{K}) \to \mathrm{E}(\mathrm{K})$ induite par φ'' est surjective. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_2\mathrm{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{E} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/2 \arrow[r] & \mathrm{E}'' \arrow[r, "\varphi''"] & \mathrm{E} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes, permet d'en déduire la nullité de la composée

$$\mathrm{E}(\mathrm{K})/2 \hookrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, {}_2\mathrm{E}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{K}, \mathbf{Z}/2),$$

où la seconde flèche est induite par la flèche ${}_2\mathrm{E} \to \mathbf{Z}/2$ de quotient par P, d'où le résultat. □

Remarque — On se gardera de croire que la proposition A.14 affirme quoi que ce soit au sujet des classes dans $\mathrm{E}(\mathrm{K})/2$ des points d'ordre 2 de E. Ces classes sont toutes nulles dès que le type de réduction de E est I_n avec $n > 2$ (sous l'hypothèse que R est strictement hensélien).

Bibliographie

1. A. O. Bender et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Solubility of certain pencils of curves of genus* 1*, and of the intersection of two quadrics in* $\mathbf{P}^4$, Proc. London Math. Soc. (3) **83** (2001), no. 2, 299–329.
2. A. O. Bender et O. Wittenberg, *A potential analogue of Schinzel's hypothesis for polynomials with coefficients in* $\mathbf{F}_q[t]$, Int. Math. Res. Not. **2005** (2005), no. 36, 2237–2248.
3. B. J. Birch et H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Notes on elliptic curves, I*, J. reine angew. Math. **212** (1963), 7–25.
4. ———, *The Hasse problem for rational surfaces*, J. reine angew. Math. **274/275** (1975), 164–174, Collection of articles dedicated to Helmut Hasse on his seventy-fifth birthday, III.
5. S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
6. M. Bright, *Computations on diagonal quartic surfaces*, thèse, Cambridge, 2002.
7. A. Brumer, *Remarques sur les couples de formes quadratiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **286** (1978), no. 16, A679–A681.
8. J. W. S. Cassels, *Second descents for elliptic curves*, J. reine angew. Math. **494** (1998), 101–127.
9. J. W. S. Cassels et A. Fröhlich (eds.), *Algebraic number theory*, Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO Advanced Study Institute) with the support of the International Mathematical Union, Academic Press, London, 1967.
10. J. W. S. Cassels et A. Schinzel, *Selmer's conjecture and families of elliptic curves*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 4, 345–348.
11. J-L. Colliot-Thélène, *Surfaces rationnelles fibrées en coniques de degré* 4, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989, Progr. Math., vol. 91, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, 43–55.
12. ———, *L'arithmétique des variétés rationnelles*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **1** (1992), no. 3, 295–336.
13. ———, *The Hasse principle in a pencil of algebraic varieties*, Number theory (Tiruchirapalli, 1996), Contemp. Math., vol. 210, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 19–39.

14. ———, *Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have a rational 2-division point, close variation on a paper of Bender and Swinnerton-Dyer*, Rational points on algebraic varieties, Progr. Math., vol. 199, Birkhäuser, Basel, 2001, 117–161.

15. ———, *Points rationnels sur les fibrations*, Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, Berlin, 2003, 171–221.

16. J-L. Colliot-Thélène et J-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de Géometrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, 223–237.

17. ———, *Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel*, Acta Arith. **41** (1982), no. 1, 33–53.

18. J-L. Colliot-Thélène, J-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I*, J. reine angew. Math. **373** (1987), 37–107.

19. ———, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, II*, J. reine angew. Math. **374** (1987), 72–168.

20. J-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *Descent on fibrations over* $\mathbf{P}^1_k$ *revisited*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **128** (2000), no. 3, 383–393.

21. J-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points*, Invent. math. **134** (1998), no. 3, 579–650.

22. ———, *Rational points and zero-cycles on fibred varieties : Schinzel's hypothesis and Salberger's device*, J. reine angew. Math. **495** (1998), 1–28.

23. J-L. Colliot-Thélène et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties*, J. reine angew. Math. **453** (1994), 49–112.

24. B. Conrad, K. Conrad et H. Helfgott, *Root numbers and ranks in positive characteristic*, Adv. Math. **198** (2005), no. 2, 684–731.

25. R. J. Cook, *Simultaneous quadratic equations*, J. London Math. Soc. (2) **4** (1971), 319–326.

26. D. Coray, *Points algébriques sur les surfaces de del Pezzo*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **284** (1977), no. 24, A1531–A1534.

27. T. Ekedahl, *An effective version of Hilbert's irreducibility theorem*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989, Progr. Math., vol. 91, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, 241–249.

28. W. Fulton et R. Lazarsfeld, *Connectivity and its applications in algebraic geometry*, Algebraic geometry (Chicago, Ill., 1980), Lecture Notes in Math., vol. 862, Springer, Berlin, 1981, 26–92.

29. A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I : Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses*, Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, 46–66.

30. ———, *Le groupe de Brauer II : Théorie cohomologique*, Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, 67–87.

31. ———, *Le groupe de Brauer III : Exemples et compléments*, Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, 88–188.

32. A. Grothendieck et al., *Revêtements étales et groupe fondamental*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), dirigé par A. Grothendieck, augmenté de deux exposés de M. Raynaud, Lecture Notes in Mathematics, vol. 224.

33. ———, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Lecture Notes in Mathematics, vol. 270.

34. D. Harari, *Spécialisation des conditions de Manin pour les variétés fibrées au-dessus de l'espace projectif*, à paraître dans Compositio Math.

35. ———, *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75** (1994), no. 1, 221–260.

36. ———, *Obstructions de Manin transcendantes*, Number theory (Paris, 1993–1994), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 235, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, 75–87.

37. ———, *Flèches de spécialisations en cohomologie étale et applications arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), no. 2, 143–166.

