

## Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben

### 8 Ausgleichsvorgänge in linearen Netzen

#### 8.1

Zu 1.  $u_L + (R_L + R_p) \cdot i_L = 0$

$$L \cdot \frac{di_L}{dt} + (R_L + R_p) \cdot i_L = 0 \quad \text{mit } u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$i_{Le} = 0$$

$$i_{Lf} = K \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = \frac{L}{R_L + R_p}$$

für  $t = 0$

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_{Le}(0_+) + i_{Lf}(0_+)$$

$$\frac{R_p \cdot U_q}{R_i(R_L + R_p) + R_L R_p} = 0 + K$$

weil für  $t < 0$ :

$$\frac{i_L}{i} = \frac{R_p}{R_L + R_p}$$

$$\text{mit } i = \frac{U_q}{R_i + \frac{R_L R_p}{R_L + R_p}}$$

$$i_L = \frac{U_q}{R_i + \frac{R_L R_p}{R_L + R_p}} \cdot \frac{R_p}{R_L + R_p}$$

$$i_L = \frac{R_p \cdot U_q}{R_i(R_L + R_p) + R_L R_p}$$

$$i_{Lf} = \frac{R_p \cdot U_q}{R_i(R_L + R_p) + R_L R_p} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$i_{Lf} = \frac{U_q}{R_i \frac{R_L + R_p}{R_p} + R_L} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$i_L = i_{Lf} = \frac{U_q}{R_i \cdot \left(1 + \frac{R_L}{R_p}\right) + R_L} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} = \frac{L \cdot U_q}{R_i \frac{R_L + R_p}{R_p} + R_L} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_L = -\frac{L \cdot U_q}{R_i \frac{R_L + R_p}{R_p} + R_L} \cdot \frac{R_L + R_p}{L} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_L = -\frac{U_q}{\frac{R_i}{R_p} + \frac{R_L}{R_L + R_p}} \cdot e^{-t/\tau}$$

Zu2.  $R_i = 0$ :

$$i_L = \frac{U_q}{R_L} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_L = -U_q \cdot \frac{R_L + R_p}{R_L} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_L = -U_q \cdot \left(1 + \frac{R_p}{R_L}\right) \cdot e^{-t/\tau}$$

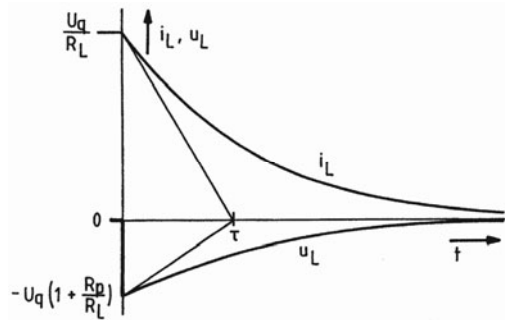


Bild A-140 Übungsaufgabe 8.1

## 8.2

Zu 1.  $U = u_L + (R_L + R) \cdot i$

$$U = L \cdot \frac{di}{dt} + (R_L + R) \cdot i \quad \text{mit } u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$i_e = \frac{U}{R_L + R}$$

$$0 = L \cdot \frac{di_f}{dt} + (R_L + R) \cdot i_f$$

$$i_f = K \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = \frac{L}{R_L + R}$$

für  $t = 0$ :

$$i(0_-) = i(0_+) = i_e(0_+) + i_f(0_+)$$

$$\frac{U}{R_L} = \frac{U}{R_L + R} + K \quad \text{d. h.} \quad K = \frac{U}{R_L} - \frac{U}{R_L + R}$$

$$i_f = U \cdot \left( \frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_L + R} \right) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$i = i_e + i_f = \frac{U}{R_L + R} + U \cdot \left( \frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_L + R} \right) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot U \cdot \left( \frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_L + R} \right) \cdot e^{-t/\tau} \cdot \left( -\frac{1}{\tau} \right)$$

$$u_L = -L \cdot U \cdot \left( \frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_L + R} \right) \cdot e^{-t/\tau} \cdot \frac{R_L + R}{L}$$

$$u_L = -U \cdot \left( \frac{R_L + R}{R_L} - 1 \right) \cdot e^{-t/\tau} = -U \cdot \frac{R}{R_L} \cdot e^{-t/\tau}$$

Zu 2.  $U = u_L + R_L \cdot i$

$$U = L \cdot \frac{di}{dt} + R_L \cdot i \quad \text{mit } u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$i_e = \frac{U}{R_L}$$

$$0 = L \cdot \frac{di_f}{dt} + R_L \cdot i_f$$

$$i_f = K \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = \frac{L}{R_L}$$

für  $t = 0$ :

$$i(0_-) = i(0_+) = i_e(0_+) + i_f(0_+)$$

$$\frac{U}{R_L + R} = \frac{U}{R_L} + K \quad \text{d. h.} \quad K = \frac{U}{R_L + R} - \frac{U}{R_L}$$

$$i_f = U \cdot \left( \frac{1}{R_L + R} - \frac{1}{R_L} \right) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$i = i_e + i_f = \frac{U}{R_L} + U \cdot \left( \frac{1}{R_L + R} - \frac{1}{R_L} \right) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot U \cdot \left( \frac{1}{R_L + R} - \frac{1}{R_L} \right) \cdot e^{-t/\tau} \cdot \left( -\frac{1}{\tau} \right)$$

$$u_L = -L \cdot U \cdot \left( \frac{1}{R_L + R} - \frac{1}{R_L} \right) \cdot e^{-t/\tau} \cdot \frac{R_L}{L}$$

$$u_L = -U \cdot \left( \frac{R_L}{R_L + R} - 1 \right) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_L = -U \cdot \frac{R_L - R_L - R}{R_L + R} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_L = U \cdot \frac{R}{R_L + R} \cdot e^{-t/\tau}$$

Zu 3. 1. Öffnen des Schalters:

$$i = \frac{6V}{1,5k\Omega} + 6V \cdot \left( \frac{1}{500\Omega} - \frac{1}{1,5k\Omega} \right) \cdot e^{-t/\tau} = 4mA + 8mA \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_L = -6V \cdot \frac{1k\Omega}{500\Omega} \cdot e^{-t/\tau} = -12V \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = \frac{1,2H}{1,5k\Omega} = 0,8ms$$

2. Schließen des Schalters:

$$i = \frac{6V}{500\Omega} + 6V \cdot \left( \frac{1}{1,5k\Omega} - \frac{1}{500\Omega} \right) \cdot e^{-t/\tau} = 12mA - 8mA \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_L = 6V \cdot \frac{1k\Omega}{1,5k\Omega} = 4V \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = \frac{1,2H}{500\Omega} = 2,4ms$$

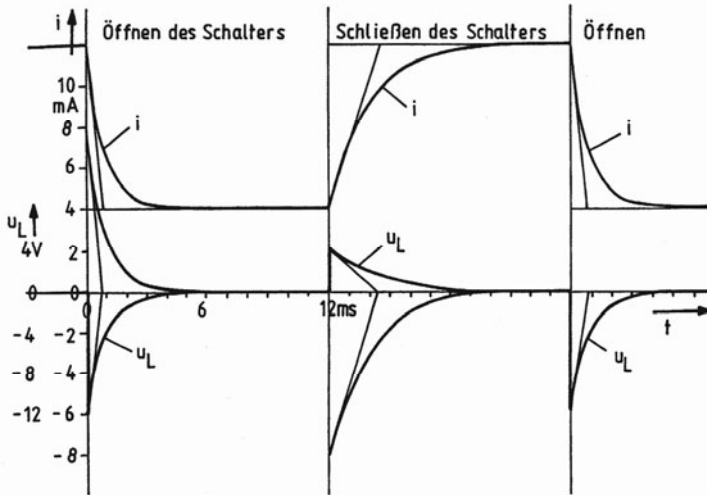


Bild A-141 Übungsaufgabe 8.2

### 8.3

Zu 1.  $U = (R_1 + R_2) \cdot i + u_C$

$$U = (R_1 + R_2) \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C \quad \text{mit } i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$u_{Ce} = U$$

$$0 = (R_1 + R_2) \cdot C \cdot \frac{du_{Cf}}{dt} + u_{Cf}$$

$$u_{Cf} = K \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = (R_1 + R_2) \cdot C$$

für  $t = 0$ :

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_{Ce}(0_+) + u_{Cf}(0_+)$$

$$0 = U + K \quad \text{d. h. } K = -U$$

$$u_{Cf} = -U \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_C = u_{Ce} + u_{Cf} = U - U \cdot e^{-t/\tau} = U \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

Zu 2.  $u_2 = R_2 \cdot i + u_C$

$$\text{mit } i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = U \cdot C \cdot (-e^{-t/\tau}) \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

$$i = \frac{U \cdot C}{(R_1 + R_2) \cdot C} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U \cdot e^{-t/\tau} + U \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

$$u_2 = U \cdot \left[ 1 + \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - 1 \right) \cdot e^{-t/\tau} \right]$$

$$u_2 = U \cdot \left[ 1 + \frac{R_2 - R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \cdot e^{-t/\tau} \right]$$

$$u_2 = U \cdot \left[ 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot e^{-t/\tau} \right]$$

$t = 0$ :

$$u_2 = U \cdot \left[ 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right]$$

$$u_2 = U \cdot \frac{R_1 + R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

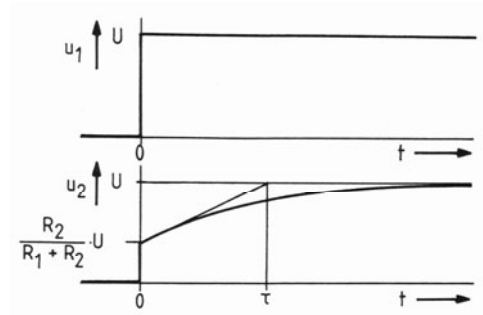


Bild A-142 Übungsaufgabe 8.3

#### 8.4

Zu 1.  $u_R + u_C = u$

$$R \cdot i + u_C = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\text{mit } i = i_R + i_C = \frac{u_C}{R_C} + C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$R \cdot \left( \frac{u_C}{R_C} + C \cdot \frac{du_C}{dt} \right) + u_C = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$RC \cdot \frac{du_C}{dt} + \left( \frac{R}{R_C} + 1 \right) \cdot u_C = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Differentialgleichung für den eingeschwungenen Vorgang:

$$RC \cdot \frac{du_{Ce}}{dt} + \left( \frac{R}{R_C} + 1 \right) \cdot u_{Ce} = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

algebraische Gleichung:

$$RC \cdot j\omega \cdot \underline{u}_{Ce} + \left( \frac{R}{R_C} + 1 \right) \cdot \underline{u}_{Ce} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

Lösung der algebraischen Gleichung:

$$\underline{u}_{Ce} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{\left( \frac{R}{R_C} + 1 \right) + j\omega RC} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u - \varphi)}}{\sqrt{\left( \frac{R}{R_C} + 1 \right)^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{\hat{u}}{V_u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u - \varphi)}$$

und in den Zeitbereich rücktransformiert:

$$u_{Ce} = \frac{\hat{u}}{V_u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) = \hat{u}_{Ce} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{ue})$$

$$\text{mit } V_u = \sqrt{\left( \frac{R}{R_C} + 1 \right)^2 + (\omega RC)^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega RC}{\frac{R}{R_C} + 1}$$

Die eingeschwungene Kondensatorsspannung hat also die Amplitude  $\hat{u}_{Ce}$  und den Anfangsphasenwinkel  $\varphi_{ue}$ :

$$\hat{u}_{Ce} = \frac{\hat{u}}{V_u} \quad \text{und} \quad \varphi_{ue} = \varphi_u - \varphi = \varphi_u - \arctan \frac{\omega RC}{\frac{R}{R_C} + 1}$$

Differentialgleichung für den flüchtigen Vorgang:

$$RC \cdot \frac{du_{Cf}}{dt} + \left( \frac{R}{R_C} + 1 \right) \cdot u_{Cf} = 0$$

$$u_{Cf} = K \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{RC}{\frac{R}{R_C} + 1}$$

Konstantenbestimmung:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_{Ce}(0_+) + u_{Cf}(0_+)$$

$$0 = \frac{\hat{u}}{V_u} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi) + K, \quad \text{d. h.} \quad K = -\frac{\hat{u}}{V_u} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi)$$

$$u_{Cf} = -\frac{\hat{u}}{V_u} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi) \cdot e^{-t/\tau} = -\frac{\hat{u}}{V_u} \cdot \sin \varphi_{ue} \cdot e^{-t/\tau}$$

