Appendice A
Formule utili

A.1 Integrali di uso frequente

A.1.1 Integrali Gaussiani

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{A.1}$$

Per $n = 1, 2, \ldots$ si ha

$$I_{2n+1}(\alpha) = 0, \qquad I_{2n}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^{2n}\, e^{-\alpha x^2} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{A.2}$$

Per i primi valori di n si ottiene

$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}; \qquad I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}; \qquad I_4 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}. \tag{A.3}$$

Altro integrale gaussiano di uso frequente è

$$I(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{e}^{-\alpha x^2 + \beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, \mathrm{e}^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \tag{A.4}$$

che consente anche di calcolare

$$\begin{aligned} I(\alpha,\beta) &= \int_0^{+\infty} dx\, x \sin(\beta x)\, e^{-\alpha^2 x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x \frac{e^{\imath\beta x} - e^{-\imath\beta x}}{2\imath}\, e^{-\alpha^2 x^2} = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{\imath\beta x} + e^{-\imath\beta x}}{\imath} = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\beta} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[e^{-(\alpha x + \imath \frac{\beta}{2\alpha})^2} + e^{-(\alpha x - \imath \frac{\beta}{2\alpha})^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\beta} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}\, 2\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\beta}{4\alpha}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

L. Angelini, *Meccanica quantistica*, UNITEXT for Physics,
https://doi.org/10.1007/978-88-470-3966-7

A.1.2 Integrali con funzioni esponenziali

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} dx x^n e^{-x} &= \left[(-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n}\int_0^{+\infty} dx\, e^{-\alpha x}\right]_{\alpha=1} = \\ &= \left[(-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n}\frac{1}{\alpha}\right]_{\alpha=1} = \\ &= n! \end{aligned} \tag{A.6}$$

In maniera analoga si trova il risultato più generale

$$I_n(a,b) = \int_a^b dx x^n\, e^{-\beta x} = (-1)^n \frac{d^n}{d\beta^n} I_0(a,b). \tag{A.7}$$

Per $a = 0$ e $b = \infty$ si ottiene

$$I_0(0,\infty) = \frac{1}{\beta}; \quad I_1(0,\infty) = -\frac{d}{d\beta}\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta^2}; \quad I_2(0,\infty) = \frac{d^2}{d\beta^2}\frac{1}{\beta} = \frac{2}{\beta^3}. \tag{A.8}$$

A.2 Equazione di continuità

L'equazione di continuità in Meccanica Quantistica è data da

$$\frac{\partial P(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{A.9}$$

dove la densità di probabilità è data da

$$P(\mathbf{r},t) = |\psi(\mathbf{r},t)|^2 = \psi^*(\mathbf{r},t)\ \psi(\mathbf{r},t) \tag{A.10}$$

e la densità di corrente di probabilità è definita come

$$\begin{aligned}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= \frac{\hbar}{2\imath m}\left[\psi^*(\mathbf{r},t)\nabla\psi(\mathbf{r},t) - \psi(\mathbf{r},t)\nabla\psi^*(\mathbf{r},t)\right] = \\ &= \frac{\hbar}{\imath m}\Im\left(\psi^*(\mathbf{r},t)\nabla\psi(\mathbf{r},t)\right).\end{aligned} \tag{A.11}$$

A.3 Oscillatore armonico

A.3.1 Trattazione operatoriale

La soluzione per l'equazione agli autovalori per l'Hamiltoniano dell'oscillatore armonico è:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad ; \quad \hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle. \tag{A.12}$$

In termini degli operatori di creazione e distruzione

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p \qquad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p \tag{A.13}$$

abbiamo:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger) \qquad p = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a - a^\dagger). \tag{A.14}$$

Per a e a^+ valgono le relazioni

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle. \tag{A.15}$$

A.3.2 Trattazione nella rappresentazione X

Le autofunzioni sono date da

$$\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x \tag{A.16}$$

dove H_n é il polinomio di Hermite n-simo definito da

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}. \tag{A.17}$$

I polinomi di Hermite sono polinomi ortogonali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, H_n(\xi) H_m(\xi) = \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!\, \delta_{n,m} \tag{A.18}$$

e per essi vale la relazione di ricorrenza

$$2\xi\, H_n(\xi) = H_{n+1}(\xi) + 2n H_{n-1}(\xi) \tag{A.19}$$

Primi polinomi di Hermite

$$\begin{gathered} H_0(x) = 1;\; H_1(x) = 2x;\; H_2(x) = 4x^2 - 2;\; H_3(x) = 8x^3 - 12x \\ H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12;\; H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x. \end{gathered} \tag{A.20}$$