38. ———, *Weak approximation on algebraic varieties*, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), Progr. Math., vol. 226, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, 43–60.

39. R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

40. V. A. Iskovskikh, *Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 1, 19–43, 237.

41. J-P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*, Université Louis Pasteur, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 1979.

42. N. Katz, *Pinceaux de Lefschetz : théorème d'existence*, Exposé XVII, Groupes de monodromie en géométrie algébrique, II, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 II), dirigé par P. Deligne et N. Katz, Lecture Notes in Mathematics, vol. 340, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

43. S. L. Kleiman, *Tangency and duality*, Proceedings of the 1984 Vancouver conference in algebraic geometry (Providence, RI), CMS Conf. Proc., vol. 6, Amer. Math. Soc., 1986, 163–225.

44. M-A. Knus et J-P. Tignol, *Quartic exercises*, Int. J. Math. Math. Sci. **2003** (2003), no. 68, 4263–4323.

45. K. Kodaira, *On compact analytic surfaces, II*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 563–626.

46. B. È. Kunyavskiĭ, A. N. Skorobogatov et M. A. Tsfasman, *Del Pezzo surfaces of degree four*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) (1989), no. 37.

47. Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002, Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

48. Yu. I. Manin, *Rational surfaces over perfect fields*, Publ. Math. de l'I.H.É.S. (1966), no. 30, 55–113.

49. ______, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, 401–411.

50. J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

51. ______, *Arithmetic duality theorems*, Perspectives in Mathematics, vol. 1, Academic Press Inc., Boston, MA, 1986.

52. L. J. Mordell, *Integer solutions of simultaneous quadratic equations*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **23** (1959), 126–143.

53. A. Néron, *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux*, Publ. Math. de l'I.H.É.S. **21** (1964).

54. E. Peyre, *Obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible*, Astérisque **299** (2005), Exp. No. 931, 323–344, Séminaire Bourbaki, Vol. 2003/2004.

55. B. Poonen, *Heuristics for the Brauer-Manin obstruction for curves*, à paraître dans Experiment. Math.

56. D. E. Rohrlich, *Variation of the root number in families of elliptic curves*, Compositio Math. **87** (1993), no. 2, 119–151.

57. P. Salberger, *Some new Hasse principles for conic bundle surfaces*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987–88, Progr. Math., vol. 81, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, 283–305.

58. P. Salberger et A. N. Skorobogatov, *Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms*, Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 517–536.

59. A. Schinzel et W. Sierpiński, *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arith. **4** (1958), 185–208 ; erratum ibid. **5** (1958), 259.

60. J-P. Serre, *Corps locaux*, troisième éd., Hermann, Paris, 1968, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. VIII.

61. ______, *Lie algebras and Lie groups*, seconde éd., 1964 lectures given at Harvard University, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1500, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

62. ______, *Cohomologie galoisienne*, cinquième éd., Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

63. S. Siksek, 4-*descent*, appendice à : A. N. Skorobogatov, *Beyond the Manin obstruction*, Invent. math. **135** (1999), no. 2, 399–424.

64. J. H. Silverman, *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 151, Springer-Verlag, New York, 1994.

65. A. N. Skorobogatov, *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989, Progr. Math., vol. 91, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, 205–219.

66. ______, *Descent on fibrations over the projective line*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 5, 905–923.

67. ______, *Beyond the Manin obstruction*, Invent. math. **135** (1999), no. 2, 399–424.

68. ______, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

69. A. N. Skorobogatov et Peter Swinnerton-Dyer, 2-*descent on elliptic curves and rational points on certain Kummer surfaces*, Adv. Math. **198** (2005), no. 2, 448–483.

70. H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Rational zeros of two quadratic forms*, Acta Arith. **9** (1964), 261–270.

71. ______, *Rational points on del Pezzo surfaces of degree* 5, Algebraic geometry, Oslo 1970 (Proc. Fifth Nordic Summer School in Math.), Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972, 287–290.

72. Sir Peter Swinnerton-Dyer, *The Brauer group of cubic surfaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **113** (1993), no. 3, 449–460.

73. ______, *Rational points on certain intersections of two quadrics*, Abelian varieties (Egloffstein, 1993), de Gruyter, Berlin, 1995, 273–292.

74. ______, *Arithmetic of diagonal quartic surfaces, II*, Proc. London Math. Soc. (3) **80** (2000), no. 3, 513–544, erratum ibid. **85** (2002), 564.

75. ______, *The solubility of diagonal cubic surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), no. 6, 891–912.

76. ______, *Diophantine equations : progress and problems*, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), Progr. Math., vol. 226, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, 3–35.

77. W. C. Waterhouse, *A probable Hasse principle for pencils of quadrics*, Trans. Amer. Math. Soc. **242** (1978), 297–306.

78. O. Zariski, *Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces*, Publications of the Mathematical Society of Japan, no. 4, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1958.

[EGA II] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publ. Math. de l'I.H.É.S. (1961), no. 8.

[EGA IV_1] ______, *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, I*, Publ. Math. de l'I.H.É.S. (1964), no. 20.

[EGA IV_2] ______, *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, II*, Publ. Math. de l'I.H.É.S. (1965), no. 24.

[EGA IV_3] ______, *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, III*, Publ. Math. de l'I.H.É.S. (1966), no. 28.

[EGA IV_4] ______, *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, IV*, Publ. Math. de l'I.H.É.S. (1967), no. 32.

