

Appendice A

Complementi di algebra lineare e analisi

Raccogliamo in questa Appendice un insieme di richiami utili di calcolo vettoriale e differenziale. Quanto segue non intende assolutamente fornire una trattazione completa degli argomenti sviluppati, quanto un semplice compendio che possa aiutare lo studente a identificare l'argomento o gli argomenti che può essere più utile rivedere o ripassare nell'affrontare lo studio della Meccanica Razionale.

A.1 Calcolo vettoriale

Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale V è una struttura composta da: un insieme di elementi, detti *vettori*, un *campo* i cui elementi chiameremo *scalari*. Nelle nostre applicazioni il campo scelto sarà l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} . La struttura di spazio vettoriale è completata da due operazioni: la somma e la moltiplicazione per scalare.

L'operazione di somma, che compone qualunque coppia di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ per fornire il vettore $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$, è associativa e commutativa, ed ammette sia elemento neutro (il vettore *nullo* $\mathbf{0}$) che elemento inverso, l'*opposto*: per ogni vettore \mathbf{u} ne esiste un altro $-\mathbf{u}$ tale che $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

La moltiplicazione per scalare associa ad ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ e ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, il vettore $\lambda \mathbf{u} \in V$. Questa operazione è associativa rispetto agli scalari e distributiva rispetto alla somma sia di scalari che di vettori. La distributività implica quindi che, per qualunque $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u} \quad \text{e} \quad \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}.$$

La moltiplicazione per scalare ammette elemento neutro, che coincide con l'elemento neutro 1 del prodotto nel campo scelto: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Basi, dimensione

Un insieme di vettori si dice *linearmente dipendente* se risulta possibile esprimere almeno uno di essi come combinazione lineare degli altri. Se ciò risulta impossibile, i vettori si dicono *linearmente indipendenti*:

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \text{ linearmente indipendenti} \iff \left(\begin{array}{l} \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \\ \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0. \end{array} \right)$$

Una *base* di uno spazio vettoriale è un insieme di vettori linearmente indipendenti le cui combinazioni lineari generano l'intero spazio vettoriale. Di conseguenza l'insieme $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è una base se i vettori che la compongono sono linearmente indipendenti e per qualunque vettore $\mathbf{u} \in V$ vale

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + \dots + u_n \mathbf{e}_n, \quad \text{con } u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

Si può dimostrare che la decomposizione (A.1) è unica, per cui gli scalari (u_1, \dots, u_n) si dicono *componenti* del vettore \mathbf{u} nella base \mathbf{e} . Si può inoltre dimostrare che tutte le basi di un dato spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità, ovvero sono formate dallo stesso numero di vettori. Tale cardinalità è quindi una proprietà dello spazio vettoriale, e non della base scelta, e viene chiamata *dimensione* dello spazio vettoriale.

Prodotto scalare

Il prodotto scalare è un'operazione binaria che a ogni coppia di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ associa uno scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ in modo

commutativo	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
distributivo rispetto alla somma	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
lineare rispetto alla moltiplicazione	$(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

Utilizzando il prodotto scalare è possibile definire la *lunghezza* (o *norma*) di un vettore come

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

Si definisce *versore* qualunque vettore di lunghezza unitaria.

Per linearità, è possibile calcolare qualunque prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ una volta noti i prodotti scalari tra gli elementi di una qualunque base dello spazio vettoriale, ovvero l'insieme di numeri $\{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\}$, con $i, j = 1, \dots, n$. Infatti vale

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i \quad \implies \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j). \quad (\text{A.2})$$

Una base $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ si dice *ortonormale* (rispetto a un dato prodotto scalare) se vale

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

dove il simbolo δ_{ij} è noto come *delta di Kronecker*.

Se \mathbf{e} è una base ortonormale, il prodotto scalare si esprime semplicemente come somma dei prodotti delle componenti. Infatti, dalle (A.2),(A.3) segue

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n. \quad (\text{A.4})$$

Inoltre, le componenti di un vettore in una base ortonormale si ottengono attraverso semplici prodotti scalari:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i \implies u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i, \quad (\text{A.5})$$

e la lunghezza o norma di un vettore si ottiene come

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2},$$

dove le $\{u_i\}$ sono le componenti di \mathbf{u} in una qualunque base ortonormale.

La disuguaglianza triangolare garantisce che il prodotto scalare tra due vettori non supera mai, in valore assoluto, il prodotto delle norme dei vettori che si moltiplicano: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$. Inoltre, il rapporto tra prodotto scalare e prodotto delle norme definisce l'angolo formato dai due vettori:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}. \quad (\text{A.6})$$

Di conseguenza il segno del prodotto scalare indica se i due vettori che si moltiplicano formano un angolo acuto ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$), retto ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, vettori *ortogonali*), oppure ottuso ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$).

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale è un'operazione binaria, definita solo sugli spazi vettoriali tridimensionali, che a ogni coppia di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ associa un vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \in V$ in modo che

anticommutativo	$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$
distributivo rispetto alla somma	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$
lineare rispetto alla moltiplicazione	$(\lambda \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$.

Per completare la definizione di prodotto vettoriale si deve osservare che in uno spazio vettoriale tridimensionale esistono due tipi di terne ortonormali, quel-

le *sinistrorse* e quelle *destrorse*, che si differenziano dall'orientamento. Per capire a quale categoria appartenga una data base ortonormale si considera il piano identificato dai primi due versori, e si osserva il piano dal lato verso cui punta il terzo versore. Se, da questo lato, il primo versore va ruotato di $\frac{\pi}{2}$ verso la sua sinistra (cioè in senso antiorario) per ottenere il secondo, allora la terna è *sinistrorsa*. Se, al contrario, la rotazione di $\frac{\pi}{2}$ deve avvenire verso la sua destra (in senso orario), la terna si dice *destrorsa*. La definizione di prodotto vettoriale risulta completa specificando che in una qualunque terna *sinistrorsa* $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ valgono le relazioni

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}.$$

Osserviamo come la seconda e la terza delle precedenti relazioni si ottengono dalla prima effettuando una *permutazione ciclica* dei tre versori coinvolti, ovvero portando il primo al posto del secondo, il secondo al posto del terzo, e quest'ultimo al posto del primo. Per antisimmetria, vale anche $\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ (con le sue relative permutazioni cicliche).

Conseguenza della precedente definizione sono le seguenti proprietà del prodotto vettoriale.

- Il prodotto vettoriale di due vettori ha le seguenti componenti

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.7})$$

Si osservi come nuovamente la seconda e la terza componente si possono ottenere dalla prima effettuando una permutazione ciclica nella quale gli indici scalano secondo la regola $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Ricordando inoltre la formula per il calcolo del determinante di una matrice 3×3 (vedi più avanti, formula (A.24) a pagina 259), si osserva che vale anche

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

- La direzione di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia a \mathbf{u} che a \mathbf{v}

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

- Il verso del prodotto vettoriale segue la *regola della mano destra*: puntando il pollice della mano destra verso il primo fattore e l'indice aperto verso il secondo, il medio aperto indicherà il verso del prodotto vettoriale.
- La norma del prodotto vettoriale è pari al prodotto delle norme dei fattori, moltiplicato il seno dell'angolo compreso tra questi

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}. \quad (\text{A.9})$$

Osserviamo che in virtù della (A.6) e la (A.9) si ha

$$u^2 v^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 + |\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2. \quad (\text{A.10})$$

Le formule seguenti, che possono essere dimostrate direttamente usando le (A.4),(A.7), forniscono un'utile semplificazione del calcolo del doppio prodotto vettoriale

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}. \quad (\text{A.11})$$

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}. \quad (\text{A.12})$$

Esempio (Scomposizione di un vettore). Dato un qualunque versore \mathbf{e} , si può esprimere (in modo unico) qualunque vettore $\mathbf{w} \in V$ come somma di due componenti rispettivamente parallela e ortogonale a \mathbf{e} , ovvero

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\parallel} + \mathbf{w}_{\perp}, \quad \text{con} \quad \mathbf{w}_{\parallel} \wedge \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}_{\perp} \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Tale scomposizione è realizzata da

$$\mathbf{w} = \underbrace{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}}_{\mathbf{w}_{\parallel}} + \underbrace{(\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e})}_{\mathbf{w}_{\perp}} \quad (\text{A.13})$$

e soddisfa

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{w}_{\parallel} \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{w} \wedge \mathbf{e} = \mathbf{w}_{\perp} \wedge \mathbf{e}.$$

Prodotto misto

Si definisce *prodotto misto* tra tre vettori lo scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

Si osservi come non sia necessario indicare delle parentesi nelle operazioni indicate poiché l'unico ordine consistente si ottiene effettuando prima il prodotto vettoriale $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, che produce un vettore che si moltiplica poi scalarmente per \mathbf{u} . Se invece si tentasse di effettuare prima il prodotto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ si otterrebbe uno scalare che sarebbe poi impossibile da moltiplicare vettorialmente per \mathbf{w} .

Utilizzando la (A.8) risulta possibile ricavare un'espressione utile per il calcolo del prodotto misto

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, il prodotto misto gode delle proprietà caratteristiche del determinante. Così, per esempio, esso si annulla se e solo se le sue righe sono linearmente dipendenti, ovvero

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = 0 \quad \iff \quad \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \text{ complanari}. \quad (\text{A.14})$$

Inoltre, il risultato non varia se viene effettuata una permutazione ciclica dei fat-

tori, mentre cambia segno se vengono semplicemente scambiati due fattori

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}, \quad (\text{A.15})$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Si osservi infine come, a conseguenza delle (A.15), tra le operazioni che non cambiano il risultato di un prodotto misto rientra lo scambio tra prodotto scalare e vettoriale. Per esempio si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V. \quad (\text{A.16})$$

Differenziazione

Consideriamo due vettori dipendenti dal tempo $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)$, ovvero, in termini più rigorosamente matematici, due funzioni $\mathbf{a}, \mathbf{b} : (t_0, t_1) \rightarrow V$ che, ad ogni valore del parametro $t \in (t_0, t_1)$, associano i vettori $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)$. Scelta una base ortonormale $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ diremo che le funzioni vettoriali date sono continue/differenziabili se lo sono le rispettive componenti nella base scelta. La derivata del vettore si otterrà semplicemente derivando le componenti dimodoché, per esempio,

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k} \quad \implies \quad \dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{a}_x(t)\mathbf{i} + \dot{a}_y(t)\mathbf{j} + \dot{a}_z(t)\mathbf{k}.$$

La differenziazione di funzioni vettoriali eredita così le proprietà caratteristiche della derivazione di funzioni scalari. Ad esempio avremo

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \dot{\mathbf{b}}. \quad (\text{A.17})$$

Geometria euclidea (cenni)

Prima di lavorare con punti dello spazio euclideo suggeriamo di rivederne la Definizione 1.2 (vedi pagina 3). Si ricordi in particolare che, dato un punto $Q \in \mathcal{E}$ e un vettore \mathbf{v} dello spazio vettoriale associato, la notazione $P = Q + \mathbf{v}$ equivale a dire $\mathbf{v} = QP$, ovvero che \mathbf{v} è il vettore che porta da Q a P .