A.4 Cambiamento di coordinate

Il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate sferiche avviene mediante la trasformazione:

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{A.21}$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{A.22}$$

$$z = r \cos\theta. \tag{A.23}$$

A.5 Momento Angolare

A.5.1 Trattazione operatoriale

Gli operatori J^2, J_x, J_y, J_z soddisfano le seguenti relazioni di commutazione:

$$[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$$

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \qquad [J_y, J_z] = i\hbar J_x \qquad [J_z, J_x] = i\hbar J_y.$$

Indichiamo con $|j,m\rangle$ il generico autoket comune a J^2 e J_z:

$$J^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle \qquad J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle.$$

Gli operatori

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y \tag{A.24}$$

soddisfano le seguenti regole di commutazione con gli operatori J^2 e J_z:

$$[J^2, J_\pm] = 0 \qquad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm. \tag{A.25}$$

Gli operatori $J_\pm$ agiscono sugli autoket comuni ad J^2 e J_z innalzando o abbassando di una unità il numero quantico azimutale:

$$J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j,m\pm 1\rangle. \tag{A.26}$$

A.5.2 Armoniche Sferiche

Definizione

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}\,P_\ell^m(\cos\theta)\,e^{\imath m\phi} \tag{A.27}$$

dove P_ℓ^m sono le funzioni associate di Legendre

$$P_\ell^m(z) = (1-z^2)^{\frac{|m|}{2}}\,\frac{d^{|m|}}{dz^{|m|}}\,P_\ell(z) \tag{A.28}$$

e $P_\ell(z)$ sono i polinomi di Legendre

$$P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\,\frac{d^\ell}{dz^\ell}\,(1-z^2)^\ell. \tag{A.29}$$

Relazione di ortonormalizzazione

$$\int d\Omega\, Y^*_{\ell',m'}(\theta,\phi)\,Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \delta_{\ell,\ell'}\,\delta_{m,m'}. \tag{A.30}$$

Relazione di ricorrenza

$$\cos\theta\, Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = a_{\ell,m} Y_{\ell+1,m}(\theta,\phi) + a_{\ell-1,m} Y_{\ell-1,m}(\theta,\phi) \tag{A.31}$$

dove

$$a_{\ell,m} = \sqrt{\frac{(\ell+1+m)(\ell+1-m)}{(2\ell+1)(2\ell+3)}}. \tag{A.32}$$

Teorema di Somma

Se (Θ,Φ) e (θ',ϕ') sono due direzioni dello spazio e θ è l'angolo compreso tra di esse, un polinomio di Legendre si può esprimere in termini delle armoniche sferiche:

$$P_\ell(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell,m}(\Theta,\Phi)^* Y_{\ell,m}(\theta',\phi'). \tag{A.33}$$

Le prime Armoniche Sferiche

$$Y_{0,0}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{A.34}$$

$$Y_{1,0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\ ,\ Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm\imath\phi} \tag{A.35}$$

$$Y_{2,0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1)\ ,\ Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm\imath\phi}\ ,$$
$$Y_{2,\pm2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm2\imath\phi} \tag{A.36}$$

$$Y_{3,0}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{7}{16\pi}}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)\ ,\ Y_{3,\pm1}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\sin\theta(5\cos^2\theta-1)e^{\pm\imath\phi}$$
$$Y_{3,\pm2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\sin^2\theta\cos\theta e^{2\pm\imath\phi}\ ,\ Y_{3,\pm3}(\theta,\varphi)=\mp\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\sin^3\theta e^{\pm3\imath\phi}. \tag{A.37}$$

A.6 Equazione di Schrödinger in coordinate sferiche

A.6.1 L'equazione radiale

Per un potenziale centrale $V(r)$ l'equazione di Schrödinger è separabile in coordinate sferiche. L'autofunzione comune agli operatori $\mathscr{H}$, L^2 e L_z con autovalori rispettivamente E, $\ell(\ell+1)\hbar^2$ e $m\hbar$, si può scrivere nella forma

$$\psi_{E,\ell,m}(r,\theta,\phi) = R_{E,\ell}(r)\, Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \frac{U_{E,\ell}(r)}{r} Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{A.38}$$

dove m è la massa ridotta del sistema e $U_{E,\ell}(r)$ è soluzione dell'equazione radiale:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2U_{E,\ell}}{dr^2}+\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2mr^2}U_{E,\ell}+V(r)U_{E,\ell}=E\,U_{E,\ell} \tag{A.39}$$