Index des notations

Conventions

$\mathrm{Br}(\mathrm{X})$, $\mathrm{Br}_1(\mathrm{X})$ 16
$\mathrm{Br}_{\mathrm{vert}}(\mathrm{X})$, $\mathrm{Br}_{\mathrm{hor}}(\mathrm{X})$ 16
$\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{B}}$, $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ 16
$\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{vert}}}$, $\mathrm{X}(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1}$ 17

Chapitre 1

k, C, η, X, π 22
E_η, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^0$ 23
$\mathscr{M}$, U 23
F_{M} 23
L_{M} 23
$\mathscr{O}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{sh}}$, $\mathrm{K}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{sh}}$ 23
$\mathfrak{S}_2(\mathrm{C},\mathscr{E})$ 23
$\mathscr{X}$ 24
δ_{M} 24
$\mathfrak{S}_{\mathrm{D}/\mathrm{C}}$, $\mathfrak{T}_{\mathrm{D}/\mathrm{C}}$, (D/C) 24
$\mathscr{R}_{\mathrm{A}}$ 24
$\mathscr{R}_{\mathrm{D}/\mathrm{C}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D}_0}$ 25
$\mathfrak{T}_{\mathrm{D}}$, $\mathfrak{T}_{\mathrm{D}_0}$, $\mathfrak{S}_{\mathrm{D}}$, $\mathfrak{S}_{\mathrm{D}_0}$ 25
(D), (D_0) 25
$\mathfrak{H}(\mathrm{S})$ 27
γ_{M} 29
V_v, $\mathrm{W}_v(\mathrm{E})$, T_v, V_{S}, I^{S} 34
K_v 35
$\mathscr{I}^{\mathrm{S}}(\mathrm{E})$ 36
$\mathscr{W}_v(\mathrm{E})$ 37
v_{M}, w_{M}, T_{M}, $\mathrm{T}(x)$ 38
$\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}$, K_{M} 39
$\mathscr{U}$ 40
ψ 42
$\mathrm{A}_{\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})}$ 48
B_0 48
S, S_1, T_∞ 51
$\mathscr{L}$ 52
D_{M}, Δ_{M}, i_{M}, j 57
$\mathscr{D}(\mathrm{C},\mathrm{X})$ 58

Chapitre 2

k, C, η, X, π 75
E'_η, E''_η, P', P'' 75
φ', φ'', φ'^0, φ''^0 75
$\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}''$, $\mathscr{E}'^0$, $\mathscr{E}''^0$ 75
F'_{M}, $\mathrm{F}''_{\mathrm{M}}$, φ'_{M}, φ''_{M} 75
$\mathscr{M}$, $\mathscr{M}'$, $\mathscr{M}''$ 75
$\mathfrak{S}_{\varphi'}(\mathrm{C},\mathscr{E}')$, $\mathfrak{S}_{\varphi''}(\mathrm{C},\mathscr{E}'')$ 76
$\mathfrak{S}_2(\mathrm{C},\mathscr{E}')$ 77
$\mathscr{X}$, $\mathscr{X}''$ 77
L'_{M}, $\mathrm{L}''_{\mathrm{M}}$, δ'_{M}, δ''_{M} 77
$\mathfrak{T}'_{\mathrm{D}/\mathrm{C}}$, $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D}/\mathrm{C}}$ 77
$\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}/\mathrm{C}}$, $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}/\mathrm{C}}$, (D/C) 78
$\mathfrak{S}_{\varphi',\mathrm{S}}(\mathrm{C},\mathscr{E}')$, $\mathfrak{S}_{\varphi'',\mathrm{S}}(\mathrm{C},\mathscr{E}'')$ 78
$\mathscr{R}_{\mathrm{A}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D}/\mathrm{C},\mathrm{S}}$ 78
$\mathscr{R}_{\mathrm{D}/\mathrm{C}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D},\mathrm{S}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D}_0,\mathrm{S}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{D}_0}$ 79
$\mathfrak{T}'_{\mathrm{D}}$, $\mathfrak{T}'_{\mathrm{D}_0}$, $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D}}$, $\mathfrak{T}''_{\mathrm{D}_0}$ 79
$\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}}$, $\mathfrak{S}'_{\mathrm{D}_0}$, $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}}$, $\mathfrak{S}''_{\mathrm{D}_0}$ 79
(D), (D_0) 79
(E) 81
v_{M}, w_{M}, T_{M}, $\mathrm{T}(x)$ 85
$\mathrm{K}_{\mathrm{M},d}$, K_{M} 86
$\mathscr{U}$ 86
V_v, V'_v, V''_v, W'_v, W''_v 89
$\mathrm{A}_{\mathrm{E}/\kappa(\mathrm{M})}$ 93

S, S_1, T_∞ 98
ψ 99
$\mathscr{L}$ 99

Chapitre 3

$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(\mathrm{X})$, k_Ω, $\mathrm{X}(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$ 115
$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr,vert}}(\mathrm{X})$, $\mathrm{X}(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr,vert}}}$ 115
$t_0, \ldots, t_4$, $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_4$, $\mathscr{S}$ 141
ε_t, ε_0 141
$\mathscr{S}'$ 142
C, π 147
H, Λ, Z, ρ 148
E, H^0, σ, π_Λ, π_{Z}, π_{H^0} 148
Q, R 152
c, d, $c^2 - d$ 162
$p_0, \ldots, p_6$ 162
h_0, Π, E' 167
φ', φ'', $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{t}''$, $\mathfrak{m}''$ 168
Δ, Δ', Δ'' 168
β_m, γ_m 170
$(\mathrm{D_g})$, $(\mathrm{D'_g})$, $(\mathrm{D''_g})$ 170
$\mathscr{R}$ 170
Δ_0, Δ_{1234}, Δ_6 181
Δ_5, Δ_t 182
γ_0 183