Überlagerung:

$$u_C = u_{Ce} + u_{Cf} = \frac{\hat{u}}{V_u} \cdot \left[ \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) - \sin(\varphi_u - \varphi) \cdot e^{-t/\tau} \right]$$

$$u_C = \frac{\hat{u} \cdot \left[ \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) - \sin(\varphi_u - \varphi) \cdot e^{-t/\tau} \right]}{\sqrt{\left( \frac{R}{R_C} + 1 \right)^2 + (\omega RC)^2}}$$

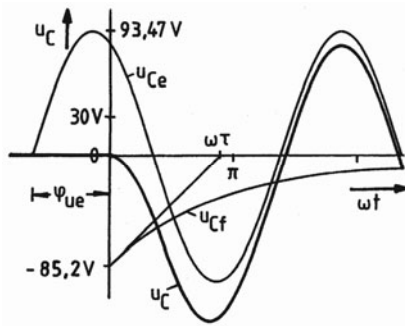
$$\text{Zu 2.} \quad \hat{u}_{Ce} = \frac{\hat{u}}{V_u} = \frac{\sqrt{2} \cdot 220\text{V}}{\sqrt{\left(\frac{1\text{k}\Omega}{10\text{k}\Omega} + 1\right)^2 + \left(2\pi \cdot 500\text{s}^{-1} \cdot 1\text{k}\Omega \cdot 1\mu\text{F}\right)^2}} = 93,47\text{V}$$

$$\varphi_{ue} = \varphi_u - \varphi = 185^\circ - \arctan \frac{2\pi \cdot 500\text{s}^{-1} \cdot 1\text{k}\Omega \cdot 1\mu\text{F}}{\frac{1\text{k}\Omega}{10\text{k}\Omega} + 1}$$

$$\varphi_{ue} = 185^\circ - 70,7^\circ = 114,3^\circ \hat{=} (3,23 - 1,23)\text{rad} = 2,0\text{rad}$$

$$u_{Cf} = -\frac{\hat{u}}{V_u} \cdot \sin \varphi_{ue} \cdot e^{-\omega t / \omega\tau} = -93,47\text{V} \cdot \sin 114,3^\circ \cdot e^{-\omega t / \omega\tau}$$

$$u_{Cf} = -85,2\text{V} \cdot e^{-\frac{\omega t}{2,8\text{rad}}} \quad \text{mit} \quad \omega\tau = 2\pi \cdot 500\text{s}^{-1} \cdot \frac{1\text{k}\Omega \cdot 1\mu\text{F}}{1,1} = 2,86\text{rad}$$



**Bild A-143**  
Übungsaufgabe 8.4

## 8.5

Zu 1. Differentialgleichungen ab  $t = 0$

für die Spannung  $u_C$ :

$$u_R + u_L + u_C = 0$$

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + u_C = 0$$

$$\text{mit } i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$\text{und } \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_C = 0$$

$$u_{Ce} = 0$$

für den Strom  $i$ :

$$u_R + u_L + u_C = 0$$

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + u_C = 0$$

$$\text{mit } i = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$$

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = 0$$

$$R \cdot \frac{di}{dt} + L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i = 0$$

$$i_e = 0$$

Zu 2.

Die Differentialgleichungen sind identisch mit den Differentialgleichungen der Entladung eines Kondensators mittels Spule im Abschnitt 8.2.4, Gl. (8.34) und (8.35). Deshalb kann die weitere Rechnung dort eingesehen und deren Ergebnisse übernommen werden:

für  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ :

$$u_C = u_{Cf} = K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad (\text{siehe Gl. (8.41)})$$

$$i = i_f = C \cdot (K_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 t}) \quad (\text{siehe Gl. (8.42)})$$

$$\text{mit } \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \kappa = -\delta \pm j\omega$$

für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ :

$$u_C = u_{Cf} = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda t} \quad (\text{siehe Gl. (8.43)})$$

$$i = i_f = C \cdot (K_2 + \lambda \cdot K_1 + \lambda \cdot K_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda t} \quad (\text{siehe Gl. (8.44)})$$

$$\text{mit } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{R}{2L} = -\delta = -\omega_0$$

Konstantenbestimmung mit den Anfangswerten:

für  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ :

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_{Ce}(0_+) + u_{Cf}(0_+) \quad i(0_-) = i(0_+) = i_e(0_+) + i_f(0_+)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_q}{R + R_i} \cdot R &= 0 + K_1 + K_2 & -\frac{U_q}{R + R_i} &= 0 + C \cdot (K_1 \cdot \lambda_1 + K_2 \cdot \lambda_2) \\ -\left( \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \lambda_2 &= K_1 \cdot \lambda_2 + K_2 \cdot \lambda_2 \right) & \left. \begin{aligned} \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \lambda_1 &= K_1 \cdot \lambda_1 + K_2 \cdot \lambda_1 \\ -\left( -\frac{U_q}{(R + R_i)C} &= K_1 \cdot \lambda_1 + K_2 \cdot \lambda_2 \right) \end{aligned} \right\} \\ \frac{U_q}{(R + R_i)C} &= K_1 \cdot \lambda_1 + K_2 \cdot \lambda_2 & K_2 &= \frac{U_q}{(R + R_i)C} \cdot \frac{1 + \lambda_1 RC}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ K_1 &= -\frac{U_q}{(R + R_i)C} \cdot \frac{1 + \lambda_2 RC}{\lambda_1 - \lambda_2} & & \end{aligned}$$

für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ :

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_{Ce}(0_+) + u_{Cf}(0_+) \quad i(0_-) = i(0_+) = i_e(0_+) + i_f(0_+)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_q}{R + R_i} \cdot R &= 0 + K_1 + 0 & -\frac{U_q}{R + R_i} &= 0 + C \cdot (K_2 + \lambda \cdot K_1) \\ K_1 &= \frac{U_q}{R + R_i} \cdot R & K_2 &= -\frac{U_q}{(R + R_i)C} - \lambda \cdot K_1 \\ & & K_2 &= -\frac{U_q}{(R + R_i)C} - \frac{\lambda \cdot U_q \cdot R}{R + R_i} \\ & & K_2 &= -\frac{U_q}{(R + R_i)C} \cdot (1 + \lambda RC) \end{aligned}$$



Einsetzen der Konstanten in die Lösungen:

für  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  (aperiodischer und periodischer Fall):

$$u_C = -\frac{U_q}{(R + R_i)C} \cdot \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ (1 + \lambda_2 RC) \cdot e^{\lambda_1 t} - (1 + \lambda_1 RC) \cdot e^{\lambda_2 t} \right]$$

$$i = -\frac{U_q}{(R + R_i)} \cdot \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left[ (1 + \lambda_2 RC) \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t} - (1 + \lambda_1 RC) \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \right]$$

aperiodischer Fall:

$$\text{mit} \quad \lambda_1 = -\delta + \kappa \quad \lambda_2 = -\delta - \kappa$$

$$\text{und} \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2\kappa \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta^2 - \kappa^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$u_C = -\frac{U_q}{(R + R_i)C \cdot 2\kappa} \cdot \left[ [1 + (-\delta - \kappa)RC] \cdot e^{(-\delta + \kappa)t} - [1 + (-\delta + \kappa)RC] \cdot e^{(-\delta - \kappa)t} \right]$$

$$u_C = -\frac{U_q}{(R + R_i)C} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{1 - \delta RC}{\kappa} \cdot \frac{e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}}{2} - RC \cdot \frac{e^{\kappa t} + e^{-\kappa t}}{2} \right]$$

$$u_C = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \left[ \frac{\delta - 1/RC}{\kappa} \cdot \sin h(\kappa t) + \cos h(\kappa t) \right]$$

$$u_C(\delta t) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \left[ \frac{\delta - 1/RC}{\kappa} \cdot \sin h \frac{\kappa}{\delta}(\delta t) + \cos h \frac{\kappa}{\delta}(\delta t) \right]$$

$$i = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \frac{1}{2\kappa} \cdot \left[ (\lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 RC) \cdot e^{\lambda_1 t} - (\lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 RC) \cdot e^{\lambda_2 t} \right]$$

$$i = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \frac{1}{2\kappa} \cdot \left[ \left( -\delta + \kappa + \frac{RC}{LC} \right) \cdot e^{(-\delta + \kappa)t} - \left( -\delta - \kappa + \frac{RC}{LC} \right) \cdot e^{(-\delta - \kappa)t} \right]$$

$$i = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \left( \frac{-\delta + R/L}{\kappa} \cdot \frac{e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}}{2} + \frac{e^{\kappa t} + e^{-\kappa t}}{2} \right) \right]$$

$$i = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{\delta}{\kappa} \cdot \sin h(\kappa t) + \cos h(\kappa t) \right] \quad \text{mit } R/L = 2\delta$$

$$i(\delta t) = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{\delta}{\kappa} \cdot \sin h \frac{\kappa}{\delta}(\delta t) + \cos h \frac{\kappa}{\delta}(\delta t) \right]$$

periodischer Fall:  $\lambda_1 = -\delta + j\omega$   $\lambda_2 = -\delta - j\omega$  d. h.  $\kappa = j\omega$

$$u_C = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{\delta - 1/RC}{j\omega} \cdot \sin h(j\omega t) + \cos h(j\omega t) \right]$$

mit  $\sin h(j\omega t) = j \cdot \sin \omega t$  und  $\cos h(j\omega t) = \cos \omega t$

$$u_C = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{\delta - 1/RC}{\omega} \cdot \sin \omega t + \cos \omega t \right]$$

Wird diese Gleichung genauso umgewandelt wie die Gl. (8.70) in die Gl. (8.71), indem  $\delta$  durch  $\delta - 1/RC$  ersetzt wird, dann ergibt sich

$$u_C(\omega t) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \sqrt{\left(\frac{\delta - 1/RC}{\omega}\right)^2 + 1} \cdot e^{-\frac{\delta}{\omega}(\omega t)} \cdot \sin(\omega t + \varphi^*)$$

$$\text{mit } \varphi^* = \arctan \frac{\omega}{\delta - 1/RC}$$

$$i = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{\delta}{j\omega} \cdot \sin h(j\omega t) + \cos h(j\omega t) \right]$$

$$\text{mit } \sin h(j\omega t) = j \cdot \sin \omega t \quad \text{und} \quad \cos h(j\omega t) = \cos \omega t$$

$$i = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{\delta}{\omega} \cdot \sin \omega t + \cos \omega t \right]$$

Bei gleicher Umformung wie die der Gl. (8.70) in die Gl. (8.71) ergibt sich

$$i(\omega t) = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \sqrt{\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2 + 1} \cdot e^{-\frac{\delta}{\omega}(\omega t)} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{mit } \varphi = \arctan \frac{\omega}{\delta}$$

für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  (aperiodischer Grenzfall):

$$u_C = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \left[ 1 - \frac{1 + \lambda RC}{RC} \cdot t \right] \cdot e^{\lambda t}$$

$$u_C = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \left[ 1 + \left( \delta - \frac{1}{RC} \right) \cdot t \right] \cdot e^{-\delta t}$$

$$u_C(\delta t) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \left[ 1 + \left( 1 - \frac{1}{\delta RC} \right) \cdot (\delta t) \right] \cdot e^{-\delta t}$$

$$i = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \left[ (1 + \lambda RC) - \lambda RC + \lambda \cdot (1 + \lambda RC) \cdot t \right] \cdot e^{\lambda t}$$

$$i = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \left[ 1 + (\lambda + \lambda^2 \cdot RC) \cdot t \right] \cdot e^{\lambda t}$$

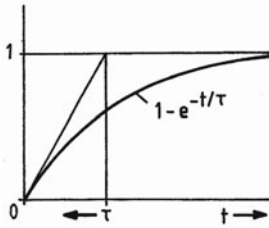
$$i = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \left[ 1 + \left( -\delta + \frac{RC}{LC} \right) \cdot t \right] \cdot e^{-\delta t} \quad \text{mit } \lambda^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$i = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \left[ 1 + (-\delta + 2\delta) \cdot t \right] \cdot e^{-\delta t} \quad \text{mit } \frac{R}{L} = 2\delta$$

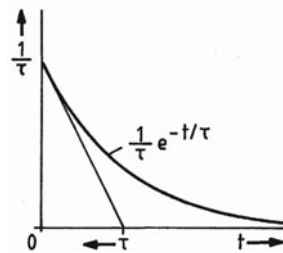
$$i(\delta t) = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \left[ 1 + (\delta t) \right] \cdot e^{-\delta t}$$

## 8.6

Zu 1.