$U_{E,\ell}(r)$ deve soddisfare la condizione

$$\lim_{r\to 0}U_{E,\ell}(r)=0. \tag{A.40}$$

A.7 Funzioni di Bessel sferiche

Le funzioni di Bessel sferiche sono soluzioni dell'equazione di Bessel sferica

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\,\phi(z)+2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\phi(z)+\left[z^2-\ell(\ell+1)\right]\phi(z)=0. \tag{A.41}$$

A.7.1 Funzioni di Bessel sferiche di I e II specie

Due integrali linearmente indipendenti sono dati dalle funzioni di Bessel sferiche di prima e seconda specie j_ℓ e $y_\ell=(-1)^{\ell+1}j_{-\ell-1}$. Le prime di esse per valori interi di ℓ sono

$$j_0(z)=\frac{\sin z}{z} \tag{A.42}$$

$$j_1(z)=\frac{\sin z}{z^2}-\frac{\cos z}{z} \tag{A.43}$$

$$j_2(z)=\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\frac{\sin z}{z}-\frac{3\cos z}{z^2} \tag{A.44}$$

$$j_3(z)=\left(\frac{15}{z^3}-\frac{6}{z}\right)\frac{\sin z}{z}-\left(\frac{15}{z^2}-1\right)\frac{\cos z}{z} \tag{A.45}$$

e

$$y_0(z)=-\frac{\cos z}{z} \tag{A.46}$$

$$y_1(z)=-\frac{\cos z}{z^2}-\frac{\sin z}{z} \tag{A.47}$$

$$y_2(z)=\left(-\frac{3}{z^2}+1\right)\frac{\cos z}{z}-\frac{3\sin z}{z^2} \tag{A.48}$$

$$y_3(z)=\left(-\frac{15}{z^3}+\frac{6}{z}\right)\frac{\cos z}{z}-\left(\frac{15}{z^2}-1\right)\frac{\sin z}{z}. \tag{A.49}$$

Il loro andamento asintotico è dato da

$$j_\ell(z)\underset{z\to\infty}{\sim}\frac{1}{z}\cos\left(z-\frac{\ell+1}{2}\,\pi\right) \tag{A.50}$$

e

$$y_\ell(z)\underset{z\to\infty}{\sim}\frac{1}{z}\sin\left(z-\frac{\ell+1}{2}\,\pi\right). \tag{A.51}$$

A.7.2 Funzioni di Hankel sferiche

Altre possibile soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione di Bessel sferica sono le funzioni di Hankel sferiche di I e II specie definite da

$$h_\ell^{(1)}(z) = j_\ell(z) + \imath y_\ell(z) \tag{A.52}$$

$$h_\ell^{(2)}(z) = j_\ell(z) - \imath y_\ell(z). \tag{A.53}$$

L'andamento asintotico delle funzioni di Hankel è dato da

$$h_\ell^{(1)}(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z}\, \mathrm{e}^{\imath\left(z-\frac{\ell+1}{2}\pi\right)} \tag{A.54}$$

$$h_\ell^{(2)}(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z}\, \mathrm{e}^{-\imath\left(z-\frac{\ell+1}{2}\pi\right)}. \tag{A.55}$$

Quando l'argomento è immaginario puro le funzioni di Hankel hanno un comportamento asintotico di tipo esponenziale:

$$h_\ell^{(1)}(\imath z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{\imath z}\, \mathrm{e}^{\left(-z-\imath\frac{\ell+1}{2}\pi\right)} \tag{A.56}$$

e

$$h_\ell^{(2)}(\imath z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{\imath z}\, \mathrm{e}^{\left(z+\imath\frac{\ell+1}{2}\pi\right)}. \tag{A.57}$$

A.8 Le prime autofunzioni dell'atomo d'idrogeno

Detto $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ il raggio di Bohr, si ha

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, a_0^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{r}{a_0}} \tag{A.58}$$

$$\psi_{2,0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\, a_0^{-\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \tag{A.59}$$

$$\psi_{2,1,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\, a_0^{-\frac{3}{2}}\, \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \cos\theta \tag{A.60}$$

$$\psi_{2,1,\pm1} = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\, a_0^{-\frac{3}{2}}\, \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin\theta\, e^{\pm\imath\varphi}. \tag{A.61}$$