Index terminologique

accouplement de Cassels-Tate 21, 62, 65–70, 80
admissible
  couple 39, 86
  famille 86
  triplet 40

condition (D) 21, 24, 27–34, 57–60, 78
  générique 170, 180
condition (E) 81, 170
courbe elliptique de rang élevé 21, 70–72

groupe de Brauer 16, 193
  algébrique 16, 63
  d'une surface de del Pezzo de degré 4 143–147
  horizontal 16, 60, 193
  non ramifié 115
  transcendant 118
  vertical 16, 60, 116
groupe de Selmer 18, 26, 34–37
  géométrique 24, 28–29, 77
groupe de Tate-Shafarevich 3, 72
  finitude 3, 62, 80
  géométrique 23

hypothèse de Schinzel 4, 11, 52, 99, 135

lemme de Nishimura 120
lemme formel 17, 61, 66, 135
loi de réciprocité globale 9, 35, 36, 47, 49, 81, 93–96, 104

modèle de Néron 23, 27, 37, 40, 75, 90, 201

pinceau de quadriques
  généralités, revêtement associé 136–140

monodromie du revêtement associé 195–199
préadmissible
couple 38, 85
famille 85
triplet 38

résolvante cubique 149–150

seconde descente 21, 65–70
surface de del Pezzo 109

théorème d'irréductibilité de Hilbert 135, 172
théorème des fonctions implicites 17

variété de Severi-Brauer 117

Lecture Notes in Mathematics

For information about earlier volumes
please contact your bookseller or Springer
LNM Online archive: springerlink.com

Vol. 1711: W. Ricker, Operator Algebras Generated by Commuting Projećtions: A Vector Measure Approach (1999)

Vol. 1712: N. Schwartz, J. J. Madden, Semi-algebraic Function Rings and Reflectors of Partially Ordered Rings (1999)

Vol. 1713: F. Bethuel, G. Huisken, S. Müller, K. Steffen, Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems. Cetraro, 1996. Editors: S. Hildebrandt, M. Struwe (1999)

Vol. 1714: O. Diekmann, R. Durrett, K. P. Hadeler, P. K. Maini, H. L. Smith, Mathematics Inspired by Biology. Martina Franca, 1997. Editors: V. Capasso, O. Diekmann (1999)

Vol. 1715: N. V. Krylov, M. Röckner, J. Zabczyk, Stochastic PDE's and Kolmogorov Equations in Infinite Dimensions. Cetraro, 1998. Editor: G. Da Prato (1999)

Vol. 1716: J. Coates, R. Greenberg, K. A. Ribet, K. Rubin, Arithmetic Theory of Elliptic Curves. Cetraro, 1997. Editor: C. Viola (1999)

Vol. 1717: J. Bertoin, F. Martinelli, Y. Peres, Lectures on Probability Theory and Statistics. Saint-Flour, 1997. Editor: P. Bernard (1999)

Vol. 1718: A. Eberle, Uniqueness and Non-Uniqueness of Semigroups Generated by Singular Diffusion Operators (1999)

Vol. 1719: K. R. Meyer, Periodic Solutions of the N-Body Problem (1999)

Vol. 1720: D. Elworthy, Y. Le Jan, X-M. Li, On the Geometry of Diffusion Operators and Stochastic Flows (1999)

Vol. 1721: A. Iarrobino, V. Kanev, Power Sums, Gorenstein Algebras, and Determinantal Loci (1999)

Vol. 1722: R. McCutcheon, Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory (1999)

Vol. 1723: J. P. Croisille, C. Lebeau, Diffraction by an Immersed Elastic Wedge (1999)

Vol. 1724: V. N. Kolokoltsov, Semiclassical Analysis for Diffusions and Stochastic Processes (2000)

Vol. 1725: D. A. Wolf-Gladrow, Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models (2000)

Vol. 1726: V. Marić, Regular Variation and Differential Equations (2000)

Vol. 1727: P. Kravanja M. Van Barel, Computing the Zeros of Analytic Functions (2000)

Vol. 1728: K. Gatermann Computer Algebra Methods for Equivariant Dynamical Systems (2000)

Vol. 1729: J. Azéma, M. Émery, M. Ledoux, M. Yor (Eds.) Séminaire de Probabilités XXXIV (2000)

Vol. 1730: S. Graf, H. Luschgy, Foundations of Quantization for Probability Distributions (2000)

Vol. 1731: T. Hsu, Quilts: Central Extensions, Braid Actions, and Finite Groups (2000)

Vol. 1732: K. Keller, Invariant Factors, Julia Equivalences and the (Abstract) Mandelbrot Set (2000)

Vol. 1733: K. Ritter, Average-Case Analysis of Numerical Problems (2000)

Vol. 1734: M. Espedal, A. Fasano, A. Mikelić, Filtration in Porous Media and Industrial Applications. Cetraro 1998. Editor: A. Fasano. 2000.

Vol. 1735: D. Yafaev, Scattering Theory: Some Old and New Problems (2000)

Vol. 1736: B. O. Turesson, Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces (2000)

Vol. 1737: S. Wakabayashi, Classical Microlocal Analysis in the Space of Hyperfunctions (2000)

Vol. 1738: M. Émery, A. Nemirovski, D. Voiculescu, Lectures on Probability Theory and Statistics (2000)

Vol. 1739: R. Burkard, P. Deuflhard, A. Jameson, J.-L. Lions, G. Strang, Computational Mathematics Driven by Industrial Problems. Martina Franca, 1999. Editors: V. Capasso, H. Engl, J. Periaux (2000)

Vol. 1740: B. Kawohl, O. Pironneau, L. Tartar, J.-P. Zolesio, Optimal Shape Design. Tróia, Portugal 1999. Editors: A. Cellina, A. Ornelas (2000)

Vol. 1741: E. Lombardi, Oscillatory Integrals and Phenomena Beyond all Algebraic Orders (2000)

Vol. 1742: A. Unterberger, Quantization and Non-holomorphic Modular Forms (2000)

Vol. 1743: L. Habermann, Riemannian Metrics of Constant Mass and Moduli Spaces of Conformal Structures (2000)