Definizione A.1 (Retta, piano). Una retta dello spazio euclideo (passante per il punto $Q \in \mathcal{E}$ e parallela al vettore $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$) è l'insieme dei punti $P \in \mathcal{E}$ tali che

$$P = Q + \lambda \mathbf{u}, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R},$$

ovvero l'insieme dei punti $P \in \mathcal{E}$ tali che $QP \parallel \mathbf{u}$.

Un piano dello spazio euclideo (passante per il punto $Q \in \mathcal{E}$ e ortogonale al vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) è il luogo dei punti $P \in \mathcal{E}$ tali che

$$QP \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Alternativamente, noti tre punti (non allineati) Q_1, Q_2, Q_3 del piano che si vuole

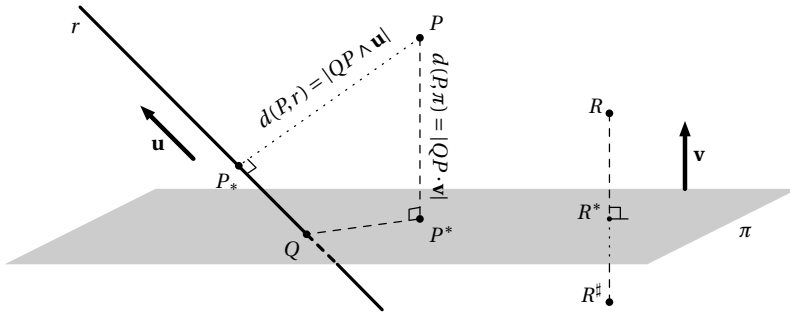


Figura A.1 Proiezioni su rette e piani. Simmetrie rispetto a piani

descrivere, i punti P del piano soddisfano

$$P = Q_1 + \lambda Q_1 Q_2 + \mu Q_1 Q_3, \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Proiezioni, simmetrie

Chiamiamo *proiezione* del punto $P \in \mathcal{E}$ sulla retta $r \subset \mathcal{E}$ o sul piano $\pi \subset \mathcal{E}$ il punto P_* (rispettivamente appartenente alla retta r o al piano π) che minimizza la distanza da P (vedi Fig. A.1). Tale minimo si indica come *distanza* del punto P dalla retta r (o dal piano π).

La proiezione del punto P sulla retta r passante per Q e parallela al versore \mathbf{u} è fornita dal punto P_* tale che

$$QP_* = (QP \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}. \tag{A.18}$$

Osserviamo che, in virtù della (A.13), il punto P_* coincide con la proiezione ortogonale di P su r , nel senso che $P_*P \perp \mathbf{u}$. Il punto P_* minimizza, tra i punti di r , la distanza da P . Infatti, preso un qualunque altro punto $\hat{P} \in r$ si avrà

$$\hat{P}P = \underbrace{\hat{P}P_*}_{\parallel \mathbf{u}} + \underbrace{P_*P}_{\perp \mathbf{u}} \implies |\hat{P}P|^2 = |\hat{P}P_*|^2 + |P_*P|^2 \geq |P_*P|^2.$$

Inoltre, in virtù della (A.10) si ha

$$d^2(P, r) = |P_*P|^2 = |QP|^2 - (QP \cdot \mathbf{u})^2 = |QP \wedge \mathbf{u}|^2. \tag{A.19}$$

La proiezione del punto P sul piano π passante per Q e ortogonale al versore \mathbf{v} è fornita dal punto P^* tale che

$$QP^* = QP - (QP \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Nuovamente in virtù della (A.13), il punto P^* coincide con la proiezione ortogonale di P su π , nel senso che $P^*P \perp \hat{P}P^*$ per ogni $\hat{P} \in \pi$. Il punto P^* minimizza, tra

i punti di π , la distanza da P . Infatti, preso un qualunque altro punto $\hat{P} \in \pi$ si avrà

$$\hat{P}P = \underbrace{\hat{P}P^*}_{\perp \mathbf{v}} + \underbrace{P^*P}_{\parallel \mathbf{v}} \quad \Rightarrow \quad |\hat{P}P|^2 = |\hat{P}P^*|^2 + |P^*P|^2 \geq |P^*P|^2.$$

Notiamo in particolare che $P^*P = (QP \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$, per cui

$$d^2(P, \pi) = (QP \cdot \mathbf{v})^2.$$

Dato un piano π (passante per Q e ortogonale al versore \mathbf{v}) e un punto $R \in \mathcal{E}$, il punto R^\sharp simmetrico di R rispetto a π (vedi Fig. A.1) è dato da

$$QR^\sharp = QR - 2(QR \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}, \quad (\text{A.20})$$

dimodoché

$$RR^\sharp = -2(QR \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}. \quad (\text{A.21})$$

Si osservi come R^\sharp sia l'unico punto (diverso da R) tale che $d(R^\sharp, \pi) = d(R, \pi)$ e $RR^\sharp \perp \pi$.

Inviluppo convesso

Definizione A.2 (Inviluppo convesso). *L'inviluppo convesso $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ di un insieme \mathcal{B} è definito come l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono \mathcal{B} .*

L'inviluppo convesso di un insieme contiene ovviamente l'insieme stesso. Inoltre, visto che l'intersezione di insiemi convessi è essa stessa convessa, può anche definirsi come il più piccolo insieme convesso contenente l'insieme di partenza (vedi Fig. A.2). La seguente proprietà risulta utile nel caratterizzare la forma degli inviluppi convessi.

Proposizione A.3. *L'inviluppo convesso di un insieme coincide con l'insieme delle combinazioni lineari convesse dei punti di \mathcal{B} , ovvero con l'insieme delle combinazioni lineari di vettori posizione di punti di \mathcal{B} , con coefficienti non negativi a somma totale unitaria. Si avrà quindi*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{B}} &= \bigcap \{C : C \text{ convesso e } \mathcal{B} \subseteq C\} \\ &= \left\{ P \in \mathcal{E} : QP = \sum_i \lambda_i QP_i, \text{ con } P_i \in \mathcal{B}, \lambda_i \geq 0, \text{ e } \sum_i \lambda_i = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Dimostrazione. L'insieme delle combinazioni lineari convesse di punti di \mathcal{B} è convesso e contiene \mathcal{B} , e di conseguenza contiene anche $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$.

D'altro canto, qualunque insieme convesso che contenga \mathcal{B} dovrà contenere, per definizione di convessità, anche le combinazioni lineari convesse dei suoi punti, per cui risulta che l'insieme delle combinazioni lineari convesse di punti di \mathcal{B} è contenuto in $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$.

La doppia inclusione implica la validità dell'uguaglianza in (A.22). \square

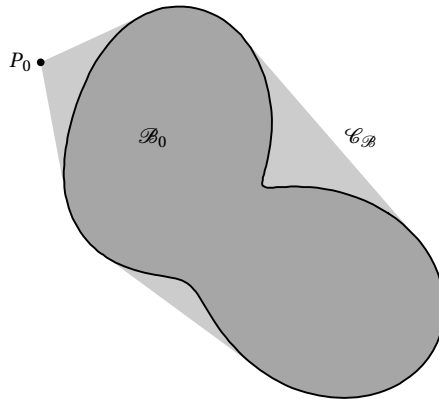


Figura A.2 Involuppo convesso dell'insieme \mathcal{B} , composto dall'unione della regione continua \mathcal{B}_0 e del punto P_0

Esercizi

A.1. Dimostrare che il prodotto vettoriale di $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}$ è dato dal vettore $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}$.

A.2. Dimostrare che il prodotto vettoriale di $\mathbf{w} = w \mathbf{k}$ e $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$ è dato dal vettore $\mathbf{w} \wedge \mathbf{a} = w(-a_y \mathbf{i} + a_x \mathbf{j})$.

A.3. Dimostrare che un prodotto misto con due fattori paralleli risulta nullo.

A.4. Dimostrare l'identità $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) + \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{0}$, valida per ogni scelta dei vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

A.5. Sia $O \in \mathcal{E}$ l'origine dello spazio euclideo, e $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ una base ortonormale dello spazio vettoriale associato.

- Determinare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{u} = a\mathbf{i} - 2a\mathbf{j}$ e $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} - a\mathbf{k}$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- Determinare l'equazione della retta r passante per il punto $OA = a\mathbf{i}$ e parallela a \mathbf{v} , e del piano π passante per $OB = -a\mathbf{j}$ e ortogonale a \mathbf{u} .
- Calcolare le distanze $d(A, \pi)$ e $d(B, r)$.
- Identificare il punto simmetrico di A rispetto al piano π .

A.6. Dimostrare che l'involuppo convesso di un insieme formato da tre punti non allineati è il triangolo avente i punti come vertici.

A.2 Trasformazioni lineari

Definizione A.4. Una trasformazione lineare (o tensore) è un'applicazione \mathbf{L} che associa a ogni vettore $\mathbf{u} \in V$ il vettore $\mathbf{L}\mathbf{u} \in V$ in modo lineare, ovvero in modo che

$$\mathbf{L}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \mathbf{L}(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{L}\mathbf{u} \quad \text{per ogni} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dal punto di vista algebrico, una trasformazione lineare è quindi un omomorfismo, e anzi un endomorfismo in quanto lo spazio di partenza e di arrivo coincidono.

Matrici

Scelta una base $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, una trasformazione lineare si può rappresentare attraverso i suoi *elementi di matrice*

$$L_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{L}\mathbf{e}_j. \tag{A.23}$$

Tali elementi formano poi la *matrice* di \mathbf{L} nella base \mathbf{e} , che si ottiene collocando l'elemento L_{ij} nella i -esima riga e j -esima colonna. In questo modo, per ogni $\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i$ si ha

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \sum_i \left(\sum_j L_{ij} u_j \right) \mathbf{e}_i.$$

In altri termini, le componenti del vettore trasformato $\mathbf{L}\mathbf{u}$ si ottengono moltiplicando righe per colonne la matrice degli elementi $\{L_{ij}\}$ per il vettore colonna delle componenti di \mathbf{u} .