**Bild A-144** Übungsaufgabe 8.6  
Je kleiner die Zeitkonstante  $\tau$  wird, umso mehr ähnelt die e-Funktion der Sprungfunktion  $\sigma(t)$ .



**Bild A-145** Übungsaufgabe 8.6  
Mit kleiner werdender Zeitkonstante  $\tau$  schmiegt sich die e-Funktion an die Ordinate, wobei gleichzeitig der Achsenabschnitt  $1/\tau$  größer wird.

$$\text{Zu 2.} \quad L\{\sigma(t)\} = L\left\{\lim_{\tau \rightarrow 0} (1 - e^{-t/\tau})\right\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} L\{1 - e^{-t/\tau}\}$$

$$L\{\sigma(t)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{1}{s \cdot (1 + s\tau)} \right) = \frac{1}{s} \quad \text{mit Gl. (8.77)}$$

Mit

$$\dot{\sigma}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d(1 - e^{-t/\tau})}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} (-e^{-t/\tau}) \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} = \delta(t)$$

ist

$$L\{\dot{\sigma}(t)\} = L\{\delta(t)\} = L\left\{\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}\right\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} L\left\{\frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}\right\}$$

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau}{1 + s\tau} \right) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + s\tau} \right) = 1 \quad \text{mit Gl. (8.76)}$$

(vgl. Korrespondenzen Nr. 23 und 25 im Abschnitt 8.3.6)

Zu 3.

Mit

$$L\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad L\{\sigma(t-a)\} = \frac{e^{-a \cdot s}}{s} \quad (\text{vgl. Gl. (8.105)})$$

ist

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \cdot \frac{1 - e^{-a \cdot s}}{s} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{s \cdot e^{-a \cdot s}}{s} = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a \cdot s} = 1$$

(mit der l'Hospitalschen Regel)

## 8.7

Kontrolle für den Strom  $i_L$ :

Differentialgleichung:

$$L \cdot \frac{di_L}{dt} + (R_L + R_p) \cdot i_L = 0$$

algebraische Gleichung:

$$L \cdot [s \cdot I_L(s) - i_L(0)] + (R_L + R_p) \cdot I_L(s) = 0$$

$$\text{mit } i_L(0) = \frac{R_p \cdot U_q}{R_i \cdot (R_L + R_p) + R_L R_p}$$

$$L \cdot \left[ s \cdot I_L(s) - \frac{R_p \cdot U_q}{R_i \cdot (R_L + R_p) + R_L R_p} \right] + (R_L + R_p) \cdot I_L(s) = 0$$

Lösung der algebraischen Gleichung:

$$I_L(s) = \frac{L \cdot R_p \cdot U_q}{R_i \cdot (R_L + R_p) + R_L R_p} \cdot \frac{1}{(R_L + R_p) + s \cdot L}$$

$$I_L(s) = \frac{R_p \cdot U_q}{R_i \cdot (R_L + R_p) + R_L R_p} \cdot \frac{1}{\frac{R_L + R_p}{L} + s}$$

Rücktransformation in den Zeitbereich:

nach der Korrespondenz Nr. 30 (siehe Abschnitt 8.3.6)

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s - a} \right\} = e^{at}$$

ist

$$i_L(t) = \frac{R_p \cdot U_q}{R_i \cdot (R_L + R_p) + R_L R_p} \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } a = -\frac{R_L + R_p}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

Kontrolle für die Spannung  $u_L$ :

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$U_L(s) = L \cdot [s \cdot I_L(s) - i_L(0)] = s \cdot L \cdot I_L(s) - \frac{L \cdot R_p \cdot U_q}{R_i \cdot (R_L + R_p) + R_L R_p}$$

$$U_L(s) = s \cdot L \cdot \frac{R_p \cdot U_q}{R_i \cdot (R_L + R_p) + R_L R_p} \cdot \frac{1}{\frac{R_L + R_p}{L} + s} - \frac{L \cdot R_p \cdot U_q}{R_i \cdot (R_L + R_p) + R_L R_p}$$

$$U_L(s) = \frac{L \cdot R_p \cdot U_q}{R_i \cdot (R_L + R_p) + R_L R_p} \cdot \left( \frac{s}{\frac{R_L + R_p}{L} + s} - 1 \right)$$

$$U_L(s) = \frac{L \cdot R_p \cdot U_q}{R_i \cdot (R_L + R_p) + R_L R_p} \cdot \frac{-\frac{R_L + R_p}{L}}{\frac{R_L + R_p}{L} + s}$$

Rücktransformation in den Zeitbereich:

(nach der Korrespondenz Nr. 30, siehe oben)

$$u_L(t) = -\frac{L \cdot R_p \cdot U_q \cdot \frac{R_L + R_p}{L}}{R_i \cdot (R_L + R_p) + R_L R_p} \cdot e^{-t/\tau} = -\frac{U_q}{\frac{R_i}{R_p} + \frac{R_L}{R_L + R_p}} \cdot e^{-t/\tau}$$

### 8.8

Zu 1.  $R \cdot i + u_2 = u_1$

mit  $i = i_{R_C} + i_C$

$$i = \frac{u_2}{R_C} + C \frac{du_2}{dt}$$

$$\frac{R}{R_C} u_2 + RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

$$RC \frac{du_2}{dt} + \left( \frac{R}{R_C} + 1 \right) \cdot u_2 = u_1$$

$$RC \left[ s \cdot U_2(s) - u_2(0) \right] + \left( \frac{R}{R_C} + 1 \right) \cdot U_2(s) = U_1(s) \quad \text{mit } u_2(0) = 0$$

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{R}{R_C} \right) + sRC} \quad \text{mit } U_1(s) = \frac{U}{s}$$

$$U_2(s) = \frac{U}{s \cdot \left[ \left( 1 + \frac{R}{R_C} \right) + sRC \right]} = \frac{U}{1 + \frac{R}{R_C}} \cdot \frac{1}{s \cdot \left( 1 + s \cdot \frac{RC}{1 + \frac{R}{R_C}} \right)}$$

nach Korrespondenz Nr. 49 (siehe Abschnitt 8.3.6):

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(1+sT)} \right\} = 1 - e^{-t/T}$$

$$u_2(t) = \frac{U}{1 + \frac{R}{R_C}} \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\text{mit } \tau = \frac{R \cdot C}{1 + \frac{R}{R_C}} = \frac{C}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_C}}$$

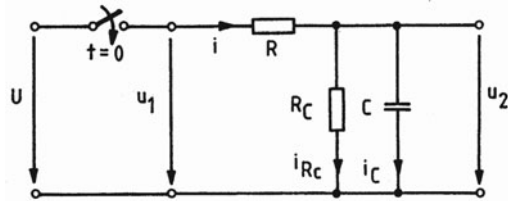


Bild A-146 Übungsaufgabe 8.8 Teil 1

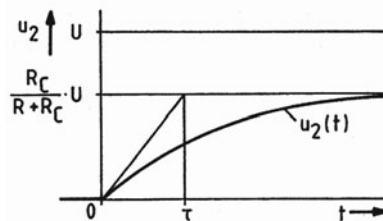


Bild A-147 Übungsaufgabe 8.8 Teil 1

$$\text{Zu 2.} \quad \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{\frac{1}{R_C} + sC}}$$

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R \cdot \left( \frac{1}{R_C} + sC \right)}{R \cdot \left( \frac{1}{R_C} + sC \right) + 1} = \frac{\frac{R}{R_C} + sRC}{\left( \frac{R}{R_C} + 1 \right) + sRC}$$

$$U_2(s) = U \cdot \left[ \frac{\frac{R}{R_C}}{s \cdot \left[ \left( \frac{R}{R_C} + 1 \right) + sRC \right]} + \frac{RC}{\left( \frac{R}{R_C} + 1 \right) + sRC} \right] \quad \text{mit } U_1(s) = \frac{U}{s}$$

$$U_2(s) = \frac{U}{\frac{R}{R_C} + 1} \cdot \left[ \frac{\frac{R}{R_C}}{s \cdot \left( 1 + s \cdot \frac{RC}{\frac{R}{R_C} + 1} \right)} + \frac{RC}{1 + s \cdot \frac{RC}{\frac{R}{R_C} + 1}} \right]$$

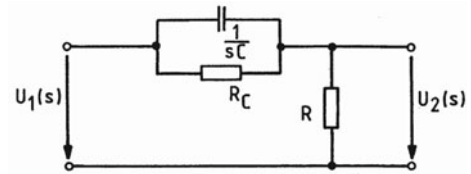


Bild A-148 Übungsaufgabe 8.8 Teil 2

Mit den Korrespondenzen Nr. 49 und Nr. 48

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(1+sT)} \right\} = 1 - e^{-t/T} \quad \text{und} \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{1+sT} \right\} = \frac{1}{T} \cdot e^{-t/T}$$

$$u_2(t) = \frac{U}{\frac{R}{R_C} + 1} \cdot \left[ \frac{R}{R_C} \cdot (1 - e^{-t/\tau}) + RC \cdot \frac{\frac{R}{R_C} + 1}{RC} \cdot e^{-t/\tau} \right]$$

$$u_2(t) = \frac{U}{\frac{R}{R_C} + 1} \cdot \left[ \frac{R}{R_C} - \frac{R}{R_C} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{R}{R_C} \cdot e^{-t/\tau} + e^{-t/\tau} \right]$$

$$u_2(t) = U \cdot \left[ \frac{R}{R + R_C} + \frac{R_C}{R + R_C} \cdot e^{-t/\tau} \right]$$

$$\text{mit } \tau = \frac{RC}{\frac{R}{R_C} + 1} = \frac{C}{\frac{1}{R_C} + \frac{1}{R}}$$

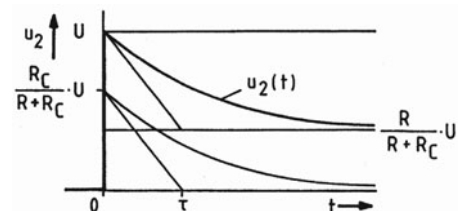


Bild A-149 Übungsaufgabe 8.8 Teil 2

Zu 3. Das Übertragungsglied im Bild 8.78 zeigt integrierendes Verhalten und das Übertragungsglied im Bild 8.79 differenzierendes Verhalten.

## 8.9

Zu 1. 
$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{U_2(s)}{U_{C1}(s)} \cdot \frac{U_{C1}(s)}{U_1(s)}$$

mit 
$$\frac{U_2(s)}{U_{C1}(s)} = \frac{\frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}$$

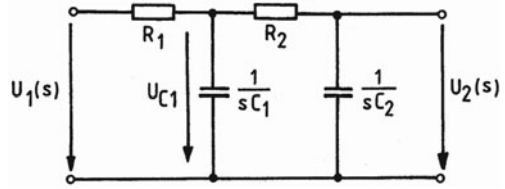


Bild A-150 Übungsaufgabe 8.9

und 
$$\frac{U_{C1}(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC_1 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}}}{R_1 + \frac{1}{sC_1 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}}} = \frac{1}{R_1 sC_1 + \frac{R_1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} + 1}$$

$$G(s) = \frac{1}{sC_2 \left( R_2 + \frac{1}{sC_2} \right)} \cdot \frac{1}{R_1 sC_1 + \frac{R_1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} + 1}$$

$$G(s) = \frac{1}{(sC_2 R_2 + 1) \cdot R_1 sC_1 + sC_2 R_1 + sC_2 R_2 + 1}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + s \cdot (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) + 1}$$

$$G(s) = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} \cdot \frac{1}{s^2 + s \cdot \frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 C_1 R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}$$

mit 
$$U_1(s) = \frac{U}{s}$$

$$U_2(s) = \frac{U}{R_1 C_1 R_2 C_2} \cdot \frac{1}{s \cdot \left( s^2 + s \cdot \frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 C_1 R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} \right)}$$

$$U_2(s) = \frac{U}{R_1 C_1 R_2 C_2} \cdot \frac{1}{s \cdot (s - s_1)(s - s_2)}$$

mit 
$$s^2 + s \cdot \frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 C_1 R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{2 \cdot R_1 C_1 R_2 C_2} \pm \sqrt{\frac{(R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)^2 - 4 \cdot R_1 C_1 R_2 C_2}{4 \cdot (R_1 C_1 R_2 C_2)^2}}$$

$$s_{1,2} = -\delta \pm \kappa$$

Die quadratische Gleichung kann nur zwei reelle Lösungen haben, die voneinander verschieden sind, weil

$$(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)^2 - 4 \cdot R_1C_1R_2C_2 > 0$$

$$[(R_1C_1 + R_2C_2) + R_1C_2]^2 - 4 \cdot R_1C_1R_2C_2 > 0$$

$$(R_1C_1 + R_2C_2)^2 + 2 \cdot (R_1C_1 + R_2C_2) R_1C_2 + (R_1C_2)^2 - 4 \cdot R_1C_1R_2C_2 > 0$$

$$(R_1C_1)^2 + 2 \cdot R_1C_1R_2C_2 + (R_2C_2)^2 + 2 \cdot (R_1C_1 + R_2C_2) R_1C_2 + (R_1C_2)^2 - 4 \cdot R_1C_1R_2C_2 > 0$$

$$(R_1C_1)^2 - 2 \cdot R_1C_1R_2C_2 + (R_2C_2)^2 + 2 \cdot (R_1C_1 + R_2C_2) R_1C_2 + (R_1C_2)^2 > 0$$

$$(R_1C_1 - R_2C_2)^2 + 2(R_1C_1 + R_2C_2) R_1C_2 + (R_1C_2)^2 > 0,$$

denn die Summe von drei positiven Summanden ist größer Null.