A.9 Spin

A.9.1 Matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.62}$$

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{A.63}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \tag{A.64}$$

$$[\sigma_i\sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{A.65}$$

A.9.2 Relazioni utili

$$(\mathbf{A}\cdot\sigma)\,(\mathbf{B}\cdot\sigma) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbb{I} + i\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\sigma \tag{A.66}$$

dove $\mathbb{I}$ è la matrice identità. In particolare se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

$$(\mathbf{A}\cdot\sigma)^2 = A^2\mathbb{I} \tag{A.67}$$

$$e^{i\theta\cdot\sigma} = \mathbb{I}\cos\theta + i(\mathbf{n}\cdot\sigma)\sin\theta \quad \text{dove } \mathbf{n} = \frac{\theta}{\theta}. \tag{A.68}$$

A.10 Perturbazioni indipendenti dal tempo

Sia dato l'Hamiltoniano

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_1$$

dove il problema agli autovalori di $\mathscr{H}_0$ sia stato risolto:

$$\mathscr{H}_0|n^0\rangle = E_n^0|n^0\rangle.$$

Se l'autovalore E_n^0 è non degenere e se gli elementi di matrice $\langle m^0|\mathscr{H}_1|n^0\rangle$ sono piccoli rispetto ai livelli E_n^0, abbiamo i seguenti sviluppi per gli autovalori E_n e gli autostati $|n\rangle$ di $\mathscr{H}$:

$$E_n = E_n^0 + E_n^1 + E_n^2 + \dots$$

$$|n\rangle = |n^0\rangle + |n^1\rangle + |n^2\rangle + \dots$$

dove

$$E_n^1 = \langle n^0|\mathscr{H}_1|n^0\rangle \tag{A.69}$$

$$E_n^2 = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle m^0|\mathscr{H}_1|n^0\rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} \tag{A.70}$$

$$|n^1\rangle = \sum_{m\neq n} \frac{\langle m^0|\mathscr{H}_1|n^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0}\,|m^0\rangle. \tag{A.71}$$

Nel caso che l'autovalore E_n^0 sia degenere, le correzioni al prim'ordine agli autovalori sono date dagli autovalori della matrice che corrisponde ad $\mathscr{H}_1$ nell'autospazio di E_n^0.

$$\det\left[(\mathscr{H}_1)_{m,j} - E_n^1\,\delta_{m,j}\right] = 0. \tag{A.72}$$

A.11 Perturbazioni istantanee

Per perturbazione istantanea si intende il cambiamento repentino di Hamiltoniano

$$\mathscr{H}_0 \quad\to\quad \mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_1$$

dove $\mathscr{H}_0$ e $\mathscr{H}_1$ non dipendono dal tempo. Una perturbazione istantanea non modifica il vettore di stato. Supponendo che inizialmente il sistema sia nello stato $|n^0\rangle$, autoket di $\mathscr{H}_0$, la probabilità della misura E_k, autovalore del nuovo Hamiltoniano, e quindi la probabilità di transizione $|n^0\rangle \to |k\rangle$, è data da

$$P_{n\to k} = |\langle k|n^0\rangle|^2. \tag{A.73}$$

Se è possibile applicare la teoria perturbativa per autovalori non degeneri, la probabilità di transizione a stati $k \neq n$ è:

$$P_{n\to k} = \left|\frac{\langle k^0|\mathscr{H}_1|n^0\rangle}{E_k^0 - E_n^0}\right|^2. \tag{A.74}$$

A.12 Perturbazioni dipendenti dal tempo

Sia dato l'Hamiltoniano

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_1(t)$$

dove si conosce la soluzione del problema agli autovalori di $\mathscr{H}_0$

$$\mathscr{H}_0|n^0\rangle = E_n^0|n^0\rangle,$$

mentre $\mathscr{H}_1$ dipende dal tempo e i suoi elementi di matrice nella rappresentazione di $\mathscr{H}_0$ sono piccoli rispetto ai livelli E_n^0. Scriviamo lo stato del sistema al tempo t nella forma

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n d_n(t)\, e^{-i\frac{E_n^0}{\hbar}t}\,|n^0\rangle\,. \tag{A.75}$$

Detta $P_{i\to f}$ la probabilità con la quale troveremo il sistema nello stato $|f^0\rangle$, se al tempo $t = 0$ esso si trova nello stato $|i^{(0)}\rangle$, al I ordine perturbativo si ha

$$P_{i\to f}(t) = |d_f(t)|^2 = \left|-\frac{\imath}{\hbar}\int_0^t d\tau\,\langle f^0|\mathscr{H}_1(\tau)|i^0\rangle\, e^{\imath\omega_{fi}\tau}\right|^2 \tag{A.76}$$

dove $\omega_{fi} = \frac{E_f^0 - E_i^0}{\hbar}$ e $f \neq i$.