Si osservi in particolare come le colonne della matrice associata a una trasformazione in una data base contengono le componenti delle immagini dei versori della base stessa.

Traccia, determinante

La Definizione (A.23) evidenzia come gli elementi di matrice di una trasformazione lineare dipendano in generale dalla base scelta per il loro calcolo. Si dicono *invarianti* quelle combinazioni di elementi di matrice di una trasformazione lineare che invece non dipendono dalla scelta della base. Vediamo di seguito due di questi invarianti.

- La *traccia* di una trasformazione lineare è la somma degli elementi diagonali di una qualunque delle sue matrici

$$\text{tr}\mathbf{A} = \sum_i A_{ii}.$$

- Il *determinante* di una trasformazione lineare si costruisce per induzione. Il determinante di una matrice 1×1 è pari al valore del suo unico elemento.

Per qualunque altra dimensione $n \times n$, con $n > 1$, si segue il seguente procedimento: si identifica una qualunque riga o colonna della matrice (per esempio, la i -esima riga formata dagli elementi $\{L_{i1}, \dots, L_{in}\}$); per ogni elemento L_{ij} si calcola il *cofattore* C_{ij} , ovvero $(-1)^{i+j}$ moltiplicato per il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuto dalla matrice di partenza eliminando l' i -esima riga e la j -esima colonna; infine vale la formula

$$\det \mathbf{L} = \sum_{j=1}^n L_{ij} C_{ij}.$$

Nei casi $n = 2$ e $n = 3$ tale formula fornisce

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} &= L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}, \\ \det \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} &= L_{11}(L_{22}L_{33} - L_{23}L_{32}) - L_{12}(L_{21}L_{33} - L_{23}L_{31}) \\ &\quad + L_{13}(L_{21}L_{32} - L_{22}L_{31}). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Si dimostra che la traccia è un'operazione lineare, mentre il determinante è una funzione moltiplicativa. Per tutte le trasformazioni lineari \mathbf{L}, \mathbf{M} vale quindi

$$\text{tr}(\mathbf{L} + \mathbf{M}) = \text{tr} \mathbf{L} + \text{tr} \mathbf{M}, \quad \det(\mathbf{LM}) = (\det \mathbf{L})(\det \mathbf{M}).$$

Trasposto, inverso

Si dimostra che per ogni trasformazione lineare \mathbf{L} ne esiste una e una sola, detta *trasposta* di \mathbf{L} e indicata con \mathbf{L}^\top , che soddisfa

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{L}\mathbf{v}) = (\mathbf{L}^\top \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Dalla (A.23) segue che gli elementi di matrice della trasformazione trasposta sono semplicemente i trasposti degli elementi di matrice originali: $(\mathbf{L}^\top)_{ij} = L_{ji}$.

Per tutte le trasformazioni lineari \mathbf{L}, \mathbf{M} valgono le proprietà

$$(\mathbf{L}^\top)^\top = \mathbf{L}, \quad (\mathbf{L} + \mathbf{M})^\top = \mathbf{L}^\top + \mathbf{M}^\top, \quad (\mathbf{LM})^\top = \mathbf{M}^\top \mathbf{L}^\top, \quad \det(\mathbf{L}^\top) = \det \mathbf{L}.$$

Una trasformazione si dice *simmetrica* o *antisimmetrica* se è uguale o opposta al suo trasposto. Di conseguenza, per esempio, una trasformazione simmetrica \mathbf{S} soddisfa

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} = (\mathbf{S}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (\text{A.25})$$

Qualunque trasformazione si può scomporre in modo unico come somma di una trasformazione simmetrica e una antisimmetrica

$$\mathbf{L} = \mathbf{S} + \mathbf{W}, \quad \text{con} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^\top), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^\top).$$

Si dimostra che per ogni trasformazione lineare \mathbf{L} tale che $\det \mathbf{L} \neq 0$ (dette *invertibili*) esiste una e una sola trasformazione, detta *inversa* di \mathbf{L} e indicata con \mathbf{L}^{-1} , che soddisfa $\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{I}$. Nella definizione di inversa compare la trasformazione lineare identica \mathbf{I} , che è definita da $\mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$.

Per tutte le trasformazioni lineari invertibili \mathbf{L}, \mathbf{M} valgono le proprietà

$$(\mathbf{L}^{-1})^{-1} = \mathbf{L}, \quad (\mathbf{LM})^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}^{-1}, \quad (\mathbf{L}^{-1})^{\top} = (\mathbf{L}^{\top})^{-1}, \quad \det(\mathbf{L}^{-1}) = (\det \mathbf{L})^{-1}.$$

Si dimostra che se \mathbf{L} è invertibile, gli elementi di matrice della trasformazione inversa si ottengono dividendo il cofattore dell'elemento trasposto di \mathbf{L} per il determinante di \mathbf{L} : $(L^{-1})_{ij} = C_{ji}/(\det \mathbf{L})$.

Autovettori, autovalori, diagonalizzazione

Un vettore $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ si dice *autovettore* della trasformazione \mathbf{L} se vale $\mathbf{L}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. In tal caso lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice *autovalore associato a \mathbf{u}* . Si dimostra che gli autovalori di una trasformazione lineare coincidono con le radici del suo *polinomio caratteristico*, ovvero soddisfano $\det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, dove \mathbf{I} è la trasformazione identica tale che $\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

Una trasformazione lineare \mathbf{L} si dice *diagonalizzabile* se esiste una base \mathbf{e} nella quale essa è rappresentata da una matrice diagonale, ovvero $L_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Se una trasformazione è diagonalizzabile gli elementi della base dove essa si diagonalizza sono suoi autovalori, e gli elementi diagonali nella corrispondente matrice sono i relativi autovalori.

Teorema A.5 (Teorema spettrale). *Una trasformazione lineare reale è diagonalizzabile in una base ortonormale se e solo se è simmetrica.*

Trasformazioni ortogonali

Una trasformazione lineare \mathbf{R} si dice *ortogonale* se la sua trasposta coincide con la sua inversa: $\mathbf{R}^{\top} = \mathbf{R}^{-1}$.

Le trasformazioni ortogonali godono di numerose proprietà:

- conservano le lunghezze: $|\mathbf{R}\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|$ per ogni $\mathbf{u} \in V$;
- conservano gli angoli: $\cos\{\mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{R}\mathbf{v}\} = \cos\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
- (come conseguenza delle proprietà precedenti) trasformano basi ortonormali in basi ortonormali;
- hanno determinante unitario: $\det \mathbf{R} = \pm 1$.

Nel caso $n = 3$, e restringendosi alle trasformazioni ortogonali *speciali*, ovvero quelle con $\det \mathbf{R} = +1$, valgono ulteriori proprietà, che identificano queste trasformazioni come *rotazioni*:

- ammettono sempre l'autovalore $\lambda = +1$, ovvero esiste sempre un insieme di vettori lasciati invariati dalla trasformazione ($\mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{u}$);

- tale insieme ha sempre dimensione 1, ovvero identifica un *asse di rotazione*, con l'unica banale eccezione della trasformazione identica \mathbf{I} , che lascia invariati tutti i vettori;
- supponendo $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$, possiamo scomporre ogni vettore come $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$, con componenti rispettivamente parallela e ortogonale all'asse di rotazione. Così facendo, si trova che la componente \mathbf{v}_{\parallel} rimane invariata, mentre la componente ortogonale ruotata di un angolo fisso θ , detto *angolo di rotazione*

$$\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{R}(\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{R}\mathbf{v}_{\perp}, \quad \text{e} \quad \cos\{\mathbf{R}\mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{v}_{\perp}\} = \cos\theta \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in V;$$

- l'angolo di rotazione si ottiene dalla traccia della trasformazione lineare

$$\text{tr}\mathbf{R} = 1 + 2\cos\theta.$$

Un asse di rotazione può essere identificato da due due versori (uno opposto all'altro). Analogamente, un angolo di rotazione può essere definito in verso orario o antiorario. Diremo che uno specifico angolo di rotazione è definito *positivo* rispetto a un versore se l'angolo è antiorario quando visto dal verso indicato dal versore. In formule, dato un piano ortogonale a un versore \mathbf{u} , si può identificare l'angolo di rotazione positivo rispetto a \mathbf{u} con la seguente proprietà: preso un qualunque vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ nel piano, il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ determina con \mathbf{v} un angolo di $+\frac{\pi}{2}$ nel verso positivo rispetto a \mathbf{u} .

Esempio (Prodotto tensoriale). Dati due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, il loro *prodotto tensoriale* è la trasformazione lineare $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ che a ogni vettore \mathbf{v} associa il vettore

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}.$$

- Posto, in una base ortonormale, $\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum_j b_j \mathbf{e}_j$, la matrice che rappresenta $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ nella stessa base ha elementi

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a} = a_i b_j.$$

- Il trasposto del prodotto tensoriale soddisfa $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.
Infatti $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij}^T = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})_{ji}$.
- Il prodotto tensoriale soddisfa $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ e $\det(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 0$.
Infatti $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \sum_i (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ii} = \sum_i a_i b_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
Inoltre, scelta una base con primo elemento parallelo a \mathbf{a} , e gli altri ortogonali allo stesso vettore, tutte le colonne meno la prima (che sono le immagini dei vettori della base) saranno nulle, e così sarà di conseguenza il determinante.
- Il prodotto tensoriale ammette i seguenti autovalori e autovettori: tutti i vettori ortogonali a \mathbf{b} sono autovettori con autovalore nullo, e tutti i vettori paralleli a \mathbf{a} sono autovettori, con autovalore $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.
Infatti $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ se $\mathbf{v} \perp \mathbf{b}$. Inoltre $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\lambda \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\lambda \mathbf{a}$.
- Il prodotto tensoriale è diagonalizzabile se e solo se i due fattori sono paralleli. Segue dalla proprietà riguardante il trasposto e dal teorema spettrale.

- La composizione di due prodotti tensoriale soddisfa $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}$. Infatti, dato un qualunque vettore $\mathbf{v} \in V$,

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{d})\mathbf{v}.$$

Esercizi

A.7 (Vettore assiale). Sia \mathbf{W} una trasformazione lineare antisimmetrica, e sia $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale dello spazio V su cui essa agisce.