Nach der Korrespondenz Nr. 37 (siehe Abschnitt 8.3.6)

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s-a)(s-b)} \right\} = \frac{1}{ab} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{a-b} (be^{at} - ae^{bt}) \right]$$

$$u_2(t) = \frac{U}{R_1C_1R_2C_2} \cdot \frac{1}{s_1 \cdot s_2} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot (s_2 \cdot e^{s_1 t} - s_1 \cdot e^{s_2 t}) \right]$$

$$\text{mit } s_1 = -\delta + \kappa, \quad s_2 = -\delta - \kappa, \quad s_1 - s_2 = 2\kappa$$

$$\text{mit } s_1 \cdot s_2 = (-\delta + \kappa)(-\delta - \kappa)$$

$$s_1 \cdot s_2 = \delta^2 - \kappa^2$$

$$s_1 \cdot s_2 = \frac{(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)^2}{4 \cdot (R_1C_1R_2C_2)^2} - \frac{(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)^2 - 4 \cdot R_1C_1R_2C_2}{4 \cdot (R_1C_1R_2C_2)^2}$$

$$s_1 \cdot s_2 = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}$$

$$u_2(t) = U \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2\kappa} \cdot \left[ (-\delta - \kappa) \cdot e^{(-\delta + \kappa)t} - (-\delta + \kappa) \cdot e^{(-\delta - \kappa)t} \right] \right\}$$

$$u_2(t) = U \cdot \left\{ 1 + e^{-\delta t} \cdot \left[ -\frac{\delta}{\kappa} \cdot \frac{e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}}{2} - \frac{e^{\kappa t} + e^{-\kappa t}}{2} \right] \right\}$$

$$u_2(t) = U \cdot \left\{ 1 - e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{\delta}{\kappa} \cdot \sin h(\kappa t) + \cos h(\kappa t) \right] \right\}$$

$$u_2(\delta t) = U \cdot \left\{ 1 - e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{\delta}{\kappa} \cdot \sin h \frac{\kappa}{\delta}(\delta t) + \cos h \frac{\kappa}{\delta}(\delta t) \right] \right\}$$

$$\text{mit } \delta = \frac{R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2}{2 R_1C_1R_2C_2} \quad \text{und} \quad \kappa = \sqrt{\delta^2 - \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}$$

Das Übertragungsglied hat prinzipiell das gleiche Übertragungsverhalten wie der Reihenschwingkreis für den aperiodischen Fall (siehe Abschnitt 8.3.4, Beispiel 4, Gl. (8.126)).



Zu 2. Mit  $R_1 = R_2 = R$  und  $C_1 = C_2 = C$  ist

$$G(s) = \frac{1}{(RC)^2} \cdot \frac{1}{s^2 + s \cdot \frac{3}{RC} + \frac{1}{(RC)^2}} = \frac{1}{(RC)^2} \cdot \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

$$\text{mit } s_{1,2} = -\frac{3}{2RC} \pm \sqrt{\frac{9-4}{4 \cdot R^2 C^2}} = -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot RC} = \delta \pm \kappa$$

$$\text{d. h. } s_1 = -\frac{0,38}{R} \quad \text{und} \quad s_2 = -\frac{2,62}{RC} \quad (\text{vgl. Beispiel 2 im Abschnitt 8.3.2})$$

### 8.10

Der im Bild 8.81 gezeichnete Ausgleichsvorgang ist im Abschnitt 8.3.4, Beispiel 4 im Zeitbereich und mit Hilfe der Laplacetransformation vollständig berechnet, so dass hier nur noch die Interpretation der Ergebnisse mit Zahlenwerten notwendig ist.

Ob es sich um den aperiodischen Fall, aperiodischen Grenzfall oder periodischen Fall handelt, wird durch die Lösung der charakteristischen Gleichung (siehe Gln. (8.36) und (8.37)) unterschieden:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC} \quad \text{oder} \quad R > 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1H}{25\mu F}} = 400\Omega$$

1.  $R = 240\Omega < 400\Omega$ : periodischer Fall.

Nach Gl. (8.130) ( $u_C = u_2$ ) und (8.131) ist

$$\text{mit } \delta = \frac{R}{2L} = \frac{240\Omega}{2 \cdot 1H} = 120s^{-1}$$

$$\text{und } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{1H \cdot 25\mu F} - (120s^{-1})^2} = 160s^{-1}, \quad \text{d. h. } \frac{\delta}{\omega} = 0,75$$

$$u_2(\omega t) = U \cdot \left\{ 1 - \sqrt{\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2 + 1} \cdot e^{-\frac{\delta}{\omega}(\omega t)} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \right\}$$

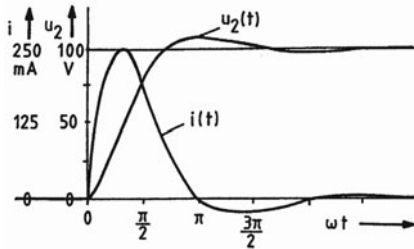
$$u_2(\omega t) = 100V \cdot \left\{ 1 - 1,25 \cdot e^{-\frac{\omega}{1,33}} \cdot \sin(\omega t + 0,93) \right\}$$

$$\text{mit } \varphi = \arctan \frac{1}{0,75} = 53,13^\circ \triangleq 0,93 \text{ rad}$$

$$i(\omega t) = \frac{U}{\omega L} \cdot e^{-\frac{\delta}{\omega}(\omega t)} \cdot \sin \omega t = \frac{100V}{160s^{-1} \cdot 1H} \cdot e^{-\frac{\omega t}{1,33}} \cdot \sin \omega t$$

$\omega t$	in grad	10	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	360
	in rad	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$2\pi$
$u_2$ in V		2,2	16,2	47,6	76,9	96,9	107	110	108	95	98	100	101
$i$ in mA		95	211	247	193	113	44	0	-20	-23	-18	-11	0

Darstellung siehe Bild A-151

**Bild A-151**

Übungsaufgabe 8.10, periodischer Fall

- 2.
- $R = 400\Omega$
- : aperiodischer Grenzfall.

Nach Gl. (8.128) ( $u_C = u_2$ ) und (8.129) ist

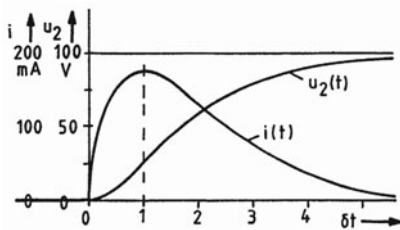
$$\text{mit } \delta = \frac{R}{2L} = \frac{400\Omega}{2 \cdot 1H} = 200s^{-1}$$

$$u_2(\delta t) = U \cdot \{1 - [1 + (\delta t)] \cdot e^{-\delta t}\} = 100V \cdot \{1 - [1 + (\delta t)] \cdot e^{-\delta t}\}$$

$$i(\delta t) = \frac{U}{R} \cdot 2 \cdot (\delta t) \cdot e^{-\delta t} = \frac{100V}{400\Omega} \cdot 2 \cdot (\delta t) \cdot e^{-\delta t}$$

$\delta t$	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
$u_2$ in V	0	2,65	9,02	17,3	26,4	44,2	59,4	80,1	90,1	96,0
$i$ in mA	0	97,4	152	177	184	167	135	74,7	36,6	16,8

Darstellung siehe Bild A-152

**Bild A-152**

Übungsaufgabe 8.10, aperiodischer Grenzfall

- 3.
- $R = 500\Omega > 400\Omega$
- : aperiodischer Fall.

Nach Gln. (8.126) ( $u_C = u_2$ ) und (8.127) ist

$$\text{mit } \delta = \frac{R}{2L} = \frac{500\Omega}{2 \cdot 1H} = 250s^{-1}$$

$$\text{und } \kappa = \sqrt{\delta^2 - 1/LC} = \sqrt{(250s^{-1})^2 - 1/(1H \cdot 25\mu F)} = 150s^{-1}$$

$$\text{und } \frac{\kappa}{\delta} = \frac{150s^{-1}}{250s^{-1}} = 0,6$$

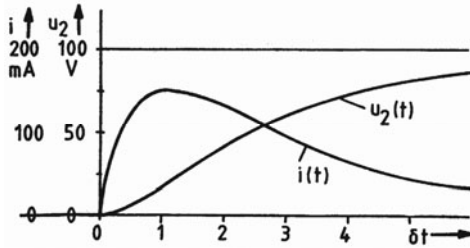
$$u_2(\delta t) = U \cdot \left\{ 1 - e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{\delta}{\kappa} \cdot \sin h \frac{\kappa}{\delta}(\delta t) + \cos h \frac{\kappa}{\delta}(\delta t) \right] \right\}$$

$$u_2(\delta t) = 100V \cdot \left\{ 1 - e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{1}{0,6} \cdot \sin h 0,6 \cdot (\delta t) + \cos h 0,6 \cdot (\delta t) \right] \right\}$$

$$i(\delta t) = \frac{U}{\kappa \cdot L} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin h \frac{\kappa}{\delta}(\delta t) = \frac{100V}{150s^{-1} \cdot 1H} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin h 0,6 \cdot (\delta t)$$

$\delta t$	0	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5
$u_2$ in V	0	1,7	5,82	9,1	17,4	41,4	60,1	73,1	82,0
$i$ in mA	0	78	123	152	156	136	98	67	45

Darstellung siehe Bild A-153



**Bild A-153**  
Übungsaufgabe 8.10, aperiodischer Fall

### 8.11

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0$$

$$\left[ s^2 \cdot U_C(s) - s \cdot u_C(0) - u_C'(0) \right] + \frac{R}{L} \cdot \left[ s \cdot U_C(s) - u_C(0) \right] + \frac{1}{LC} \cdot U_C(s) = 0$$

$$\text{mit } u_C(0) = \frac{U_q}{R + R_i} R \quad \text{und } u_C'(0) = \frac{i(0)}{C} = -\frac{U_q}{(R + R_i)C}$$

$$s^2 \cdot U_C(s) - s \cdot \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} + \frac{U_q}{(R + R_i)C} + s \cdot \frac{R}{L} \cdot U_C(s) - \frac{R}{L} \cdot \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} + \frac{1}{LC} \cdot U_C(s) = 0$$

$$U_C = \frac{s \cdot \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} + \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \left( \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right)}{s^2 + s \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \frac{s + \left( \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right)}{s^2 + s \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left( \frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \kappa = -\delta \pm j\omega$$