Vol. 1744: M. Kunze, Non-Smooth Dynamical Systems (2000)

Vol. 1745: V. D. Milman, G. Schechtman (Eds.), Geometric Aspects of Functional Analysis. Israel Seminar 1999-2000 (2000)

Vol. 1746: A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, Real Enriques Surfaces (2000)

Vol. 1747: L. W. Christensen, Gorenstein Dimensions (2000)

Vol. 1748: M. Ruzicka, Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory (2001)

Vol. 1749: M. Fuchs, G. Seregin, Variational Methods for Problems from Plasticity Theory and for Generalized Newtonian Fluids (2001)

Vol. 1750: B. Conrad, Grothendieck Duality and Base Change (2001)

Vol. 1751: N. J. Cutland, Loeb Measures in Practice: Recent Advances (2001)

Vol. 1752: Y. V. Nesterenko, P. Philippon, Introduction to Algebraic Independence Theory (2001)

Vol. 1753: A. I. Bobenko, U. Eitner, Painlevé Equations in the Differential Geometry of Surfaces (2001)

Vol. 1754: W. Bertram, The Geometry of Jordan and Lie Structures (2001)

Vol. 1755: J. Azéma, M. Émery, M. Ledoux, M. Yor (Eds.), Séminaire de Probabilités XXXV (2001)

Vol. 1756: P. E. Zhidkov, Korteweg de Vries and Nonlinear Schrödinger Equations: Qualitative Theory (2001)

Vol. 1757: R. R. Phelps, Lectures on Choquet's Theorem (2001)
Vol. 1758: N. Monod, Continuous Bounded Cohomology of Locally Compact Groups (2001)
Vol. 1759: Y. Abe, K. Kopfermann, Toroidal Groups (2001)
Vol. 1760: D. Filipović, Consistency Problems for Heath-Jarrow-Morton Interest Rate Models (2001)
Vol. 1761: C. Adelmann, The Decomposition of Primes in Torsion Point Fields (2001)
Vol. 1762: S. Cerrai, Second Order PDE's in Finite and Infinite Dimension (2001)
Vol. 1763: J.-L. Loday, A. Frabetti, F. Chapoton, F. Goichot, Dialgebras and Related Operads (2001)
Vol. 1764: A. Cannas da Silva, Lectures on Symplectic Geometry (2001)
Vol. 1765: T. Kerler, V. V. Lyubashenko, Non-Semisimple Topological Quantum Field Theories for 3-Manifolds with Corners (2001)
Vol. 1766: H. Hennion, L. Hervé, Limit Theorems for Markov Chains and Stochastic Properties of Dynamical Systems by Quasi-Compactness (2001)
Vol. 1767: J. Xiao, Holomorphic Q Classes (2001)
Vol. 1768: M.J. Pflaum, Analytic and Geometric Study of Stratified Spaces (2001)
Vol. 1769: M. Alberich-Carramiñana, Geometry of the Plane Cremona Maps (2002)
Vol. 1770: H. Gluesing-Luerssen, Linear Delay-Differential Systems with Commensurate Delays: An Algebraic Approach (2002)
Vol. 1771: M. Émery, M. Yor (Eds.), Séminaire de Probabilités 1967-1980. A Selection in Martingale Theory (2002)
Vol. 1772: F. Burstall, D. Ferus, K. Leschke, F. Pedit, U. Pinkall, Conformal Geometry of Surfaces in S^4 (2002)
Vol. 1773: Z. Arad, M. Muzychuk, Standard Integral Table Algebras Generated by a Non-real Element of Small Degree (2002)
Vol. 1774: V. Runde, Lectures on Amenability (2002)
Vol. 1775: W. H. Meeks, A. Ros, H. Rosenberg, The Global Theory of Minimal Surfaces in Flat Spaces. Martina Franca 1999. Editor: G. P. Pirola (2002)
Vol. 1776: K. Behrend, C. Gomez, V. Tarasov, G. Tian, Quantum Comohology. Cetraro 1997. Editors: P. de Bartolomeis, B. Dubrovin, C. Reina (2002)
Vol. 1777: E. García-Río, D. N. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo, Osserman Manifolds in Semi-Riemannian Geometry (2002)
Vol. 1778: H. Kiechle, Theory of K-Loops (2002)
Vol. 1779: I. Chueshov, Monotone Random Systems (2002)
Vol. 1780: J. H. Bruinier, Borcherds Products on O(2,1) and Chern Classes of Heegner Divisors (2002)
Vol. 1781: E. Bolthausen, E. Perkins, A. van der Vaart, Lectures on Probability Theory and Statistics. Ecole d' Eté de Probabilités de Saint-Flour XXIX-1999. Editor: P. Bernard (2002)