- Dimostrare che gli elementi diagonali della matrice associata a \mathbf{W} nella base \mathbf{e} sono nulli.
- Dimostrare, determinandone le componenti nella base \mathbf{e} , che esiste un vettore \mathbf{w} (detto *vettore assiale di \mathbf{W}*) tale che $\mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.
- Dimostrare che $\mathbf{W}^2 = \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} - w^2 \mathbf{I}$, dove \mathbf{I} è la trasformazione identica.

A.8. Sia $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale dello spazio V su cui agisce il tensore

$$\mathbf{L} = 2\beta \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \beta \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

- Determinare la matrice associata a \mathbf{L} nella base \mathbf{e} .
- Determinare α, β affinché \mathbf{L} sia: (i) simmetrica, (ii) antisimmetrica. Nel primo caso, determinare autovalori e autovettori di \mathbf{L} . Nel secondo, determinare il vettore assiale associata ad essa.

A.9. Dati un versore \mathbf{e} , e uno scalare $\theta \in \mathbb{R}$, sia $\mathbf{W}(\mathbf{e})$ il tensore antisimmetrico di vettore assiale \mathbf{e} . Dimostrare che la trasformazione lineare

$$\mathbf{R} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos \theta (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \sin \theta \mathbf{W}(\mathbf{e})$$

è una rotazione di angolo θ attorno all'asse \mathbf{e} .

Ricavare la matrice associata alla rotazione di angolo $\frac{\pi}{6}$ attorno all'asse parallelo al versore $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$, nella base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

A.3 Curve, superfici

Definizione A.6 (Curve regolari). Una curva è un'applicazione γ che associa a ogni valore di un parametro scalare $t \in [t_0, t_1]$ un punto dello spazio euclideo: $A: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{E}$.

Facendo riferimento all'origine $O \in \mathcal{E}$, i punti visitati dalla curva A si identificano attraverso la funzione vettoriale $OA(t)$. Una curva si dice regolare se tale funzione vettoriale risulta differenziabile, e la sua derivata $\dot{A} = \frac{d}{dt}(OA(t))$ non si annulla mai.

Definizione A.7 (Ascissa curvilinea). Sia $A: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{E}$ una curva regolare. Il parametro ascissa curvilinea o lunghezza d'arco misura la lunghezza della curva dal suo punto iniziale $A(t_0)$ alla sua posizione attuale.

Scelta una base ortonormale e posto $OA(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, l'ascissa curvilinea, che non va confusa con la distanza dal punto attuale al punto iniziale, si calcola attraverso l'integrale

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{A}(t')| dt' = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2(t') + \dot{y}^2(t') + \dot{z}^2(t')} dt'. \quad (\text{A.26})$$

Come conseguenza risulta che l'ascissa curvilinea s è una funzione strettamente crescente, e quindi invertibile, del parametro t . Chiameremo $\hat{t}(s)$ tale funzione inversa che in pratica fornisce, per ogni valore della lunghezza percorsa s , il valore del parametro t dopo il quale la curva ha percorso la distanza s . La (A.26), insieme alla formula di derivazione della funzione inversa, implica

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{A}| \quad \iff \quad \frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \frac{1}{|\dot{A}|_{t=\hat{t}(s)}}. \quad (\text{A.27})$$

Detta $L = s(t_1)$ la lunghezza totale della curva, possiamo associare a ogni curva $A(t)$ la curva $\hat{A} : [0, L] \rightarrow \mathcal{E}$ definita in modo che $\hat{A}(s)$ coincida con la posizione occupata da A dopo aver percorso un tratto di lunghezza s . In formule

$$\hat{A}(s) = A(\hat{t}(s)).$$

Definizione A.8 (Retta e versore tangente). Sia $A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{E}$ una curva regolare. Chiamiamo retta tangente in $A(t)$, per $t \in [t_0, t_1]$, la retta passante per $A(t)$ e parallela a $\dot{A}(t)$. Di conseguenza si definisce versore tangente in $A(t)$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{A}}{|\dot{A}|}.$$

In virtù della (A.27), il versore tangente si può ottenere anche attraverso la derivazione diretta della curva parametrizzata in termini dell'ascissa curvilinea

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\hat{A}}{ds} = \hat{A}'(s). \quad (\text{A.28})$$

Le rette (vedi Definizione A.1) sono curve caratterizzate dal possedere un versore tangente costante in tutti i loro punti. Esse quindi coincidono con una loro qualunque retta tangente. La curvatura e il versore normale, che introduciamo di seguito, forniscono informazioni riguardo la variazione del versore tangente lungo la curva, e rappresentano quindi una misura della linearità della stessa.

Definizione A.9 (Curvatura, versore normale). Sia $A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{E}$ una curva regolare. La curvatura κ è la misura della variazione del versore tangente per unità di lunghezza lungo la curva. Nei punti dove $\kappa \neq 0$ il versore tangente fornisce la direzione di tale variazione. In formule:

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (\text{se } \kappa \neq 0). \quad (\text{A.29})$$

L'inverso della curvatura viene chiamato raggio di curvatura $R = \kappa^{-1}$.

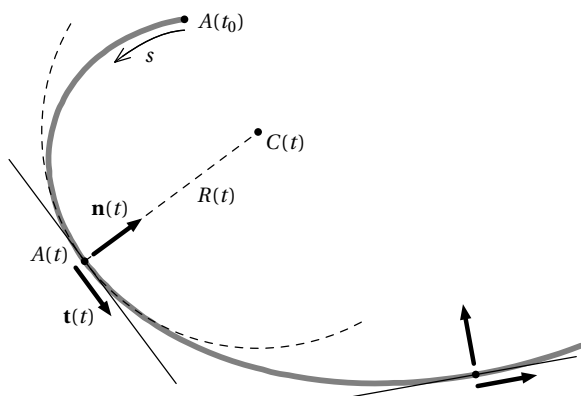


Figura A.3 Retta tangente, cerchio osculatore e triedro intrinseco. Il versore binormale è uscente dal foglio

Abbiamo dimostrato in precedenza (vedi Esercizio 1.2 a pagina 8) che condizione necessaria e sufficiente affinché un vettore abbia modulo costante è che esso sia ortogonale alla sua derivata. Di conseguenza, e siccome il \mathbf{t} per costruzione è un versore e ha quindi modulo costante (pari a 1), la sua derivata risulta sempre ortogonale a esso. Risulta così che il versore normale, che per definizione è parallelo alla derivata del versore tangente, deve necessariamente essere ortogonale a quest'ultimo (vedi Fig. A.3).

Risulta possibile calcolare la curvatura di una curva regolare in un suo punto generico $A(t)$ attraverso l'espressione

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{A} \wedge \ddot{A}|}{|\dot{A}|^3},$$

dove t è il parametro della curva, e non necessariamente l'ascissa curvilinea.

Il raggio di curvatura R ammette un'interessante interpretazione geometrica. Si dimostra infatti che il *cerchio osculatore*, ovvero il cerchio che meglio approssima la curva nell'intorno di un dato punto, giace nel piano identificato dai versori $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$, ha raggio pari a R e centro in $C(t) = A(t) + R(t) \mathbf{n}(t)$.

Definizione A.10 (Triedro di Frenet-Serret). Sia $A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{E}$ una curva regolare, e sia $A(t)$ un suo punto tale che $\kappa(t) \neq 0$. Definiamo triedro intrinseco di A nel punto considerato la base ortonormale $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ formata dal versore tangente, dal versore normale e dal versore binormale $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$.

Così come le rette si possono caratterizzare dalla costanza del versore tangente, le curve *piane* sono accomunate dalla costanza del versore binormale, come mostra anche la Figura A.3. Analizziamo quindi la derivata del versore binormale,

anche alla luce della (A.29)

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}) = \underbrace{\frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \mathbf{n}}_0 + \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{ds},$$

dove il primo addendo si annulla in quanto la derivata di \mathbf{t} è pari a $\kappa \mathbf{n}$. Di conseguenza la derivata di \mathbf{b} , che già risultava ortogonale a \mathbf{b} per la proprietà già vista della derivata di un vettore di modulo costante, risulta ortogonale anche a \mathbf{t} , e deve quindi necessariamente essere parallela a \mathbf{n} . Questa osservazione motiva la seguente definizione.

Definizione A.11 (Torsione). *Sia $A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{E}$ una curva regolare, e sia $A(t)$ un suo punto tale che $\kappa(t) \neq 0$. Chiamiamo torsione la componente di $\mathbf{b}'(s)$ lungo \mathbf{n} :*

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau \mathbf{n}. \tag{A.30}$$

Di conseguenza, una curva con torsione nulla giace necessariamente in un piano, identificato da uno qualunque dei suoi punti e dalla direzione ortogonale a \mathbf{b} . Le seguenti formule completano le informazioni riguardo la variazione del triedro intrinseco lungo una curva regolare.

Proposizione A.12 (Formule di Frenet-Serret). *Sia $A : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{E}$ una curva regolare, e sia $A(t)$ un suo punto tale che $\kappa(t) \neq 0$. Valgono allora le formule di Frenet-Serret*

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau \mathbf{n}. \tag{A.31}$$

Dimostrazione. La prima e la terza delle (A.31) coincidono con le (A.29), (A.30). Per dimostrare la seconda osserviamo che i versori del triedro intrinseco sono legati anche dalla relazione $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$. Differenziando questa relazione troviamo

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \tau \mathbf{n} \wedge \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b} \wedge \mathbf{n} = -\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}. \quad \square$$

Superfici

Così come le curve possono essere viste come il luogo dei punti dello spazio euclideo che si ottengono al variare di un parametro, le superfici sono luoghi di punti ottenuti al variare di *due* parametri. Uno studio approfondito delle proprietà delle superfici si colloca ben al di là degli obbiettivi di questo testo. Ci limitiamo quindi a presentare una minima rassegna di risultati e definizioni che possono risultare utili per meglio inquadrare alcuni passaggi del presente testo.

Definizione A.13 (Superficie regolare). *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio aperto connesso del piano. Sia $S : D \rightarrow \mathcal{E}$ un'applicazione che assegna un punto dello spazio euclideo a ogni valore della coppia di parametri $(u, v) \in D$, tale che, scelti $O \in \mathcal{E}$ e una base ortonormale $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, si abbia $OS(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$.*

L'immagine $S(D)$ dell'applicazione introdotta rappresenta una superficie regolare se le funzioni $x, y, z: D \rightarrow \mathbb{R}$ sono differenziabili con continuità e se, detti

$$S_u = \frac{\partial OS(u, v)}{\partial u}, \quad S_v = \frac{\partial OS(u, v)}{\partial v},$$

vale $S_u \wedge S_v \neq \mathbf{0}$ per ogni $(u, v) \in D$.