**$s_1 \neq s_2$  (aperiodischer und periodischer Fall)**

$$U_C(s) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \frac{s + \left( \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right)}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

nach den Korrespondenzen Nr. 41 und 34 (siehe Abschnitt 8.3.6)

$$L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s - a)(s - b)} \right\} = \frac{1}{a - b} \cdot (ae^{at} - be^{bt})$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - a)(s - b)} \right\} = \frac{1}{a - b} \cdot (e^{at} - e^{bt})$$

$$u_C(t) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left[ s_1 \cdot e^{s_1 t} - s_2 \cdot e^{s_2 t} + \left( \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right) \cdot (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \right]$$

mit  $s_1 = -\delta + \kappa$ ,  $s_2 = -\delta - \kappa$  und  $s_1 - s_2 = 2\kappa$

$$u_C(t) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \frac{1}{2\kappa} \cdot \left[ \left( -\delta + \kappa + \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right) \cdot e^{(-\delta + \kappa)t} - \left( -\delta - \kappa + \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right) \cdot e^{(-\delta - \kappa)t} \right]$$

mit  $\frac{R}{L} = 2\delta$

$$u_C(t) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \cdot \frac{1}{2\kappa} \cdot \left[ \left( \delta + \kappa - \frac{1}{RC} \right) \cdot e^{\kappa t} - \left( \delta - \kappa - \frac{1}{RC} \right) \cdot e^{-\kappa t} \right]$$

$$u_C(t) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{\delta - 1/RC}{\kappa} \cdot \frac{e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}}{2} + \frac{e^{\kappa t} + e^{-\kappa t}}{2} \right]$$

$$u_C(t) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \frac{\delta - 1/RC}{\kappa} \cdot \sin h(\kappa t) + \cos h(\kappa t) \right]$$

mit  $\kappa = j\omega$  periodischer Fall (siehe Lösung der Aufgabe 8.5)

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

$$I(s) = C \cdot [s \cdot U_C(s) - u_C(0)] = C \cdot \left[ s \cdot U_C(s) - \frac{U_q}{R + R_i} \cdot R \right]$$

$$I(s) = \frac{U_q \cdot RC}{R + R_i} \cdot \frac{s^2 + s \cdot \left( \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right)}{s^2 + s \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{RC}} - \frac{U_q \cdot RC}{R + R_i}$$

$$I(s) = \frac{U_q \cdot RC}{R + R_i} \cdot \left[ \frac{s^2 + s \cdot \left( \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right) - \left( s^2 + s \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right)}{s^2 + s \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \right]$$

$$I(s) = -\frac{U_q \cdot RC}{R + R_i} \cdot \frac{s \cdot \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + s \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$$I(s) = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \frac{s + \frac{R}{L}}{s^2 + s \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \frac{s + \frac{R}{L}}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \text{mit } s_1 \neq s_2$$

nach den Korrespondenzen Nr. 41 und 34 (siehe oben) ist

$$i(t) = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left[ s_1 \cdot e^{s_1 t} - s_2 \cdot e^{s_2 t} + \frac{R}{L} \cdot (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \right]$$

mit  $s_1 = -\delta + \kappa$ ,  $s_2 = -\delta - \kappa$  und  $s_1 - s_2 = 2\kappa$

$$i(t) = \frac{U_q}{R + R_i} \cdot \frac{1}{2\kappa} \cdot \left[ \left( -\delta + \kappa + \frac{R}{L} \right) \cdot e^{(-\delta + \kappa)t} - \left( -\delta - \kappa + \frac{R}{L} \right) \cdot e^{(-\delta - \kappa)t} \right]$$

weiter siehe Lösung der Aufgabe 8.5

### $s_1 = s_2$ aperiodischer Grenzfall

$$U_C(s) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \frac{s + \left( \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right)}{(s - a)^2} \quad \text{mit } a = -\delta$$

nach den Korrespondenzen Nr. 40 und 31 (siehe Abschnitt 8.3.6)

$$L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s - a)^2} \right\} = (1 + at) e^{at} \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - a)^2} \right\} = t \cdot e^{at}$$

$$u_C(t) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \left[ (1 - \delta t) \cdot e^{-\delta t} + \left( \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right) \cdot t \cdot e^{-\delta t} \right]$$

$$u_C(t) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \left[ 1 + \left( -\delta + \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right) \cdot t \right] \cdot e^{-\delta t}$$

mit  $\frac{R}{L} = 2\delta$

$$u_C(t) = \frac{U_q \cdot R}{R + R_i} \cdot \left[ 1 + \left( \delta - \frac{1}{RC} \right) \cdot t \right] \cdot e^{-\delta t} \quad (\text{vgl. Lösung der Aufgabe 8.5})$$

$$i(t) = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \frac{s + \frac{R}{L}}{(s - a)^2} \quad \text{mit } a = -\delta$$

nach den Korrespondenzen Nr. 40 und 31 (siehe oben) ist

$$i(t) = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \left[ (1 - \delta t) \cdot e^{-\delta t} + \frac{R}{L} \cdot t \cdot e^{-\delta t} \right]$$

$$i(t) = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot \left[ 1 + \left( -\delta + \frac{R}{L} \right) \cdot t \right] \cdot e^{-\delta t}$$

mit  $\frac{R}{L} = 2\delta$

$$i(t) = -\frac{U_q}{R + R_i} \cdot [1 + \delta t] \cdot e^{-\delta t} \quad (\text{vgl. Lösung der Aufgabe 8.5})$$

## 9 Fourieranalyse von nichtsinusförmigen periodischen Wechselgrößen und nichtperiodischen Größen

### 9.1

Zu 1. Symmetrie 2. Art,  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v(t) \cdot \sin k \omega t \cdot dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{2\hat{u}}{T} \cdot t \cdot \sin k \omega t \cdot dt$$

$$b_k = \frac{8\hat{u}}{T^2} \int_0^{T/2} t \cdot \sin k \omega t \cdot dt$$

$$\text{mit } \int x \cdot \sin ax \cdot dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cdot \cos ax}{a}$$

$$b_k = \frac{8\hat{u}}{T^2} \cdot \left[ \frac{\sin k \omega t}{(k\omega)^2} - \frac{t \cdot \cos k \omega t}{k\omega} \right]_0^{T/2}$$

$$b_k = \frac{8\hat{u}}{T^2} \cdot \left[ \frac{\sin k \frac{\omega T}{2} - 0}{(k\omega)^2} - \frac{\frac{T}{2} \cdot \cos k \frac{\omega T}{2} - 0}{k\omega} \right]$$

$$b_k = \frac{8\hat{u}}{T^2} \cdot \left[ \frac{\sin k \pi}{(k\omega)^2} - \frac{T/2 \cdot \cos k \pi}{k\omega} \right] = -\frac{8\hat{u}}{T^2} \cdot \frac{T \cdot \cos k \pi}{2 \cdot k\omega} = -\frac{8\hat{u}}{2 \cdot \omega T} \cdot \frac{\cos k \pi}{k}$$

$$b_k = -\frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{k}$$

$$u(t) = -\frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \sin k \omega t$$

$$u(t) = -\frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \left( -\frac{\sin \omega t}{1} + \frac{\sin 2 \omega t}{2} - \frac{\sin 3 \omega t}{3} + \frac{\sin 4 \omega t}{4} - \dots \right)$$

$$u(t) = 200V \cdot \left( \frac{\sin \omega t}{1} - \frac{\sin 2 \omega t}{2} + \frac{\sin 3 \omega t}{3} - \frac{\sin 4 \omega t}{4} + \dots \right)$$

Zu 2.  $\hat{u}_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |b_k|$

$$\hat{u}_k = \frac{2\hat{u}}{\pi \cdot k} = \frac{200V}{k}$$

$$\varphi_1 = 0^\circ \quad \varphi_2 = 180^\circ$$

$$\varphi_3 = 0^\circ \quad \varphi_4 = 180^\circ$$

uzw.

Zu 3.  $k' = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - 1} = 0,803$

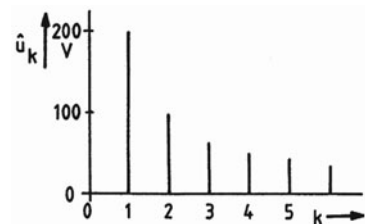


Bild A-154 Übungsaufgabe 9.1

## 9.2

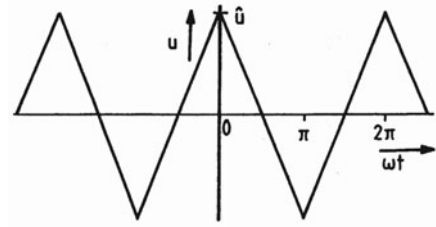
Zu 1. Gerade Funktion:

$$u(\omega t) = -\frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \omega t + \hat{u}$$

d. h. Symmetrie 1. und 3. Art

mit  $b_k = 0$  und  $a_{2k} = 0$ 

$$a_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} u(\omega t) \cdot \cos(2k+1)\omega t \cdot d(\omega t)$$

Bild A-155 Übungsaufgabe 9.2  
Gerade Funktion

$$a_{2k+1} = -\frac{4 \cdot 2\hat{u}}{\pi^2} \cdot \int_0^{\pi/2} (\omega t) \cdot \cos(2k+1)\omega t \cdot d(\omega t) + \frac{4\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(2k+1)\omega t \cdot d(\omega t)$$

$$\text{mit } \int x \cdot \cos ax \cdot dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \cdot \sin ax}{a}$$

$$a_{2k+1} = -\frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \left[ \frac{\cos(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2} + \frac{\omega t \cdot \sin(2k+1)\omega t}{2k+1} \right]_0^{\pi/2} + \frac{4\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin(2k+1)\omega t}{2k+1} \right]_0^{\pi/2}$$

$$a_{2k+1} = -\frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \left[ \frac{\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} - 1}{(2k+1)^2} + \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} \right] + \frac{4\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} \right]$$

$$a_{2k+1} = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{4\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} + \frac{4\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$u(\omega t) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2} = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \left( \frac{\cos \omega t}{1} + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \dots \right)$$

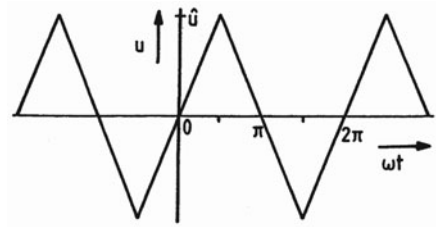
Ungerade Funktion

$$u(\omega t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \omega t$$

d. h. Symmetrie 2. und 3. Art

mit  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$  und  $b_{2k} = 0$ 

$$b_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} u(\omega t) \cdot \sin(2k+1)\omega t \cdot d(\omega t)$$

Bild A-156 Übungsaufgabe 9.2  
Ungerade Funktion

$$b_{2k+1} = \frac{4 \cdot 2\hat{u}}{\pi^2} \cdot \int_0^{\pi/2} (\omega t) \cdot \sin(2k+1)\omega t \cdot d(\omega t)$$

$$\text{mit } \int x \cdot \sin ax \cdot dx = \frac{\sin ax}{a^2} + \frac{x \cdot \cos ax}{a}$$

$$b_{2k+1} = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \left[ \frac{\sin(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2} - \frac{\omega t \cdot \cos(2k+1)\omega t}{2k+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$b_{2k+1} = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \left[ \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{(2k+1)^2} - \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \cos(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} - 0 \right] = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

$$u(\omega t) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \sin(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2} = \frac{8\hat{u}}{\pi^2} \cdot \left( \frac{\sin \omega t}{1} - \frac{\sin 3\omega t}{9} + \frac{\sin 5\omega t}{25} - \dots \right)$$

- Zu 2.  $\sin(\omega t + \pi/2) = \cos \omega t$   
 $\sin(3\omega t + 3\pi/2) = -\cos 3\omega t$   
 $\sin(5\omega t + 5\pi/2) = \cos 5\omega t$   
 usw.