A.13 Approssimazione di Born

Detti $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$ i vettori d'onda rispettivamente della particella incidente e di quella diffusa, l'ampiezza di diffusione in approssimazione di Born per il potenziale $V(\mathbf{r})$ è data da

$$f_B(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int d\mathbf{r}\, e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}\, V(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{A.77}$$

dove μ è la massa ridotta del sistema.

Nel caso di potenziale centrale l'espressione si semplifica:

$$f_B(q) = -\frac{2\mu}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr\,\sin(qr)\,V(r)\,r \tag{A.78}$$

dove, trattandosi di scattering elastico, $q = |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| = 2k\sin\frac{\theta}{2}$, con θ angolo di diffusione.

A.14 Metodo WKB

Considerato il sistema unidimensionale di una particella di massa m ed energia E soggetta ad un potenziale $V(x)$, definiamo $p(x)$ l'impulso classico

$$p(x) = \sqrt{E - V(x)}.$$

Se l'energia E è inferiore al potenziale $V(x)$ per ogni punto esterno ad un intervallo $[a,b]$, l'autovalore E appartiene allo spettro discreto. Nell'approssimazione WKB, gli autovalori dell'energia ad esso appartenenti sono dati dalla relazione

$$\frac{1}{\hbar}\int_b^a dx\, p(x) = (n+\frac{1}{2})\pi \qquad \text{con } n = 0,1,2,\ldots \tag{A.79}$$

Equivalentemente, se si considera un'intera oscillazione classica tra i due punti a e b di inversione del moto, questa relazione può essere riscritta nella forma della quantizzazione di Bohr-Sommerfeld

$$\oint dx\, p(x) = \int_D dx\, dp = 2\pi\hbar(n+\frac{1}{2}) \qquad \text{con } n = 0,1,2,\ldots \tag{A.80}$$

dove, nella prima espressione, l'integrale è esteso alla traiettoria classica completa e, nella seconda, al dominio D da essa delimitato.

Nel caso in cui l'energia E è maggiore del potenziale $V(x)$ per ogni punto esterno all'intervallo $[a,b]$, l'autovalore E appartiene allo spettro continuo e siamo in presenza di una barriera. La probabilità di attraversamento di una barriera in approssimazione WKB è data da

$$T = e^{-\frac{2}{\hbar}\int_a^b dy\,|p(y)|}. \tag{A.81}$$

Riferimenti bibliografici

[1] V. I. Kogan and V. M. Galitskiy. *Problems in Quantum Mechanics*. Prentice-Hall London, 1963.
[2] I. I. Gol'dman and V. D. Krivchenkov. *Problems in Quantum Mechanics*. Pergamon Press London, 1961.
[3] I. I. Gol'dman, V. D. Krivchenkov, V. I. Kogan, and V. M. Galitskiy. *Selected Problems in Quantum Mechanics*. Infosearch London, 1960.
[4] D. Ter Haar. *Selected problems in Quantum Mechanics*. Infosearch Ltd. London, 1964.
[5] G. Passatore. *Problemi di meccanica quantistica elementare*. Franco Angeli Milano, ii edition, 1981.
[6] Yung-Kuo Lim Ed. *Problems and Solutions on Quantum Mechanics*. World Scientific, 1999.
[7] E. Merzbacher. *Quantum Mechanics*. Wiley New York, 1970.
[8] L. Landau and E. Lifchitz. *Phys. Theor. vol. III (Mecanique Quantique)*. Mir Moscou, 1966.
[9] A. Messiah. *Mecanique Quantique*, volume I e II. Dunod Paris, 1962.
[10] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics*. Plenum Press New York, ii edition, 1994.
[11] G. Nardulli. *Meccanica Quantistica*, volume I e II. Franco Angeli Milano, 2001.
[12] S. Flügge. *Practical Quantum Mechanics*, volume I e II. Springer Verlag Berlin, 1971.
[13] K. Gottfried and T-M Yan. *Quantum Mechanics: Fundamentals*. Springer Verlag Berlin, ii edition, 2004.
[14] J.J. Sakurai and J. Napolitano. *Meccanica quantistica moderna*. Zanichelli Bologna, ii edition, 2014.
[15] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover New York, 1972.

L. Angelini, *Meccanica quantistica*, UNITEXT for Physics,
https://doi.org/10.1007/978-88-470-3966-7