Definizione A.14 (Versore normale, piano tangente). Sia $S: D \rightarrow \mathcal{E}$ un'applicazione che definisce una superficie regolare. Il versore

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{S_u \wedge S_v}{|S_u \wedge S_v|}$$

è detto versore normale a $S(D)$ nel punto $S(u, v)$. Il piano passante per tale punto e ortogonale al versore normale viene detto piano tangente a $S(D)$ nel punto $S(u, v)$.

Il piano tangente a una superficie (calcolato in un dato punto) ha la proprietà di contenere le rette tangenti a tutte le curve contenute nella superficie e passanti per il punto dato. Osserviamo che una curva interamente contenuta nella superficie si ottiene componendo la funzione $S(u, v)$ con un'applicazione $t \mapsto (u(t), v(t))$, per avere la curva $S(u(t), v(t))$.

Speciali curve contenute in una superficie sono le *geodetiche*, caratterizzate dalla proprietà che la loro normale coincide con la normale alla superficie cui appartengono. Si dimostra che questa proprietà caratterizza le curve che, mantenendosi sempre dentro una superficie, uniscono due punti percorrendo la distanza minima.

Esercizi

A.10. Calcolare il triedro intrinseco e il cerchio osculatore della *doppia goccia d'acqua* (o *manubrio*) $OA(t) = \cos t \mathbf{i} + \cos^2 t \sin t \mathbf{j}$, $(t \in [0, 2\pi])$, in $t = \frac{\pi}{6}$.

A.4 Equazioni differenziali ordinarie (cenni)

La presente sezione è dedicata a una breve rassegna di risultati riguardanti alcuni tipi di equazioni differenziali ordinarie. Richiamiamo comunque prima un risultato di analisi che risulta utile nello studio della stabilità di sistemi con un grado di libertà (vedi Teorema 8.9 a pagina 215).

Teorema A.15 (Weierstrass). Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio compatto (ovvero limitato e chiuso) n -dimensionale, e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume massimo e minimo in D . Esistono cioè $x_m, x_M \in D$ tali che $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ per ogni $x \in D$.

Definizione A.16 (Problema di Cauchy [7]). Un'equazione differenziale ordinaria di ordine $n \in \mathbb{N}$ è un'equazione che coinvolge una funzione incognita di una

variabile $y(t)$ e una o più delle sue derivate, fino all'ordine massimo n .

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

L'equazione differenziale si dice esprimibile in forma normale se è esplicitabile nella derivata di ordine massimo: $y^{(n)}(t) = G(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Un problema di Cauchy è l'insieme di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n esprimibile in forma normale, e dei valori della funzione e delle sue derivate fino all'ordine $n - 1$ in un punto t_0 .

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = G(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Un'equazione differenziale può ammettere nessuna, un numero finito, o spesso infinite soluzioni. Il problema di Cauchy, invece ne ammette una e una sola sotto ipotesi piuttosto generali.

Teorema A.17 (Teorema di esistenza e unicità di Picard). Consideriamo il problema di Cauchy (A.32). Se la funzione G è continua nella variabile indipendente t e lipschitziana nelle variabili $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ allora esiste un $T > 0$ tale che il problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione per $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

Ricordiamo a tal proposito che una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* in D se esiste una costante $K > 0$ tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2| \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in D.$$

Chiudiamo la presente sezione passando in rassegna le strategie e le formule risolutive di alcune delle più semplici equazioni differenziali.

Equazioni del primo ordine a variabili separabili

Consideriamo il problema di Cauchy del primo ordine

$$y' = f(t)g(y), \quad \text{con } y(t_0) = y_0,$$

con f funzione continua e g differenziabile con continuità (per garantirne la lipschitzianità). Nel caso particolare $g(y_0) = 0$ l'equazione ammette la soluzione costante. Altrimenti il problema si risolve separando le variabili e integrando a partire dalle condizioni iniziali. Si ha così in generale

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 && \text{se } g(y_0) = 0 \\ \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dv}{g(v)} &= \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau && \text{se } g(y_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Equazioni differenziali lineari

Un'equazione differenziale ordinaria si dice *lineare* la funzione G in (A.32) è una combinazione lineare (con eventuale termine noto) delle derivate della funzione incognita

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = f(t).$$

L'equazione differenziale si dice *omogenea* se $f(t) \equiv 0$.

La struttura delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari è particolarmente semplice, in quanto la soluzione generale si esprime come

$$y(t) = y_p(t) + C_1 y_1(t) + \dots + C_n y_n(t), \quad \text{con } C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.33})$$

dove y_p è una soluzione particolare dell'equazione completa e le $\{y_i, i = 1, \dots, n\}$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata (ovvero quella ottenuta sostituendo il termine noto $f(t)$ con 0).

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Consideriamo l'equazione $y'(t) + a(t) y(t) = f(t)$. Detta $A(t)$ una primitiva di $a(t)$, ovvero una funzione tale che $A' = a$, si può moltiplicare l'equazione per e^A e scriverla quindi come

$$\frac{d}{dt} \left(y(t) e^{A(t)} \right) = e^{A(t)} f(t).$$

Di conseguenza la soluzione dell'equazione che soddisfa $y(t_0) = y_0$ è data da

$$y(t) e^{A(t)} - y_0 e^{A(t_0)} = \int_{t_0}^t e^{A(\tau)} f(\tau) d\tau,$$

che si risolve esplicitamente per fornire

$$y(t) = y_0 e^{A(t_0) - A(t)} + \int_{t_0}^t e^{A(\tau) - A(t)} f(\tau) d\tau.$$

La soluzione si semplifica nel caso che la funzione coefficiente $a(t)$ sia costante, $a(t) \equiv \alpha$. In tal caso possiamo scegliere $A(t) = \alpha t$, e si ha

$$y(t) = y_0 e^{\alpha(t_0 - t)} + \int_{t_0}^t e^{\alpha(\tau - t)} f(\tau) d\tau.$$

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Le equazioni differenziali di maggior interesse per la Meccanica sono quelle del secondo ordine, visto che le equazioni di moto coinvolgono le accelerazioni, e sono quindi equazioni differenziali del secondo ordine nelle posizioni dei punti. In

questa breve rassegna analizzeremo comunque solo le più semplici tra le equazioni differenziali di questo tipo, ovvero quelle lineari a coefficienti costanti, che risolvono problemi di Cauchy del tipo

$$\alpha \ddot{y}(t) + \beta \dot{y}(t) + \gamma y(t) = f(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0. \quad (\text{A.34})$$

La natura delle soluzioni del problema (A.34) è del tipo (A.33), trattandosi comunque di un'equazione differenziale lineare. In aggiunta, risulta possibile in questo caso identificare esplicitamente le soluzioni indipendenti del problema omogeneo associato. Il loro carattere dipende dalle radici del *polinomio caratteristico* associato $\mathcal{P}(\lambda) = \alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma$.

- Se il polinomio ha radici reali distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (caso $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$) le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono esponenziali

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

- Se il polinomio ha radici reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (caso $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$) le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono ancora esponenziali, ma compare anche una dipendenza polinomiale dalla variabile indipendente

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = t e^{\lambda_1 t}.$$

- Se il polinomio ha radici complesse $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda \pm i\mu$ (caso $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$) le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono combinazioni di esponenziali e funzioni trigonometriche

$$y_1(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad y_2(t) = e^{\lambda t} \sin \mu t.$$

Una volta identificate due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata, vi sono diversi metodi adatti a determinare la soluzione particolare necessaria per completare la soluzione generale. Una di queste è il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, e consiste nel cercare una soluzione del tipo $y_p(t) = C_1(t) y_1(t) + C_2(t) y_2(t)$. Sostituendo tale espressione nell'equazione differenziale di partenza si trova

$$\begin{aligned} & \alpha \left[(\dot{C}_1 \dot{y}_1 + \dot{C}_2 \dot{y}_2) + \underbrace{(C_1 \ddot{y}_1 + C_2 \ddot{y}_2)}_{\frac{d}{dt}(\dot{C}_1 y_1 + \dot{C}_2 y_2)} \right] + \\ & + \beta \left[\underbrace{(C_1 \dot{y}_1 + C_2 \dot{y}_2)}_{\dot{C}_1 y_1 + \dot{C}_2 y_2} \right] + \gamma \left[\underbrace{C_1 y_1 + C_2 y_2} \right] = f. \end{aligned}$$

Il fatto che la soluzione si sia costruita partendo dalle soluzioni dell'equazione omogenea associata implica che la somma dei tre termini sottolineati si annulla. Imponendo inoltre che si annulli anche il termini racchiuso da una parentesi

graffa si ottiene il seguente sistema per i coefficienti variabili

$$\begin{cases} \dot{C}_1 y_1 + \dot{C}_2 y_2 = 0 \\ \dot{C}_1 \dot{y}_1 + \dot{C}_2 \dot{y}_2 = f(t)/\alpha. \end{cases}$$

Indicato con $W(t) = y_1(t)\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)y_2(t)$ il *wronskiano* delle soluzioni fondamentali dell'omogenea (che risulta non annullarsi mai), i coefficienti della soluzione particolare soddisfano

$$\dot{C}_1(t) = -W(t)^{-1}f(t)y_2(t)/\alpha, \quad \dot{C}_2(t) = W(t)^{-1}f(t)y_1(t)/\alpha,$$

e possono a questo punto essere determinati per integrazione diretta.

Oscillatore armonico, risonanza

Caso particolare di equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficiente costante è l'equazione del moto dell'oscillatore armonico, ovvero di un sistema con un grado di libertà (sia y la coordinata libera), una posizione di equilibrio in $y = 0$ e una forza di richiamo verso tale posizione che aumenta linearmente con la distanza da essa. Si ha quindi

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = f(t), \quad \text{con } k, m > 0.$$

Questa equazione rientra ovviamente tra quelle appena studiate. Le radici del polinomio caratteristico sono puramente immaginarie: $\lambda = \pm i\omega$, con $\omega = \sqrt{k/m}$. Di conseguenza le soluzioni fondamentali sono puramente oscillatorie:

$$y_1(t) = \cos \omega t, \quad y_2(t) = \sin \omega t,$$

e il loro wronskiano è pari a 1. Si ha quindi

$$\dot{C}_1(t) = -f(t)(\sin \omega t)/m, \quad \dot{C}_2(t) = f(t)(\cos \omega t)/m,$$

le cui soluzioni analizzeremo di seguito in alcuni casi particolari.