### 9.3

- Zu 1.  $i(\omega t) = |\hat{i} \cdot \sin \omega t|$
- $$i(\omega t) = \begin{cases} \hat{i} \cdot \sin \omega t & \text{für } 0 \leq \omega t \leq \pi \\ -\hat{i} \cdot \sin \omega t & \text{für } \pi \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases}$$

mit Symmetrien 1. und 4. Art,

d. h.  $b_k = 0$  und  $a_{2k-1} = 0$

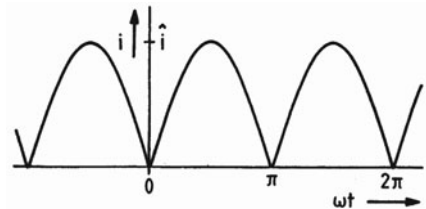


Bild A-157 Übungsaufgabe 9.3

- Zu 2. Zu berechnen sind:

$$\hat{i}_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 0, \quad \text{weil } a_3 = 0 \text{ und } b_3 = 0$$

$$\hat{i}_4 = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = |a_4|, \quad \text{weil } b_4 = 0$$

$$\hat{i}_5 = \sqrt{a_5^2 + b_5^2} = 0, \quad \text{weil } a_5 = 0 \text{ und } b_5 = 0$$

$$a_4 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} i(\omega t) \cdot \cos 4\omega t \cdot d(\omega t) = \frac{2\hat{i}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin \omega t \cdot \cos 4\omega t \cdot d(\omega t)$$

$$\text{mit } \int \sin ax \cdot \cos bx \cdot dx = -\frac{a \cdot \cos ax \cdot \cos bx + b \cdot \sin ax \cdot \sin bx}{a^2 - b^2} \quad \text{für } |a| \neq |b|$$

mit  $a = 1$  und  $b = 4$

$$a_4 = -\frac{2\hat{i}}{\pi} \cdot \left[ \frac{\cos \omega t \cdot \cos 4\omega t + 4 \cdot \sin \omega t \cdot \sin 4\omega t}{1 - 16} \right]_0^{\pi}$$

$$a_4 = \frac{2\hat{i}}{15\pi} \cdot [\cos \pi \cdot \cos 4\pi + 4 \cdot \sin \pi \cdot \sin 4\pi - \cos 0 \cdot \cos 0]$$

$$a_4 = \frac{2\hat{i}}{15\pi} \cdot (-2) = -\frac{4\hat{i}}{15\pi}$$

$$\hat{i}_4 = \frac{4\hat{i}}{15\pi} = 0,085 \cdot \hat{i}$$



## 9.4

Zu 1. Die Funktion hat die Symmetrie 3. Art, deshalb sind  $a_{2k} = 0$  und  $b_{2k} = 0$ .

Zu berechnen sind:

$$\hat{u}_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2}$$

$$\hat{u}_4 = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = 0, \quad \text{weil } a_4 = 0 \text{ und } b_4 = 0$$

$$a_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(\omega t) \cdot \cos 3 \omega t \cdot d(\omega t) = \frac{2 \hat{u}}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \omega t \cdot \cos 3 \omega t \cdot d(\omega t)$$

$$\text{mit } \int \sin ax \cdot \cos bx \cdot dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \quad \text{für } a^2 \neq b^2$$

mit  $a = 1$  und  $b = 3$

$$a_3 = \frac{2 \hat{u}}{\pi} \cdot \left[ -\frac{\cos(-2)\omega t}{2 \cdot (-2)} - \frac{\cos 4 \omega t}{2 \cdot 4} \right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$a_3 = \frac{2 \hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \frac{\cos 2\pi - \cos \pi}{4} - \frac{\cos 4\pi - \cos 2\pi}{8} \right]$$

$$a_3 = \frac{2 \hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \frac{1+1}{4} \cdot \frac{1-1}{8} \right] = \frac{\hat{u}}{\pi}$$

$$b_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(\omega t) \cdot \sin 3 \omega t \cdot d(\omega t) = \frac{2 \hat{u}}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \omega t \cdot \sin 3 \omega t \cdot d(\omega t)$$

$$\text{mit } \int \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad \text{für } |a| \neq |b|$$

mit  $a = 1$  und  $b = 3$

$$b_3 = \frac{2 \hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin(-2)\omega t}{2 \cdot (-2)} - \frac{\sin 4 \omega t}{2 \cdot 4} \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2 \hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin 2 \omega t}{4} - \frac{\sin 4 \omega t}{8} \right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$b_3 = \frac{2 \hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin 2\pi - \sin \pi}{4} - \frac{\sin 4\pi - \sin 2\pi}{8} \right] = 0$$

$$\hat{u}_3 = a_3 = \frac{\hat{u}}{\pi} = \frac{220\text{V} \cdot \sqrt{2}}{\pi} = 99\text{V}$$

## 9.5

Zu 1. Symmetrie 1. Art (gerade Funktion) mit  $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} u(\omega t) \cdot d(\omega t) = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^a d(\omega t) = \frac{\hat{u} \cdot a}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} u(\omega t) \cdot \cos k \omega t \cdot d(\omega t) = \frac{2 \hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^a \cos k \omega t \cdot d(\omega t)$$

$$a_k = \frac{2 \hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin k \omega t}{k} \Big|_0^a = \frac{2 \hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin ka}{k}$$

$$u(\omega t) = \frac{\hat{u} \cdot a}{\pi} + \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ka}{k} \cdot \cos k \omega t$$

$$u(\omega t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \left( \frac{a}{2} + \frac{\sin a}{1} \cdot \cos \omega t + \frac{\sin 2a}{2} \cdot \cos 2\omega t + \dots \right)$$

Zu 2.

$$s_1 = u(\xi_1 + 0) - u(\xi_1 - 0)$$

$$s_1 = 0 - \hat{u} = -\hat{u}$$

$$s_2 = u(\xi_2 + 0) - u(\xi_2 - 0)$$

$$s_2 = \hat{u} - 0 = \hat{u}$$

Mit  $u'(x) = 0$  ergibt die Gl. (9.47)

$$a_k = -\frac{1}{\pi \cdot k} \cdot (s_1 \cdot \sin k \xi_1 + s_2 \cdot \sin k \xi_2)$$

$$a_k = -\frac{1}{\pi \cdot k} \cdot [-\hat{u} \cdot \sin ka + \hat{u} \cdot \sin k(2\pi - a)] = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin ka}{k}$$

mit  $\sin k(2\pi - a) = -\sin ka$

und die Gl. (9.48)

$$b_k = \frac{1}{\pi \cdot k} \cdot (s_1 \cdot \cos k \xi_1 + s_2 \cdot \cos k \xi_2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi \cdot k} \cdot [-\hat{u} \cdot \cos ka + \hat{u} \cdot \cos k(2\pi - a)] = 0$$

mit  $\cos k(2\pi - a) = \cos ka$

Zu 3.

$$\hat{u}_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |a_k| = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{|\sin ka|}{k}, \quad \varphi_{uk} = \arctan \frac{a_k}{b_k} = \frac{\pi}{2}$$

Zu 4.

$$\underline{c}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cdot e^{-jk\omega t} \cdot d(\omega t) \quad \text{nach Gl. (9.84)}$$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ \int_0^a \hat{u} \cdot e^{-jk\omega t} \cdot d(\omega t) + \int_{2\pi-a}^{2\pi} \hat{u} \cdot e^{-jk\omega t} \cdot d(\omega t) \right]$$

$$\underline{c}_k = \frac{\hat{u}}{2\pi} \cdot \left[ \frac{e^{-jk\omega t}}{-jk} \Big|_0^a + \frac{e^{-jk\omega t}}{-jk} \Big|_{2\pi-a}^{2\pi} \right]$$

$$\underline{c}_k = \frac{\hat{u}}{-j \cdot 2k\pi} \cdot [e^{-jka} - 1 + e^{-jk2\pi} - e^{-jk(2\pi-a)}]$$

mit  $e^{-jk2\pi} = 1$  und  $e^{-jk(2\pi-a)} = e^{-jk2\pi} \cdot e^{jka} = e^{jka}$

$$\underline{c}_k = \frac{\hat{u}}{k\pi} \cdot \frac{e^{-jka} - e^{jka}}{-2j} = \frac{\hat{u}}{k\pi} \cdot \frac{e^{jka} - e^{-jka}}{2j}$$

$$\underline{c}_k = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{\sin ka}{k} = \frac{a_k}{2} - j \cdot \frac{b_k}{2} = \frac{a_k}{2}, \quad \text{weil } b_k = 0$$

$$|\underline{c}_k| = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{|\sin ka|}{k} \quad \text{und } \psi_k = 0, \quad \text{weil } \underline{c}_k \text{ reell und positiv}$$

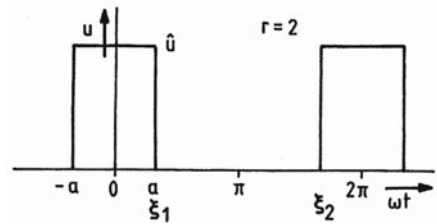


Bild A-158 Übungsaufgabe 9.5

Zusammenhänge zwischen den Amplituden- und Phasenspektren nach Gln. (9.86) und (9.87) für  $k = 0 \dots \infty$  bzw.  $k = -\infty \dots +\infty$ :

$$\hat{u}_k = 2 \cdot |c_k| = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{|\sin ka|}{k} \quad \text{und} \quad \varphi_{uk} = \psi_k + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

### 9.6

Zu 1. Symmetrie 1. Art mit  $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(\omega t) \cdot d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^a \hat{u} \cdot \left(1 - \frac{\omega t}{a}\right) \cdot d(\omega t)$$

$$a_0 = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \int_0^a d(\omega t) - \frac{1}{a} \int_0^a \omega t \cdot d(\omega t) \right] = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \omega t - \frac{1}{a} \cdot \frac{(\omega t)^2}{2} \right]_0^a$$

$$a_0 = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ a - \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \right] = \frac{\hat{u} \cdot a}{2\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(\omega t) \cdot \cos k \omega t \cdot d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \hat{u} \cdot \left(1 - \frac{\omega t}{a}\right) \cdot \cos k \omega t \cdot d(\omega t)$$

$$a_k = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \int_0^a \cos k \omega t \cdot d(\omega t) - \frac{1}{a} \int_0^a (\omega t) \cdot \cos k(\omega t) \cdot d(\omega t) \right]$$

$$\text{mit } \int x \cdot \cos ax \cdot dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \cdot \sin ax}{a}$$

$$a_k = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin k \omega t}{k} - \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{\cos k(\omega t)}{k^2} + \frac{(\omega t) \cdot \sin k(\omega t)}{k} \right) \right]_0^a$$

$$a_k = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin ka}{k} - \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{\cos ka}{k^2} + \frac{a \cdot \sin ka}{k} \right) + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{k^2} \right]$$

$$a_k = \frac{2\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin ka}{k} - \frac{\cos ka}{a \cdot k^2} - \frac{a \cdot \sin ka}{a \cdot k} + \frac{1}{a \cdot k^2} \right]$$

$$a_k = \frac{2\hat{u}}{\pi a} \cdot \frac{1 - \cos ka}{k^2}$$

$$u(\omega t) = \frac{\hat{u} \cdot a}{2\pi} + \frac{2\hat{u}}{\pi a} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos ka}{k^2} \cdot \cos k \omega t$$

$$u(\omega t) = \frac{\hat{u} \cdot a}{2\pi} + \frac{2\hat{u}}{\pi a} \cdot \left( \frac{1 - \cos a}{1} \cdot \cos \omega t + \frac{1 - \cos 2a}{4} \cdot \cos 2\omega t + \frac{1 - \cos 3a}{9} \cdot \cos 3\omega t + \dots \right)$$