Vol. 1782: C.-H. Chu, A. T.-M. Lau, Harmonic Functions on Groups and Fourier Algebras (2002)
Vol. 1783: L. Grüne, Asymptotic Behavior of Dynamical and Control Systems under Perturbation and Discretization (2002)
Vol. 1784: L.H. Eliasson, S. B. Kuksin, S. Marmi, J.-C. Yoccoz, Dynamical Systems and Small Divisors. Cetraro, Italy 1998. Editors: S. Marmi, J.-C. Yoccoz (2002)
Vol. 1785: J. Arias de Reyna, Pointwise Convergence of Fourier Series (2002)
Vol. 1786: S. D. Cutkosky, Monomialization of Morphisms from 3-Folds to Surfaces (2002)
Vol. 1787: S. Caenepeel, G. Militaru, S. Zhu, Frobenius and Separable Functors for Generalized Module Categories and Nonlinear Equations (2002)
Vol. 1788: A. Vasil'ev, Moduli of Families of Curves for Conformal and Quasiconformal Mappings (2002)
Vol. 1789: Y. Sommerhäuser, Yetter-Drinfel'd Hopf algebras over groups of prime order (2002)
Vol. 1790: X. Zhan, Matrix Inequalities (2002)
Vol. 1791: M. Knebusch, D. Zhang, Manis Valuations and Prüfer Extensions I: A new Chapter in Commutative Algebra (2002)
Vol. 1792: D. D. Ang, R. Gorenflo, V. K. Le, D. D. Trong, Moment Theory and Some Inverse Problems in Potential Theory and Heat Conduction (2002)
Vol. 1793: J. Cortés Monforte, Geometric, Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems (2002)
Vol. 1794: N. Pytheas Fogg, Substitution in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics. Editors: V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit, A. Siegel (2002)
Vol. 1795: H. Li, Filtered-Graded Transfer in Using Noncommutative Gröbner Bases (2002)
Vol. 1796: J.M. Melenk, hp-Finite Element Methods for Singular Perturbations (2002)
Vol. 1797: B. Schmidt, Characters and Cyclotomic Fields in Finite Geometry (2002)
Vol. 1798: W.M. Oliva, Geometric Mechanics (2002)
Vol. 1799: H. Pajot, Analytic Capacity, Rectifiability, Menger Curvature and the Cauchy Integral (2002)
Vol. 1800: O. Gabber, L. Ramero, Almost Ring Theory (2003)
Vol. 1801: J. Azéma, M. Émery, M. Ledoux, M. Yor (Eds.), Séminaire de Probabilités XXXVI (2003)
Vol. 1802: V. Capasso, E. Merzbach, B.G. Ivanoff, M. Dozzi, R. Dalang, T. Mountford, Topics in Spatial Stochastic Processes. Martina Franca, Italy 2001. Editor: E. Merzbach (2003)
Vol. 1803: G. Dolzmann, Variational Methods for Crystalline Microstructure – Analysis and Computation (2003)
Vol. 1804: I. Cherednik, Ya. Markov, R. Howe, G. Lusztig, Iwahori-Hecke Algebras and their Representation Theory. Martina Franca, Italy 1999. Editors: V. Baldoni, D. Barbasch (2003)
Vol. 1805: F. Cao, Geometric Curve Evolution and Image Processing (2003)
Vol. 1806: H. Broer, I. Hoveijn. G. Lunther, G. Vegter, Bifurcations in Hamiltonian Systems. Computing Singularities by Gröbner Bases (2003)
Vol. 1807: V. D. Milman, G. Schechtman (Eds.), Geometric Aspects of Functional Analysis. Israel Seminar 2000-2002 (2003)
Vol. 1808: W. Schindler, Measures with Symmetry Properties (2003)
Vol. 1809: O. Steinbach, Stability Estimates for Hybrid Coupled Domain Decomposition Methods (2003)
Vol. 1810: J. Wengenroth, Derived Functors in Functional Analysis (2003)
Vol. 1811: J. Stevens, Deformations of Singularities (2003)
Vol. 1812: L. Ambrosio, K. Deckelnick, G. Dziuk, M. Mimura, V. A. Solonnikov, H. M. Soner, Mathematical Aspects of Evolving Interfaces. Madeira, Funchal, Portugal 2000. Editors: P. Colli, J. F. Rodrigues (2003)
Vol. 1813: L. Ambrosio, L. A. Caffarelli, Y. Brenier, G. Buttazzo, C. Villani, Optimal Transportation and its