- *Oscillatore libero.* Consideriamo il caso omogeneo $f(t) = 0$. In tal caso la soluzione generale è $y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ da determinare richiedendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali del problema di Cauchy. Se, per esempio, le condizioni iniziali sono imposte nel tempo $t_0 = 0$ (caso particolare cui faremo riferimento anche nei punti seguenti) si ottiene semplicemente

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (\text{A.35})$$

- *Oscillatore caricato.* Supponiamo ora $f(t) = f_0$. In questo caso la soluzione particolare risulta essere la costante $y_p(t) = f_0/k$, e la soluzione generale risulta

essere

$$y(t) = \frac{f_0}{k} + \left(y_0 - \frac{f_0}{k}\right) \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

- *Oscillatore forzato.* Supponiamo ora $f(t) = f_0 \cos \Omega t$, con $\Omega \neq \omega$. La soluzione particolare diventa ora una funzione trigonometrica oscillante con frequenza Ω

$$y_p(t) = \frac{f_0 \cos \Omega t}{m(\omega^2 - \Omega^2)},$$

ed ha in particolare un'ampiezza che può diventare estremamente grande quando la frequenza della forzante Ω si avvicina alla frequenza naturale ω . La soluzione generale risulta ora

$$y(t) = \frac{f_0(\cos \Omega t - \cos \omega t)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} + y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

- *Risonanza.* Nel caso particolare $\Omega = \omega$, ovvero quando la forzante possiede la stessa frequenza con cui oscillerebbe liberamente il sistema, la soluzione particolare aumenta fino a divergere per tempi lunghi

$$y_p(t) = \frac{f_0 t \sin \omega t}{2m\omega}.$$

Di conseguenza la soluzione generale diventa

$$y(t) = \frac{f_0 t \sin \omega t}{2m\omega} + y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

A.5 Soluzioni degli esercizi

A.3 Supponiamo che due dei tre vettori coinvolti nel prodotto misto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ siano paralleli. Se sono quelli che si moltiplicano nel prodotto vettoriale, questo risulta nullo e così il prodotto misto. Se invece sono paralleli il vettore \mathbf{a} e uno degli altri due (per esempio, \mathbf{b}), basta effettuare una permutazione ciclica per raggiungere lo stesso risultato

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0.$$

A.4 L'identità proposta si dimostra utilizzando tre volte la proprietà (A.11).

A.5 L'angolo formato da \mathbf{u} e \mathbf{v} vale

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = -\frac{1}{\sqrt{15}} \quad (\theta \approx 105^\circ).$$

Si ha inoltre $r = \{P \in \mathcal{E} : OP = OA + \lambda \mathbf{v}\}$, ovvero $OP = a(1 + \lambda) \mathbf{i} + a\lambda \mathbf{j} - a\lambda \mathbf{k}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\pi = \{Q \in \mathcal{E} : BQ \cdot \mathbf{u} = 0\}$. Ponendo $OQ = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, l'equazione cartesiana del piano π è quindi $x - 2y + 2a = 0$.

Sia $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ un versore parallelo a \mathbf{v} . La proiezione di B su r è data da B_* , con

$$AB_* = (AB \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} = \frac{(AB \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = -\frac{2}{3}\mathbf{v}.$$

Inoltre, $d^2(B, r) = |BB_*|^2 = |AB \wedge \hat{\mathbf{v}}|^2 = \frac{2}{3}a^2$.

Sia $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$ un versore parallelo a \mathbf{u} . La proiezione di A su π è data da A^* , con

$$BA^* = BA - (BA \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \frac{3}{5}a(2\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

Inoltre, $d^2(A, \pi) = (BA \cdot \hat{\mathbf{u}})^2 = \frac{1}{5}a^2$.

Il punto A^\sharp simmetrico di A rispetto a π è dato da

$$OA^\sharp = OB + BA^\sharp = OA - 2(BA \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \frac{7}{5}a\mathbf{i} - \frac{4}{5}a\mathbf{j}.$$

A.6 I punti del triangolo ABC possono essere scritti come combinazioni lineari convesse dei vertici, con coordinate

$$\begin{aligned} x &= \lambda x_A + \mu x_B + \eta x_C \\ y &= \lambda y_A + \mu y_B + \eta y_C & 0 \leq \lambda, \mu, \eta \leq 1, \quad \lambda + \mu + \eta = 1. \\ z &= \lambda z_A + \mu z_B + \eta z_C, \end{aligned}$$

Si noti che i punti corrispondenti a $\lambda = 0$ individuano il lato BC (e similmente per gli altri lati).

A.7 Gli elementi diagonali della matrice associata a una trasformazione antisimmetrica devono essere necessariamente nulli in quanto la trasformazione trasposta (che ha gli stessi elementi diagonali) coincide con la sua opposta

$$\left. \begin{aligned} W_{ii} &= -W_{ii}^\top \\ W_{ii}^\top &= W_{ii} \end{aligned} \right\} \implies W_{ii} = 0.$$

Cerchiamo $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3$ affinché $\mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$

$$\begin{pmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_3 v_2 + w_2 v_3 \\ w_3 v_1 - w_1 v_3 \\ -w_2 v_1 + w_1 v_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} w_1 = -W_{23} \\ w_2 = W_{13} \\ w_3 = -W_{12}. \end{cases}$$

L'identità $\mathbf{W}^2 = \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} - w^2 \mathbf{I}$ si dimostra verificando l'uguaglianza tra le espressioni delle matrici a membro sinistro e destro nella base \mathbf{e} .

A.8 La matrice associata a \mathbf{L} nella base \mathbf{e} è $\begin{pmatrix} 2\beta & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$.

La trasformazione \mathbf{L} è simmetrica se $\alpha = -1$ (per ogni $\beta \in \mathbb{R}$); è antisimmetrica se $\beta = 0$ e $\alpha = 1$.

Ricordando che le colonne della matrice associata a \mathbf{L} in una base forniscono le componenti dell'immagine dei vettori della base, si vede subito come valga $\mathbf{L}\mathbf{e}_3 = -\beta\mathbf{e}_3$, per cui un autovettore è sempre \mathbf{e}_3 , con $-\beta$ come autovalore. Ricaviamo gli altri due autovalori (nel caso simmetrico) dalle radici del polinomio caratteristico

$$\det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 2\beta - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta - \lambda \end{pmatrix} = (-\beta - \lambda)(\lambda^2 - 2\beta\lambda - 1) = 0,$$

da cui si ottengono gli ulteriori autovalori $\lambda_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 1}$. I corrispondenti autovettori sono $\mathbf{v}_{\pm} = \cos\theta_{\pm}\mathbf{e}_1 + \sin\theta_{\pm}\mathbf{e}_2$, con $\tan\theta_{\pm} = \beta \mp \sqrt{1 + \beta^2}$.

Se $\beta = 0$ e $\alpha = 1$ la trasformazione lineare è antisimmetrica, con vettore assiale $\mathbf{w} = -\mathbf{e}_3$.

A.9 Per verificare che il tensore $\mathbf{R} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos\theta(\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \sin\theta\mathbf{W}(\mathbf{e})$ è una rotazione basta scrivere la sua matrice in una qualunque base ortonormale il cui terzo versore sia \mathbf{e} . Tale matrice è

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e soddisfa le richieste $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$, $\det\mathbf{R} = +1$, $\text{tr}\mathbf{R} = 1 + 2\cos\theta$, $\mathbf{R}\mathbf{e} = \mathbf{e}$.

La matrice associata alla rotazione di angolo $\frac{\pi}{6}$ attorno all'asse parallelo al versore $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$, nella base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ risulta

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 & -1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Si osservi come i tre vettori colonna ottenuti identifichino una base ortonormale (quella ottenuta ruotando la base originale di $\frac{\pi}{6}$ attorno a \mathbf{e}).

A.10 Il triedro intrinseco è formato da

$$\mathbf{t}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{19}}(-4\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}), \quad \mathbf{n}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{19}}(\sqrt{3}\mathbf{i} - 4\mathbf{j}), \quad \mathbf{b}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \mathbf{k}.$$

Calcolando la curvatura

$$\kappa\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{|\dot{\mathbf{A}} \wedge \ddot{\mathbf{A}}|}{|\dot{\mathbf{A}}|^3} \Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{704}{19\sqrt{19}} \doteq 8.5$$

si ricava il raggio di curvatura $R\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1/\kappa\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e di conseguenza il centro del cerchio osculatore (vedi Fig. A.4)

$$OC\left(\frac{\pi}{6}\right) = OA\left(\frac{\pi}{6}\right) + R\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{n}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{704}(333\sqrt{3}\mathbf{i} + 188\mathbf{j}).$$

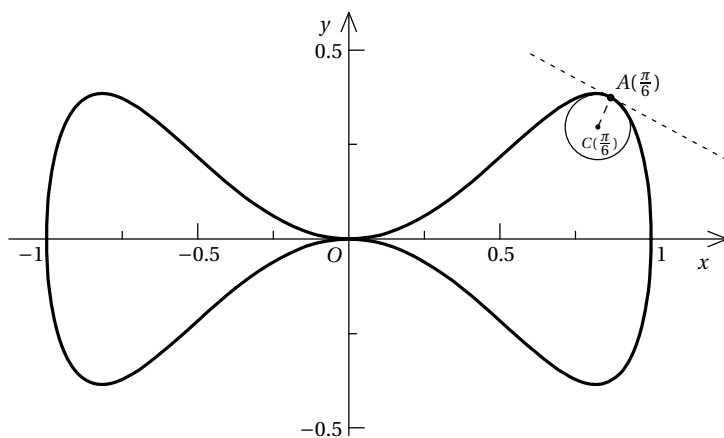


Figura A.4 Retta tangente e cerchio osculatore del manubrio in $OA(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{3}{8} \mathbf{j}$
(Esercizio A.10)

Riferimenti bibliografici

Diversi sono i testi di Meccanica Razionale che possono guidare lo studente in uno studio più completo e approfondito di quello proposto nel presente testo introduttorio. Tra questi, il più vicino al presente per spirito e linguaggio è indubbiamente

- P. Biscari, T. Ruggeri, G. Saccomandi, M. Vianello: *Meccanica Razionale* (3a edizione). Springer, Milano (2015).