Zu 2. In Gl. (9.49)  $i = 1, 2$  und  $3$  sind die Ordinaten sprünge der 1. Ableitung:

$$s'_1 = u'(\xi'_1 + 0) - u'(\xi'_1 - 0)$$

$$s'_1 = -\frac{\hat{u}}{a} - \frac{\hat{u}}{a} = -\frac{2\hat{u}}{a}$$

$$s'_2 = u'(\xi'_2 + 0) - u'(\xi'_2 - 0)$$

$$s'_2 = 0 - \left(-\frac{\hat{u}}{a}\right) = \frac{\hat{u}}{a}$$

$$s'_3 = u'(\xi'_3 + 0) - u'(\xi'_3 - 0)$$

$$s'_3 = -\frac{\hat{u}}{a} - 0 = -\frac{\hat{u}}{a}$$

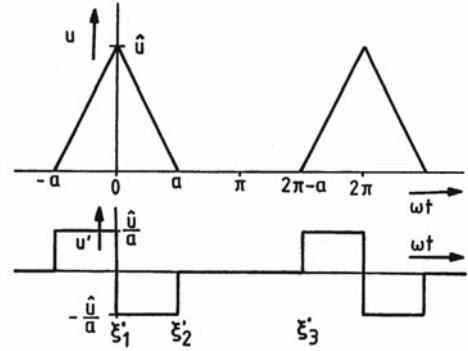


Bild A-159 Übungsaufgabe 9.6

$$a_k = -\frac{1}{\pi \cdot k^2} \cdot \sum_{i=1}^3 s'_i \cdot \cos k \xi'_i$$

$$a_k = -\frac{1}{\pi \cdot k^2} \cdot (s'_1 \cdot \cos k \xi'_1 + s'_2 \cdot \cos k \xi'_2 + s'_3 \cdot \cos k \xi'_3)$$

$$a_k = -\frac{1}{\pi \cdot k^2} \cdot \left[ -\frac{2\hat{u}}{a} \cdot \cos k \cdot 0 + \frac{\hat{u}}{a} \cdot \cos k \cdot a + \frac{\hat{u}}{a} \cdot \cos k (2\pi - a) \right]$$

mit  $\cos k(2\pi - a) = \cos ka$

$$a_k = \frac{2\hat{u}}{\pi a} \cdot \frac{1 - \cos ka}{k^2}$$

und nach Gl. (9.54)

$$b_k = -\frac{1}{\pi \cdot k^2} \cdot \sum_{i=1}^3 s'_i \cdot \cos k \xi'_i$$

$$b_k = -\frac{1}{\pi \cdot k^2} \cdot (s'_1 \cdot \sin k \xi'_1 + s'_2 \cdot \sin k \xi'_2 + s'_3 \cdot \sin k \xi'_3)$$

$$b_k = -\frac{1}{\pi \cdot k^2} \cdot \left[ -\frac{2\hat{u}}{a} \cdot \sin k \cdot 0 + \frac{\hat{u}}{a} \cdot \sin k \cdot a + \frac{\hat{u}}{a} \cdot \sin k (2\pi - a) \right]$$

mit  $\sin k(2\pi - a) = -\sin ka$

$$b_k = 0$$

Zu 3. Mit  $a = \pi$ :

$$u(\omega t) = \frac{\hat{u} \cdot \pi}{2\pi} + \frac{2\hat{u}}{\pi \cdot \pi} \cdot \left( \frac{1 - \cos \pi}{1} \cdot \cos \omega t + \frac{1 - \cos 2\pi}{4} \cdot \cos 2\omega t + \frac{1 - \cos 3\pi}{9} \cdot \cos 3\omega t + \dots \right)$$

$$u(\omega t) = \frac{\hat{u}}{2} + \frac{2\hat{u}}{\pi^2} \cdot \left( \frac{1 - (-1)}{1} \cdot \cos \omega t + \frac{1 - 1}{4} \cdot \cos 2\omega t + \frac{1 - (-1)}{9} \cdot \cos 3\omega t + \dots \right)$$

$$u(\omega t) = \frac{\hat{u}}{2} + \frac{4\hat{u}}{\pi^2} \cdot \left( \frac{\cos \omega t}{1} + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \dots \right)$$

Zu 4.

$$k' = \frac{\sqrt{\frac{1}{(3^2)^2} + \frac{1}{(5^2)^2} + \frac{1}{(7^2)^2} + \dots}}{1} = \sqrt{\frac{\pi^4}{96} - 1} = 0,121$$

## 9.7

Zu 1. Die Funktion hat keine Symmetrien.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cdot d(\omega t) = \frac{\hat{u}}{2\pi} \cdot \int_0^{p2\pi} d(\omega t) = \frac{\hat{u}}{2\pi} \cdot [\omega t]_0^{p2\pi}$$

$$a_0 = \frac{\hat{u}}{2\pi} \cdot p \cdot 2\pi = \hat{u} \cdot p$$

Der Gleichanteil kann auch aus der Rechteckfläche A ermittelt werden:

$$a_0 = \frac{A}{2\pi} = \frac{\hat{u} \cdot p2\pi}{2\pi} = \hat{u} \cdot p$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cdot \cos k \omega t \cdot d(\omega t) = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^{p2\pi} \cos k \omega t \cdot d(\omega t)$$

$$a_k = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \frac{\sin k \omega t}{k} \right]_0^{p2\pi} = \frac{\hat{u}}{\pi \cdot k} \cdot \sin k p 2\pi$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cdot \sin k \omega t \cdot d(\omega t) = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \int_0^{p2\pi} \sin k \omega t \cdot d(\omega t)$$

$$b_k = \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ -\frac{\cos k \omega t}{k} \right]_0^{p2\pi} = \frac{\hat{u}}{\pi \cdot k} \cdot (1 - \cos k p 2\pi)$$

Zu 2. 
$$\underline{c}_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cdot e^{-jk\omega t} \cdot d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{p2\pi} \hat{u} \cdot e^{-jk\omega t} \cdot d(\omega t)$$

$$\underline{c}_k = \frac{\hat{u}}{2\pi} \cdot \left[ \frac{e^{-jk\omega t}}{-jk} \right]_0^{p2\pi} = \frac{\hat{u}}{2\pi k} \cdot \frac{e^{-jk p 2\pi} - 1}{-j}$$

$$\underline{c}_k = \frac{\hat{u}}{2\pi k} \cdot \frac{\cos k p 2\pi - j \cdot \sin k p 2\pi - 1}{-j}$$

$$\underline{c}_k = \frac{\hat{u}}{2\pi k} \cdot \sin k p 2\pi - j \cdot \frac{\hat{u}}{2\pi k} \cdot (1 - \cos k p 2\pi) = \frac{a_k}{2} - j \cdot \frac{b_k}{2}$$

Zu 3. 
$$\hat{u}_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\hat{u}_k = \sqrt{\left( \frac{\hat{u}}{\pi k} \cdot \sin k p 2\pi \right)^2 + \left[ \frac{\hat{u}}{\pi k} \cdot (1 - \cos k p 2\pi) \right]^2}$$

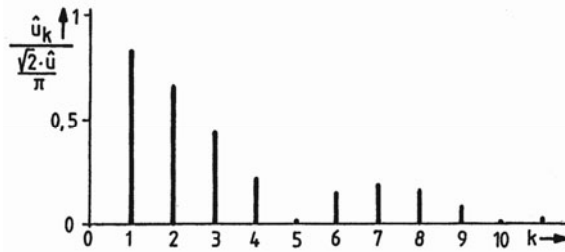
$$\hat{u}_k = \frac{\hat{u}}{\pi k} \cdot \sqrt{\sin^2 k p 2\pi + 1 - 2 \cdot \cos k p 2\pi + \cos^2 k p 2\pi}$$

$$\hat{u}_k = \frac{\hat{u}}{\pi k} \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos k p 2\pi} = \frac{\sqrt{2} \cdot \hat{u}}{\pi k} \cdot \sqrt{1 - \cos k p 2\pi}$$

$$|\underline{c}_k| = \frac{1}{2} \cdot \hat{u}_k = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2} \cdot \pi k} \cdot \sqrt{1 - \cos k p 2\pi}$$

Zu 4. 
$$\hat{u}_{k \text{ bez.}} = \frac{\hat{u}_k}{\frac{\sqrt{2} \cdot \hat{u}}{\pi}} = \frac{\sqrt{1 - \cos kp 2\pi}}{k}$$

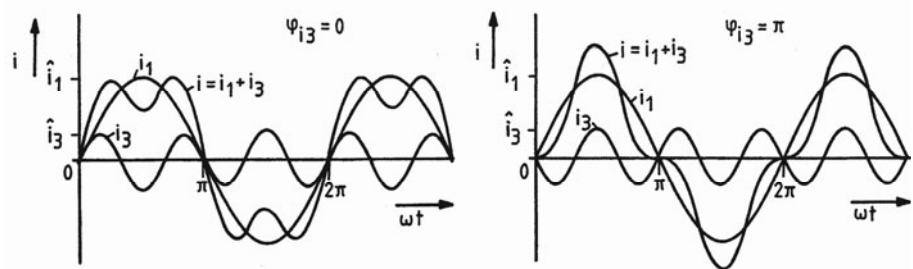
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{u}_{k \text{ bez.}}$	0,83	0,672	0,448	0,208	0	0,139	0,192	0,168	0,092	0



**Bild A-160**  
Übungsaufgabe 9.7

9.8

Zu 1.



**Bild A-161** Übungsaufgabe 9.8

Zu 2. 
$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{I_1^2 + \frac{1}{9} \cdot I_1^2} = 1,05 \cdot I_1$$

$$\frac{I}{I_1} = 1,05 \quad \text{mit} \quad \frac{\hat{i}_3}{\hat{i}_1} = \frac{I_3}{I_1} = \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad I_3 = \frac{1}{3} \cdot I_1$$

Zu 3. 
$$k = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}} = \frac{\sqrt{I_3^2}}{\sqrt{I_1^2 + I_3^2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{I_1}{3}\right)^2}}{\sqrt{I_1^2 + \left(\frac{I_1}{3}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}}} = 0,316$$

$$k' = \frac{1}{I_1} \cdot \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2} = \frac{\sqrt{I_3^2}}{I_1} = 0,333$$

## 9.9

$$\text{Zu 1. } F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} \cdot dt$$

$$F(j\omega) = \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

(vgl. Korrespondenz)

Die Ortskurve mit  $\omega = p \cdot \omega_0$  ist ein „Kreis durch den Nullpunkt“ (siehe Band 2, Abschnitt 5.3).

Zu 2. Nach Gl. (9.93)

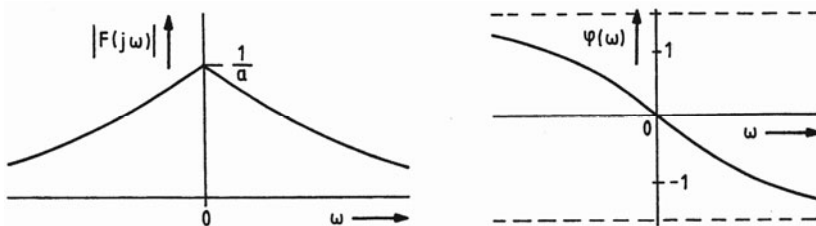
$$F(j\omega) = R(\omega) + j \cdot X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \cdot \frac{a-j\omega}{a-j\omega} = \frac{a}{a^2+\omega^2} + j \cdot \frac{-\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$\text{mit } R(\omega) = \frac{a}{a^2+\omega^2} \quad \text{und} \quad X(\omega) = -\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\text{mit } |F(j\omega)| = \left| \frac{1}{a+j\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \quad \text{und} \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = \arctan \frac{-\omega}{a} = -\arctan \frac{\omega}{a}$$

Zu 3.



**Bild A-163** Übungsaufgabe 9.9

## 9.10

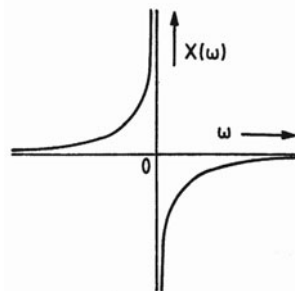
$$\text{Zu 1. } F(j\omega) = \int_{-\infty}^0 (-1) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt + \int_0^{\infty} (+1) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$$F(j\omega) = -\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_0^{\infty}$$

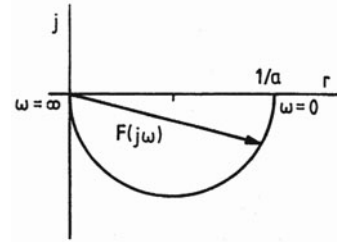
$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} = \frac{2}{j\omega}$$

$$F(j\omega) = R(\omega) + j \cdot X(\omega) = -j \cdot \frac{2}{\omega}$$

$$\text{d. h. } R(\omega) = 0 \quad \text{und} \quad X(\omega) = -\frac{2}{\omega}$$



**Bild A-164** Übungsaufgabe 9.10



**Bild A-162** Übungsaufgabe 9.9

Zu 2.  $\sigma(t) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sgn} t + \frac{1}{2}$

$$F\{\sigma(t)\} = F\left\{\frac{1}{2} \cdot \operatorname{sgn} t\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

mit  $F\left\{\frac{1}{2} \cdot \operatorname{sgn} t\right\} = \frac{1}{j\omega}$  (siehe unter 1.)

und  $F\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega)$

(vgl. Beispiel 5)

$$F\{\sigma(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi \cdot \delta(\omega) \quad (\text{vgl. Korrespondenz})$$