Applications. Martina Franca, Italy 2001. Editors: L. A. Caffarelli, S. Salsa (2003)
Vol. 1814: P. Bank, F. Baudoin, H. Föllmer, L.C.G. Rogers, M. Soner, N. Touzi, Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2002 (2003)
Vol. 1815: A. M. Vershik (Ed.), Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics. St. Petersburg, Russia 2001 (2003)
Vol. 1816: S. Albeverio, W. Schachermayer, M. Talagrand, Lectures on Probability Theory and Statistics. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXX-2000. Editor: P. Bernard (2003)
Vol. 1817: E. Koelink, W. Van Assche(Eds.), Orthogonal Polynomials and Special Functions. Leuven 2002 (2003)
Vol. 1818: M. Bildhauer, Convex Variational Problems with Linear, nearly Linear and/or Anisotropic Growth Conditions (2003)
Vol. 1819: D. Masser, Yu. V. Nesterenko, H. P. Schlickewei, W. M. Schmidt, M. Waldschmidt, Diophantine Approximation. Cetraro, Italy 2000. Editors: F. Amoroso, U. Zannier (2003)
Vol. 1820: F. Hiai, H. Kosaki, Means of Hilbert Space Operators (2003)
Vol. 1821: S. Teufel, Adiabatic Perturbation Theory in Quantum Dynamics (2003)
Vol. 1822: S.-N. Chow, R. Conti, R. Johnson, J. Mallet-Paret, R. Nussbaum, Dynamical Systems. Cetraro, Italy 2000. Editors: J. W. Macki, P. Zecca (2003)
Vol. 1823: A. M. Anile, W. Allegretto, C. Ringhofer, Mathematical Problems in Semiconductor Physics. Cetraro, Italy 1998. Editor: A. M. Anile (2003)
Vol. 1824: J. A. Navarro González, J. B. Sancho de Salas, $\mathscr{C}^\infty$ – Differentiable Spaces (2003)
Vol. 1825: J. H. Bramble, A. Cohen, W. Dahmen, Multiscale Problems and Methods in Numerical Simulations, Martina Franca, Italy 2001. Editor: C. Canuto (2003)
Vol. 1826: K. Dohmen, Improved Bonferroni Inequalities via Abstract Tubes. Inequalities and Identities of Inclusion-Exclusion Type. VIII, 113 p, 2003.
Vol. 1827: K. M. Pilgrim, Combinations of Complex Dynamical Systems. IX, 118 p, 2003.
Vol. 1828: D. J. Green, Gröbner Bases and the Computation of Group Cohomology. XII, 138 p, 2003.
Vol. 1829: E. Altman, B. Gaujal, A. Hordijk, Discrete-Event Control of Stochastic Networks: Multimodularity and Regularity. XIV, 313 p, 2003.
Vol. 1830: M. I. Gil', Operator Functions and Localization of Spectra. XIV, 256 p, 2003.
Vol. 1831: A. Connes, J. Cuntz, E. Guentner, N. Higson, J. E. Kaminker, Noncommutative Geometry, Martina Franca, Italy 2002. Editors: S. Doplicher, L. Longo (2004)
Vol. 1832: J. Azéma, M. Émery, M. Ledoux, M. Yor (Eds.), Séminaire de Probabilités XXXVII (2003)
Vol. 1833: D.-Q. Jiang, M. Qian, M.-P. Qian, Mathematical Theory of Nonequilibrium Steady States. On the Frontier of Probability and Dynamical Systems. IX, 280 p, 2004.
Vol. 1834: Yo. Yomdin, G. Comte, Tame Geometry with Application in Smooth Analysis. VIII, 186 p, 2004.
Vol. 1835: O.T. Izhboldin, B. Kahn, N.A. Karpenko, A. Vishik, Geometric Methods in the Algebraic Theory of Quadratic Forms. Summer School, Lens, 2000. Editor: J.-P. Tignol (2004)
Vol. 1836: C. Năstăsescu, F. Van Oystaeyen, Methods of Graded Rings. XIII, 304 p, 2004.
Vol. 1837: S. Tavaré, O. Zeitouni, Lectures on Probability Theory and Statistics. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXI-2001. Editor: J. Picard (2004)
Vol. 1838: A.J. Ganesh, N.W. O'Connell, D.J. Wischik, Big Queues. XII, 254 p, 2004.
Vol. 1839: R. Gohm, Noncommutative Stationary Processes. VIII, 170 p, 2004.
Vol. 1840: B. Tsirelson, W. Werner, Lectures on Probability Theory and Statistics. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXII-2002. Editor: J. Picard (2004)
Vol. 1841: W. Reichel, Uniqueness Theorems for Variational Problems by the Method of Transformation Groups (2004)
Vol. 1842: T. Johnsen, A.L. Knutsen, K3 Projective Models in Scrolls (2004)
Vol. 1843: B. Jefferies, Spectral Properties of Noncommuting Operators (2004)
Vol. 1844: K.F. Siburg, The Principle of Least Action in Geometry and Dynamics (2004)
Vol. 1845: Min Ho Lee, Mixed Automorphic Forms, Torus Bundles, and Jacobi Forms (2004)
Vol. 1846: H. Ammari, H. Kang, Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements (2004)
Vol. 1847: T.R. Bielecki, T. Björk, M. Jeanblanc, M. Rutkowski, J.A. Scheinkman, W. Xiong, Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2003 (2004)
Vol. 1848: M. Abate, J. E. Fornaess, X. Huang, J. P. Rosay, A. Tumanov, Real Methods in Complex and CR Geometry, Martina Franca, Italy 2002. Editors: D. Zaitsev, G. Zampieri (2004)
Vol. 1849: Martin L. Brown, Heegner Modules and Elliptic Curves (2004)
Vol. 1850: V. D. Milman, G. Schechtman (Eds.), Geometric Aspects of Functional Analysis. Israel Seminar 2002-2003 (2004)
Vol. 1851: O. Catoni, Statistical Learning Theory and Stochastic Optimization (2004)
Vol. 1852: A.S. Kechris, B.D. Miller, Topics in Orbit Equivalence (2004)
Vol. 1853: Ch. Favre, M. Jonsson, The Valuative Tree (2004)
Vol. 1854: O. Saeki, Topology of Singular Fibers of Differential Maps (2004)
Vol. 1855: G. Da Prato, P.C. Kunstmann, I. Lasiecka, A. Lunardi, R. Schnaubelt, L. Weis, Functional Analytic Methods for Evolution Equations. Editors: M. Iannelli, R. Nagel, S. Piazzera (2004)
Vol. 1856: K. Back, T.R. Bielecki, C. Hipp, S. Peng, W. Schachermayer, Stochastic Methods in Finance, Bressanone/Brixen, Italy, 2003. Editors: M. Fritelli, W. Runggaldier (2004)
Vol. 1857: M. Émery, M. Ledoux, M. Yor (Eds.), Séminaire de Probabilités XXXVIII (2005)
Vol. 1858: A.S. Cherny, H.-J. Engelbert, Singular Stochastic Differential Equations (2005)
Vol. 1859: E. Letellier, Fourier Transforms of Invariant Functions on Finite Reductive Lie Algebras (2005)
Vol. 1860: A. Borisyuk, G.B. Ermentrout, A. Friedman, D. Terman, Tutorials in Mathematical Biosciences I. Mathematical Neurosciences (2005)
Vol. 1861: G. Benettin, J. Henrard, S. Kuksin, Hamiltonian Dynamics – Theory and Applications, Cetraro, Italy, 1999. Editor: A. Giorgilli (2005)
Vol. 1862: B. Helffer, F. Nier, Hypoelliptic Estimates and Spectral Theory for Fokker-Planck Operators and Witten Laplacians (2005)