Ottimi testi di Meccanica Razionale, sicuramente in grado di fornire una preparazione completa sono anche

- C. Cercignani: *Spazio, tempo, movimento*. Zanichelli, Bologna (1977).
- G. Grioli: *Lezioni di Meccanica Razionale*. Cortina, Padova (2002).
- T. Levi Civita, U. Amaldi: *Lezioni di Meccanica Razionale*. Zanichelli, Bologna (1923). [Riedizione a cura di E. Cirillo, G. Maschio, T. Ruggeri, G. Saccomandi per le Edizioni Compomat, Rieti (2012).]

Note

1. Max ABRAHAM (1875 – 1922) diede importanti contributi riguardanti l'Elettrodinamica. Insegnò Meccanica Razionale presso il Politecnico di Milano, e Fisica presso la Technische Hochschule di Stuttgart (pagina 117).
2. ARISTOTELE (384 a.C. - 322 a.C.) è uno dei più grandi filosofi e logici della storia. Ha anche fornito importanti contributi alla Fisica, e in particolare alla Cosmologia (pagine 113, 114, 136).
3. Daniel BERNOULLI (1700 – 1782) figlio di Johann (che superò in un concorso all'Università di Parigi), fornì fondamentali risultati nei campi della Fluidodinamica, della Probabilità e la Statistica (pagina 276).
4. Johann BERNOULLI (1667 – 1748) membro di una delle più prolifiche famiglie di scienziati, fu maestro del grande Eulero e fornì grandi contributi all'Analisi infinitesimale (pagina 276).
5. Jacques Antoine Charles BRESSE (1822 – 1883) insegnò Meccanica Applicata presso l'*École des ponts et chaussées*. Lasciò importanti contributi sulle flessioni delle travi (pagina 73).
6. Giovanni BURIDANO, nome italianizzato di Jean BURIDAN (1300ca – 1361) fu un filosofo e logico allievo di Guglielmo di Ockham. Fu Rettore dell'Università di Parigi (pagina 114).
7. Augustin-Louis CAUCHY (1789 – 1857) matematico e ingegnere, insegnò all'*École Polytechnique* e alla Sorbona prima di dover espatriare per motivi ideologici. Oltre a essere uno dei padri dell'Analisi moderna, basata sull'utilizzo del concetto di limite, stabilì le basi per lo studio della Meccanica dei Continui (pagina 266).
8. Michel CHASLES (1793 – 1880) allievo di Poisson, fu professore di Geometria alla Sorbona, e lasciò importanti contributi di Geometria Proiettiva (pagina 23).

© Springer-Verlag Italia 2016

P. Biscari, *Introduzione alla Meccanica Razionale. Elementi di teoria con esercizi*, UNITEXT – La Matematica per il 3+2 94, DOI 10.1007/978-88-470-5779-1

9. Gaspard-Gustave de CORIOLIS (1792–1843) fu assistente presso l'École Polytechnique di Parigi. Lo studio delle macchine rotanti lo portò a ricavare importanti risultati di Meccanica Relativa (pagina 69).
10. Charles Augustin de COULOMB (1736–1806) può considerarsi il fondatore delle teorie matematiche dell'elettricità e del magnetismo. Fu ingegnere nel Genio Militare francese fino a ricoprire il ruolo di Capitano (pagina 125).
11. Jean-Baptiste Le Rond D'ALEMBERT (1717–1783) studiò Filosofia, Diritto, Belle Arti, Diritto, Medicina, e infine Matematica, diventando una delle figure centrali dell'Illuminismo. Diresse le sezioni di Matematica e Scienze dell'*Encyclopédie* (pagine 136 e 201).
12. René DESCARTES, *Cartesio* (1596–1650) è stato un gran matematico e filosofo, discipline che contribuì a fondare nella loro versione moderna. Il suo *Metodo* diede luogo al Razionalismo (pagina 4).
13. Johann Peter Gustav Lejeune DIRICHLET (1805–1859) dimostrò importanti risultati in Teoria dei Numeri diventando a 27 anni l'allora più giovane Matematico dell'Accademia Prussiana delle Scienze (pagine 216 e 276).
14. Leonhard EULER (1707–1783) è uno dei più grandi matematici della storia. Professore a San Pietroburgo e Berlino, lasciò numerosi contributi fondamentali in molteplici aree della Matematica e della Meccanica (pagine 13, 116 e 173).
15. Jean Frédéric FRENET (1816–1900) fu professore di Matematica presso l'Università di Lione e diede fondamentali contributi alla Geometria Differenziale (pagine 51 e 277).
16. GALILEO Galilei (1564–1642) ha dato contributi alla Fisica, alla Matematica, e all'Astronomia tali da farlo considerare come padre della scienza moderna, specie grazie all'introduzione del Metodo Scientifico (pagine 67, 71, 114, 115 e 218).
17. Christiaan HUYGENS (1629–1695) matematico e astronomo olandese, fu Direttore della prestigiosa Académie des sciences di Parigi. Fu il primo a intuire l'esistenza di un anello attorno a Saturno (pagina 92 e 159).
18. Johann Samuel KÖNIG (1712–1757) fu allievo di Johann e Daniel Bernoulli [4, 3]. Ricavò diversi risultati sulla dinamica dei sistemi in parallelo alla sua attività di avvocato, fino a ottenere una cattedra di Filosofia e Matematica a Franeker (Paesi Bassi) (pagina 161).
19. Sofia KOVALEVSKAYA (1850–1891) studiò privatamente con Weierstrass, aggirando così l'allora vigente divieto per le donne di frequentare corsi universitari. Diventò a sua volta la prima donna ad ottenere (a Stoccolma, nel 1884) una cattedra universitaria (pagina 277).
20. Leopold KRONECKER (1823–1891) allievo di Dirichlet, ottenne significativi risultati in Analisi e Algebra. Insegnò presso l'Università di Berlino (pagina 4).
21. Joseph-Louis LAGRANGE, nato Giuseppe Luigi LAGRANGIA (1736–1813) è uno dei maggiori matematici di sempre, grazie a fondamentali contributi alla Meccanica e al Calcolo delle Variazioni. Diresse la Classe di Scienze dell'*Akademie der Wissenschaften* di Berlino e la sezione matematica dell'*Académie des sciences* di Parigi (pagine 136, 201 e 216).
22. Ludwig LANGE (1863–1936) fu un fisico, allievo di Wundt a Leipzig. Oltre ai lavori nel campo della Meccanica si occupò di Psicologia Sperimentale (pagina 114).
23. Pierre-Simon de LAPLACE (1749–1827) membro dell'*Académie des sciences* di Parigi, fu anche Ministro degli Interni con Napoleone (dimettendosi dopo poco più di un mese). Fornì profondi contributi alla Meccanica Celeste, ma anche in Analisi e Probabilità (pagine 207 e 277).
24. LEONARDO da Vinci (1452–1519) è stato un uomo di ingegno universale. Fornì mirabili contributi nella pittura, scultura, ingegneria, architettura e scienza. Trascorse il suo periodo lavorativo più prolungato a Milano (pagine 125 e 136).
25. Aleksandr Michajlovič LJAPUNOV (1857–1918) insegnò Meccanica Razionale presso l'Università e il Politecnico di Char'kov. Ricavò e pubblicò importantissimi risultati sulla stabilità dinamica già nella sua tesi di Dottorato di Ricerca (pagina 213).
26. Hendrik LORENTZ (1853–1928) ricevette il Premio Nobel per la Fisica nel 1902 per gli studi sull'effetto Zeeman. Occupò la cattedra di Fisica Teorica presso l'Università di Leida (pagina 117).

27. Arthur MORIN (1795–1880) fu un Ingegnere che realizzò diverse notevoli scoperte nella Meccanica. Insegnò presso e diresse il *Conservatoire national des arts et métiers* di Parigi (pagina 125).
28. Giulio Giuseppe MOZZI (1730–1813) lasciò importanti contributi in Meccanica da autodidatta. Fu Primo Ministro del Regno d'Etruria, vigente in Toscana dal 1801 al 1807 (pagina 26).
29. Sir Isaac NEWTON (1642–1727) è uno dei più grandi scienziati di tutti i tempi. I suoi contributi alla Meccanica e al Calcolo Differenziale sono stati fondamentali per la crescita della scienza moderna (pagine 114, 115 e 116).
30. Émile PICARD (1856–1941) insegnò calcolo differenziale alla Sorbona. I suoi lavori aprirono molteplici strade per lo studio delle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali (pagina 267).
31. Louis POINCARÉ (1859–1942) matematico e ingegnere, fu assistente di Analisi e Meccanica presso l'École Polytechnique di Parigi. Il suo libro di testo *Éléments de statique* fu il più utilizzato in Francia per più di 60 anni (pagina 177).
32. Siméon Denis POISSON (1781–1842) allievo di Laplace, insegnò Meccanica alla Sorbona. Ottenne importanti risultati in Elettromagnetismo, Ottica, e diede un importante contributo allo sviluppo della Statistica (pagine 17 e 275).
33. Joseph SERRET (1819–1885) fu professore di Algebra presso l'Università di Parigi. Ottenne i suoi migliori risultati in collaborazione con Frenet (pagina 51).
34. Jakob STEINER (1796–1863) matematico svizzero, insegnò Geometria a Berlino. Pubblicò importanti risultati su curve e superfici algebriche (pagina 92).
35. Karl Theodor Wilhelm WEIERSTRASS (1815–1897) arrivò, da autodidatta, ad occupare la cattedra di Matematica a Berlino, contribuendo fortemente a porre le basi rigorose dell'Analisi moderna. Insegnò privatamente Matematica a Sofia Kovalevskaya [19] (pagine 215 e 276).