Vol. 1863: H. Fürh, Abstract Harmonic Analysis of Continuous Wavelet Transforms (2005)
Vol. 1864: K. Efstathiou, Metamorphoses of Hamiltonian Systems with Symmetries (2005)
Vol. 1865: D. Applebaum, B.V. R. Bhat, J. Kustermans, J. M. Lindsay, Quantum Independent Increment Processes I. From Classical Probability to Quantum Stochastic Calculus. Editors: M. Schürmann, U. Franz (2005)
Vol. 1866: O.E. Barndorff-Nielsen, U. Franz, R. Gohm, B. Kümmerer, S. Thorbjønsen, Quantum Independent Increment Processes II. Structure of Quantum Levy Processes, Classical Probability, and Physics. Editors: M. Schürmann, U. Franz, (2005)
Vol. 1867: J. Sneyd (Ed.), Tutorials in Mathematical Biosciences II. Mathematical Modeling of Calcium Dynamics and Signal Transduction. (2005)
Vol. 1868: J. Jorgenson, S. Lang, $\mathrm{Pos}_n(\mathrm{R})$ and Eisenstein Sereies. (2005)
Vol. 1869: A. Dembo, T. Funaki, Lectures on Probability Theory and Statistics. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXIII-2003. Editor: J. Picard (2005)
Vol. 1870: V.I. Gurariy, W. Lusky, Geometry of Müntz Spaces and Related Questions. (2005)
Vol. 1871: P. Constantin, G. Gallavotti, A.V. Kazhikhov, Y. Meyer, S. Ukai, Mathematical Foundation of Turbulent Viscous Flows, Martina Franca, Italy, 2003. Editors: M. Cannone, T. Miyakawa (2006)
Vol. 1872: A. Friedman (Ed.), Tutorials in Mathematical Biosciences III. Cell Cycle, Proliferation, and Cancer (2006)
Vol. 1873: R. Mansuy, M. Yor, Random Times and Enlargements of Filtrations in a Brownian Setting (2006)
Vol. 1874: M. Yor, M. Émery (Eds.), In Memoriam Paul-André Meyer - Séminaire de Probabilités XXXIX (2006)
Vol. 1875: J. Pitman, Combinatorial Stochastic Processes. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXII-2002. Editor: J. Picard (2006)
Vol. 1876: H. Herrlich, Axiom of Choice (2006)
Vol. 1877: J. Steuding, Value Distributions of L-Functions(2006)
Vol. 1878: R. Cerf, The Wulff Crystal in Ising and Percolation Models, Ecole d'Eté de Probabilits de Saint-Flour XXXIV-2004. Editor: Jean Picard (2006)
Vol. 1879: G. Slade, The Lace Expansion and its Appli- cations, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXIV-2004. Editor: Jean Picard (2006)
Vol. 1880: S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet, Open Quantum Systems I, The Hamiltonian Approach (2006)
Vol. 1881: S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet, Open Quantum Systems II, The Markovian Approach (2006)
Vol. 1882: S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet, Open Quantum Systems III, Recent Developments (2006)
Vol. 1883: W. Van Assche, F. Marcellàn (Eds.), Orthogonal Polynomials and Special Functions, Computation and Application (2006)
Vol. 1884: N. Hayashi, E.I. Kaikina, P.I. Naumkin, I.A. Shishmarev, Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations (2006)
Vol. 1885: A. Telcs, The Art of Random Walks (2006)
Vol. 1886: S. Takamura, Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves (2006)
Vol. 1887: K. Habermann, L. Habermann, Introduction to Symplectic Dirac Operators (2006)
Vol. 1888: J. van der Hoeven, Transseries and Real Differential Algebra (2006)
Vol. 1889: G. Osipenko, Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms (2006)
Vol. 1890: M. Bunge, J. Funk, Singular Coverings of Toposes (2006)
Vol. 1891: J.B. Friedlander, D.R. Heath-Brown, H. Iwaniec, J. Kaczorowski, Analytic Number Theory, Cetraro, Italy, 2002. Editors: A. Perelli, C. Viola (2006)
Vol. 1892: A. Baddeley, I. Bárány, R. Schneider, W. Weil, Stochastic Geometry, Martina Franca, Italy, 2004. Editor: W. Weil (2007)
Vol. 1893: H. Hanßmann, Local and Semi-Local Bifurcations in Hamiltonian Dynamical Systems, Results and Examples (2007)
Vol. 1894: C.W. Groetsch, Stable Approximate Evaluation of Unbounded Operators (2007)
Vol. 1895: L. Molnár, Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces (2007)
Vol. 1896: P. Massart, Concentration Inequalities and Model Selection, Ecole d'Eté de Probabilitiés de Saint-Flour XXXIII-2003. Editor: J. Picard (2007)
Vol. 1897: R. Doney, Fluctuation Theory for Lévy Processes, Ecole d'Eté de Probabilitiés de Saint-Flour-2005. Editor: J. Picard (2007)
Vol. 1898: H.R. Beyer, Beyond Partial Differential Equations, On linear and Quasi-Linear Abstract Hyperbolic Evolution Equations (2007)
Vol. 1899: Seminaires de Probabilitiés XL. Editors: C. Donati-Martin, M. Émery, A. Rouault, C. Stricker (2007)
Vol. 1900: E. Bolthausen, A. Bovier (Eds.), Spin Glasses (2007)
Vol. 1901: Olivier Wittenberg, Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre 1, Intersections of two quadrics and pencils of curves of genus 1 (2007)

Recent Reprints and New Editions

Vol. 1618: G. Pisier, Similarity Problems and Completely Bounded Maps. 1995 – 2nd exp. edition (2001)
Vol. 1629: J.D. Moore, Lectures on Seiberg-Witten Invariants. 1997 – 2nd edition (2001)
Vol. 1638: P. Vanhaecke, Integrable Systems in the realm of Algebraic Geometry. 1996 – 2nd edition (2001)
Vol. 1702: J. Ma, J. Yong, Forward-Backward Stochastic Differential Equations and their Applications. 1999. – Corr. 3rd printing (2005)
Vol. 830: J.A. Green, Polynomial Representations of GL_n, with an Appendix on Schensted Correspondence and Littelmann Paths by K. Erdmann, J.A. Green and M. Schocker. 1980 – 2nd corr. and augmented edition (2007)