Indice analitico

A

- accelerazione, 7
 - composizione, 69
 - Coriolis o complementare, 69
 - di gravità, 86
 - in atto di moto rigido, 70
 - trascinamento, 69
- angoli di Eulero, 13
 - nutazione, 13
 - precessione, 14
 - rotazione propria, 14
- appoggio, 141
- arco a tre cerniere, 135
- ascissa curvilinea, 262
- asse
 - dei nodi, 14
 - di istantanea rotazione, 19
 - di Mozzi, 24
 - di simmetria materiale, 87
 - giroscopico, 176
- asta caricata agli estremi, 153
- atto di moto, 7
 - elicoidale, 26
 - piano, 7
 - rigido, 16
 - rotatorio, 19, 26
 - traslatorio, 7, 26
- attrito, 125
 - dinamico, 125
 - radente, 123
 - statico, 125
 - relazione di Coulomb, 125, 152, 226
 - viscoso, 125
 - volvente, 123
- autovalore, 260
- autovettore, 260

B

- baricentro, 86, 143
- base, 250
 - ortonormale, 251
- biella, 48
- braccio, 79

C

- carrello, 42, 123
- catena cinematica, 133
- Cauchy, problema, 266
- centro
 - dei vettori paralleli, 85
 - delle accelerazioni
 - moto rigido piano, 70
 - moto rigido tridimensionale, 72
 - di istantanea rotazione, 21
- centro di massa, 85, 92, 158, 161
 - composizione, 87
- moto, 170
 - per inerzia, 175
- cerchi di Bresse, 73
- cerchio osculatore, 264
- cerniera, 40, 123, 140
 - cilindrica, 41, 189
 - sferica, 41
- cinematica rigida
 - formula fondamentale, 19
- coefficiente di attrito
 - dinamico, 125
 - statico, 125, 134, 210
 - volvente, 126
- cofattore, 259
- componente, 250
 - generalizzata
 - dell'opposto delle forze d'inerzia, 205
 - delle forze attive, 146, 148, 206

configurazione, 4
 – di equilibrio, 129
 – di riferimento, 5
 coni di Poincot, 177
 conservazione
 – quantità di moto, 117
 coordinata
 – cartesiana, 4
 – ciclica, 211
 – libera, 6, 11
 coppia, 79
 – di inerzia, 203
 – lavoro virtuale, 137
 – potenza, 180
 Coriolis
 – accelerazione, 69
 – teorema, 69
 corpo
 – deformabile, 2
 – rigido, 2
 equazioni di Eulero, 173
 equivalenza, 175
 struttura giroscopica, 176
 corsoio, 49
 curva regolare, 262
 – piana, 264
 curvatura, 263

D

delta di Kronecker, 4, 251
 densità, 85
 determinante, 258
 determinismo, 121, 207
 Dirichlet-Lagrange, teorema, 216
 distanza, 3
 – punto-piano, 256
 – punto-retta, 255

E

energia
 – cinetica, 159
 teorema, 179
 – meccanica, 184
 – potenziale, 118, 184
 equazione differenziale ordinaria, 266
 – a variabili separabili, 267
 – lineare, 268
 a coefficienti costanti, 268
 del primo ordine, 268
 del secondo ordine, 268
 omogenea, 268
 equazione pura, 136, 201
 Equazione simbolica della dinamica, 203

equazioni cardinali
 – dinamica, 168, 173, 179
 – statica, 131
 – sufficienza per il corpo rigido, 139, 174
 Equazioni di Eulero, 173
 Equazioni di Lagrange, 206
 – caso conservativo, 207
 equilibrio, 129, 213

F

filo inestensibile, 44
 – tensione, 172
 forza, 113
 – apparente, 115, 231
 momento, 232
 potenza, 235
 risultante, 232
 – attiva, 118
 – centrifuga, 237
 potenziale, 239
 retta di applicazione, 241
 – conservativa, 118, 184, 231
 – di Coriolis, 231
 momento, 234
 – di inerzia, 202
 corpo rigido, 203
 – di trascinamento
 momento, 232, 237
 – equivalenza, 175, 231
 – esterna, 131, 168
 – interna, 131, 180
 – perdita, 202
 – posizionale, 118
 – reazione, 119
 – regola del parallelogramma, 115
 forzante, 219
 Frenet-Serret
 – formule, 265
 – triedro, 264
 frequenza, 271
 – delle piccole oscillazioni, 218
 funzione
 – C^1 , 208
 – analitica, 215
 – lipschitziana, 267

G

Galileo
 – teorema, 67
 – trasformazioni, 71
 giroscopio, 176
 glifo oscillante, 49
 gradi di libertà, 40

H

- Huygens-Steiner, formula, 92
- per prodotti di inerzia, 94

I

- incastro, 43, 124
- inerzia
 - asse principale, 96
 - matrice, 93, 95
 - momento, 91
 - assi concorrenti, 93
 - assi coordinati, 91
 - assi paralleli, 92
 - principale, 96
 - momento polare, 95, 234
 - prodotto, 93
- integrale primo, 184
 - energia, 184
 - momento cinetico, 211
 - momento delle quantità di moto, 186
 - quantità di moto, 186
- invariante scalare, 25, 80, 83
- inviluppo convesso, 256

K

- König, teorema, 161, 165

L

- lagrangiana, 206
- lavoro
 - virtuale, 120
 - in atto di moto rigido, 122
- legge fondamentale della dinamica, 115
- leggi di conservazione, 184
- Ljapunov, stabilità, 214
- lunghezza d'arco, *vedi* ascissa curvilinea
- lunghezza di un vettore, 250

M

- manicotto, 43, 124, 125, 140
- manovella, 48
- massa, 85
 - matrice, 162
- matrice, 258
 - di inerzia, 93
 - di massa, 162
- molla, 119
 - potenza, 180
 - torsionale, 135, 237
- momento, 78
 - angolare, *vedi* momento delle quantità di moto
 - centrifugo, 242

- cinetico, 211
 - conservazione, 211
- delle quantità di moto, 163
 - conservazione, 186
- trasporto, 79, 166
- moto, 6
 - per inerzia, 175
 - piano, 6, 9
 - rigido, 10, 27
 - piano, 27
 - polare, 28
 - rotatorio, 28
 - rototraslatorio, 28
 - traslatorio, 27
 - traslatorio, 6, 9
 - uniforme, 8

N

- norma, *vedi* lunghezza di un vettore

O

- operazione invariante, 84
- origine, 3
- oscillazioni
 - anarmoniche, 220
 - armoniche, 176, 218, 270
 - attorno all'equilibrio, 218
- osservatore, 3
 - inerziale, 115

P

- pattinare, 226
- pattino, 43, 124
- periodo, 187, 220
 - delle piccole oscillazioni, 219
- permutazione ciclica, 252, 253
- piano, 254
 - tangente, 266
- Picard, teorema di esistenza e unicità, 208, 267
- Poisson, formule, 17
- polinomio caratteristico, 260
- Postulati della Cinematica Classica, 66
- potenza, 179
 - coppia, 180
 - forze apparenti, 235
 - forze conservative, 184
 - forze interne, 180
 - motore, 189, 239, 243
 - reazioni vincolari, 180
 - virtuale, 120
 - in atto di moto rigido, 122
- potenziale, 118, 147, 184
 - carico costante, 119

- forza centrifuga, 239
- molla, 119
- Principi della Meccanica, 113
- Principio
 - dei lavori virtuali, 136
 - di azione e reazione, 116
 - di d'Alembert, 201
- problemi diretti e inversi, 129
- prodotto
 - di inerzia, 93, 242
 - misto, 253
 - scalare, 250
 - tensoriale, 261
 - vettoriale, 251
 - doppio, 253
 - regola della mano destra, 252
- proiezione
 - su un piano, 255
 - su una retta, 255
- punto, 3
 - di arresto, 187, 216
 - materiale, 1
- Q**
- quantità di moto, 158
 - conservazione, 186
- R**
- raggio di curvatura, 263
- reazione vincolare, 35, 119
 - carrello, 123
 - cerniera, 123
 - incastro, 124
 - manicotto, 124
 - pattino, 124
 - punto vincolato, 122
 - puro rotolamento, 123
- regola della mano destra, 252
- Relazione simbolica della dinamica, 203
- retta, 254
 - di applicazione, 79
 - del risultante, 81
 - tangente, 263
- risonanza, 219, 270
- risultante, 78
 - forze apparenti, 232
- Rivals, teorema, 70
- robot S.C.A.R.A., 47
- rotazione, 260, 262
 - angolo, 260
 - asse, 260
 - permanente, 176
- rotolare senza strisciare, *vedi*
 - vincolo di puro rotolamento, 50

- S**
- scalare, 249
- simmetria
 - materiale, 86
 - rispetto a un piano, 86, 255, 256
- sistema di riferimento, 3
 - cartesiano, 4
 - solidale, 10, 166
- sistema materiale, 85
 - omogeneo, 85
- sistema olonomo, 35, 146, 206
 - energia cinetica, 162
- slittone, 49
- spazio
 - delle fasi, 214
 - euclideo, 3
 - vettoriale, 249
 - dimensione, 250
- spostamento, 3
 - virtuale, 37, 120
 - corpo rigido, 39
 - irreversibile, 37
 - punto vincolato, 37
 - reversibile, 37
- stabilità, 213
 - diagramma, 216
- stazionarietà del potenziale, teorema, 147
- superficie regolare, 265

- T**
- tensore, *vedi* trasformazione lineare
- teorema spettrale, 260
- terna destrorsa/sinistrorsa, 252
- torsione, 265
- traccia, 258
- trasformazione lineare, 258
 - antisimmetrica, 259, 262
 - determinante, 258
 - diagonalizzabile, 260
 - identità, 260
 - inversa, 259
 - ortogonale, 260, 262
 - simmetrica, 259
 - traccia, 258
 - trasposta, 259
- triedro intrinseco, 264

- V**
- velocità, 7
 - composizione, 67
 - del polo, 158
 - di trascinamento, 67
 - in atto di moto rigido, 19

- virtuale, 37, 120
 - corpo rigido, 39
 - irreversibile, 37
 - punto vincolato, 37
 - reversibile, 37
- velocità angolare
 - di corpi rigidi, 19
 - piani, 21
 - tridimensionali, 25
 - di sistemi di riferimento, 17, 67
- versore, 250
 - binormale, 264
 - normale a una curva, 263
 - normale a una superficie, 266
 - tangente, 263
- vettore assiale, 262
- vettori, 3, 249
 - angolo, 251, 252
 - componenti, 251
 - linearmente dipendenti, 250
 - linearmente indipendenti, 250
 - lunghezza, 251
 - scomposizione, 253
- vettori applicati, 78
 - concorrenti, 80
 - equilibrati, 80
 - equivalenza, 80, 175

- momento, 78
- paralleli, 83
 - centro, 85
- piani, 79, 83
- riduzione, 80
- vettori caratteristici, 78
- vincolo, 35
 - anolonomo, 35
 - appoggio, 141
 - bilatero, 37
 - congelamento, 37
 - di planarità, 36, 125
 - di rigidità, 36, 124
 - fisso, 37, 124, 180
 - ideale, 120, 136
 - labile, 44
 - mobile, 37, 124
 - mutuo rotolamento, 52
 - olonomo, 35
 - perfetto, 121, 137, 180
 - puro rotolamento, 50, 123
 - reale, 125
 - unilatero, 37, 124
- volano, 49

W

Weierstrass, teorema, 215, 266