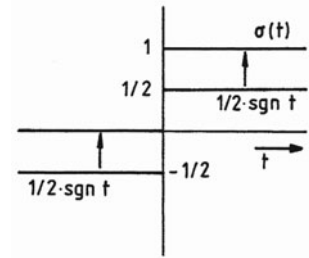


Bild A-165 Übungsaufgabe 9.10

### 9.11

$x(t) = \delta(t)$  und  $X(j\omega) = F\{\delta(t)\} = 1$

$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot G(j\omega)$

$$\text{mit } G(j\omega) = \frac{\frac{1}{R_C}}{R + \frac{1}{\frac{1}{R_C} + j\omega C}} = \frac{1}{R \cdot \left(\frac{1}{R_C} + j\omega C\right) + 1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{R_C}\right) + j\omega RC}$$

$$Y(j\omega) = 1 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{R_C}\right) + j\omega RC} = \frac{1}{RC \cdot \left[\left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{R_C C}\right) + j\omega\right]}$$

mit  $F^{-1}\left\{\frac{1}{a + j\omega}\right\} = \sigma(t) \cdot e^{-at}$

(siehe Korrespondenz)

$$y(t) = \frac{1}{RC} \cdot \sigma(t) \cdot e^{-t/\tau}$$

mit  $\tau = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_C}} \cdot C$

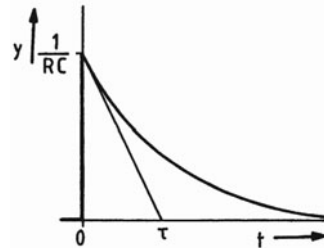


Bild A-166 Übungsaufgabe 9.11

### 9.12

Zu 1.  $G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_r + \frac{1}{j\omega C_r}}{R_r + \frac{1}{j\omega C_r} + \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\omega C_p}}$



$$G(j\omega) = \frac{\left(R_r + \frac{1}{j\omega C_r}\right) \left(\frac{1}{R_p} + j\omega C_p\right)}{1 + \left(R_r + \frac{1}{j\omega C_r}\right) \left(\frac{1}{R_p} + j\omega C_p\right)}$$

$$G(j\omega) = \frac{\left(\frac{R_r}{R_p} + \frac{C_p}{C_r}\right) + j \cdot \left(\omega R_r C_p - \frac{1}{\omega R_p C_r}\right)}{\left(1 + \frac{R_r}{R_p} + \frac{C_p}{C_r}\right) + j \cdot \left(\omega R_r C_p - \frac{1}{\omega R_p C_r}\right)}$$

mit  $\omega = p \cdot \omega_0$

$$G(j\omega) = \frac{\left(\frac{R_r}{R_p} + \frac{C_p}{C_r}\right) + j \cdot \left(p \cdot \omega_0 \cdot R_r \cdot C_p - \frac{1}{p \cdot \omega_0 \cdot R_p \cdot C_r}\right)}{\left(1 + \frac{R_r}{R_p} + \frac{C_p}{C_r}\right) + j \cdot \left(p \cdot \omega_0 \cdot R_r \cdot C_p - \frac{1}{p \cdot \omega_0 \cdot R_p \cdot C_r}\right)}$$

Zu 2. Die Ortskurve ist ein „Kreis in allgemeiner Lage“ (siehe Band 2, Abschnitt 5.4) mit der Bezugsfrequenz  $\omega_0$ , die aus

$$\omega_0 R_r C_p = \frac{1}{\omega_0 R_p C_r}$$

berechnet wird:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_r C_r R_p C_p}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 10^3 \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-9} \text{F} \cdot 10 \cdot 10^3 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-9} \text{F}}}$$

$$\omega_0 = 100 \cdot 10^3 \text{s}^{-1}$$

bzw.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot 100 \cdot 10^3 \text{s}^{-1} = 15,9 \text{ kHz.}$$

Mit

$$\omega_0 R_r C_p = 100 \cdot 10^3 \text{s}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^3 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{-9} \text{F} = 0,5$$

und

$$\frac{1}{\omega_0 R_p C_r} = \frac{1}{100 \cdot 10^3 \text{s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^3 \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-9} \text{F}} = 0,5$$

ist

$$G(j\omega) = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + j \cdot \left(p \cdot 0,5 - \frac{0,5}{p}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + j \cdot \left(p \cdot 0,5 - \frac{0,5}{p}\right)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1 + j \cdot 0,5 \cdot \left(p - \frac{1}{p}\right)}{2 + j \cdot 0,5 \cdot \left(p - \frac{1}{p}\right)} = \frac{\underline{A} + \left(p - \frac{1}{p}\right) \cdot \underline{B}}{\underline{C} + \left(p - \frac{1}{p}\right) \cdot \underline{D}}$$

mit  $\underline{B} = \underline{D} = j \cdot 0,5$

Nach der Konstruktionsvorschrift im Band 2, Abschnitt 5.4 wird die Ortskurve konstruiert:

Zu 1. 
$$\underline{N} = \underline{A} - \frac{\underline{B} \cdot \underline{C}}{\underline{D}} = \underline{A} - \underline{C} = 1 - 2 = -1$$

Zu 2. 
$$\underline{G} = \frac{\underline{C}}{\underline{N}} + \left( p - \frac{1}{p} \right) \cdot \frac{\underline{D}}{\underline{N}} = \frac{2}{-1} + \left( p - \frac{1}{p} \right) \cdot \frac{j \cdot 0,5}{-1} = -2 - j \cdot 0,5 \cdot \left( p - \frac{1}{p} \right)$$

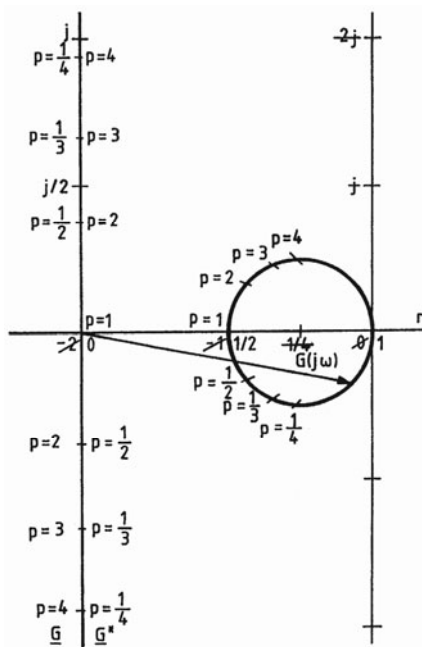
Zu 3. und 4. siehe Bild A-167

Zu 5. 
$$\frac{1}{2E} = \frac{N}{2C} = \frac{-1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$$

Da der Kreis mit dem Geradenmaßstab zu klein werden würde, wird für den Abstand 1/4 für den Kreismittelpunkt ein neuer, doppelt so großer Maßstab gewählt.

Zu 6. und 7. siehe Bild A-167

Zu 8. 
$$-\underline{L} = -\underline{B}/\underline{D} = -1$$



p	f = p · f <sub>0</sub> in kHz
0	0
1/4	4,0
1/3	5,3
1/2	8,0
1	15,9
2	31,8
3	47,7
4	63,7
∞	∞

**Bild A-167**  
Übungsaufgabe 9.12

Rechnerische Kontrolle einiger Ortskurvenpunkte:

$$p = 0: \quad G(j\omega) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p + j \cdot 0,5 p^2 - j \cdot 0,5}{2p + j \cdot 0,5 p^2 - j \cdot 0,5} = 1$$

$$p = 1: \quad G(j\omega) = \frac{1}{2}$$

$$p = 2: \quad G(j\omega) = \frac{1 + j \cdot 0,5 \cdot 1,5}{2 + j \cdot 0,5 \cdot 1,5} = \frac{1 + j \cdot 0,75}{2 + j \cdot 0,75} \cdot \frac{2 - j \cdot 0,75}{2 - j \cdot 0,75} = 0,56 + j \cdot 0,16$$

$$p = \infty: \quad G(j\omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{p} + j \cdot 0,5 - j \cdot 0,5 \frac{1}{p^2}}{\frac{2}{p} + j \cdot 0,5 - j \cdot 0,5 \frac{1}{p^2}} = 1$$

## 10 Vierpoltheorie

### 10.1

Zu 1. 
$$\underline{U}_1 = R \cdot \underline{I}_1 + \frac{1}{j\omega C} \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

$$\underline{U}_2 = (R_L + j\omega L) \cdot \underline{I}_2 + \frac{1}{j\omega C} \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

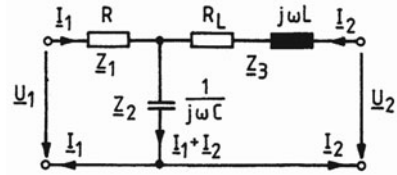


Bild A-168 Übungsaufgabe 10.1

bzw.

$$\underline{U}_1 = \left( R + \frac{1}{j\omega C} \right) \cdot \underline{I}_1 + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}_2 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}_1 + \left[ R_L + j \cdot \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \cdot \underline{I}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2$$

Zu 2. 
$$\underline{(Z)} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & R_L + j \cdot \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \end{pmatrix}$$

Zu 3. Wegen  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \frac{1}{j\omega C}$  ist der Vierpol umkehrbar.

### 10.2

Zu 1. Die  $\pi$ -Schaltung im Bild 10.75 ist symmetrisch, d. h. nach Gln. (10.59) und (10.54) ist  $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$  und  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ :

$$\underline{Y}_{11} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{U}_2=0} = j\omega(C + C_k) + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\underline{Y}_{11} = j \cdot \left[ \omega(C + C_k) - \frac{1}{\omega L} \right] = \underline{Y}_{22}$$

$$\underline{Y}_{21} = \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{U}_2=0} = -j\omega C_k = \underline{Y}_{12}$$

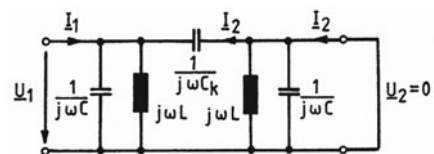


Bild A-169 Übungsaufgabe 10.2

Zu 2.

$$\underline{(Y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \cdot \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) + j\omega C_k & -j\omega C_k \\ -j\omega C_k & j\omega C_k + j \cdot \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \end{pmatrix}$$

10.3

Zu 1. Die T-Ersatzschaltung mit  $\underline{Z}$ -Parametern (siehe Bild 10.9) enthält wegen  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$  keine Spannungsquelle, weil passive Vierpole umkehrbar sind (siehe Abschnitt 10.6 und Gl. (10.55)).

Die Definitionsgleichungen für die  $\underline{Z}$ -Parameter stehen im Abschnitt 10.2.

$$\underline{Z}_{11} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0}$$

$$\underline{Z}_{11} = R + \left[ \frac{1}{j\omega C} \parallel j\omega(L_1 + L_2) \right]$$

mit  $L_1 + L_2 = 3L$

$$\underline{Z}_{11} = R + \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot j\omega 3L}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega 3L} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C}$$

$$\underline{Z}_{11} = R + \frac{j\omega 3L}{1 - 3\omega^2 LC} = R - j \cdot \omega \cdot \frac{3}{2} \cdot L \quad \text{mit } \omega^2 LC = 1$$

$$\text{mit } -j\omega L = \frac{1}{j} \cdot \omega L = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{Z}_{11} = R + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{Z}_{12} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0}$$

$$\text{mit } \frac{\underline{U}_1}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L_2}{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C}} \quad (\text{Stromteilerregel})$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{j\omega L_2}{j\omega(L_1 + L_2) + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2(L_1 + L_2)C}$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{j\omega 2L}{1 - \omega^2 3LC} = \frac{j\omega 2L}{1 - 3} = -j\omega L \quad \text{mit } L_1 + L_2 = 3L \quad \text{und } \omega^2 LC = 1$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{1}{j\omega C} = \underline{Z}_{21} \quad \text{mit } -j\omega L = \frac{1}{j} \cdot \omega L = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{Z}_{22} = \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0} = j\omega L_3 + \left[ j\omega L_2 \parallel \left( j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) \right] = j\omega L_3 = j\omega 2L$$

$$\text{wegen } j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0 \quad \text{und } L_3 = 2L$$

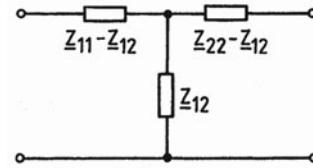


Bild A-170 Übungsaufgabe 10.3

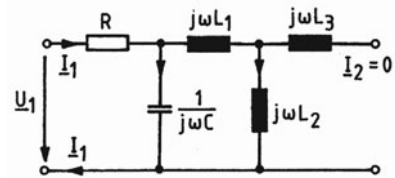


Bild A-171 Übungsaufgabe 10.3

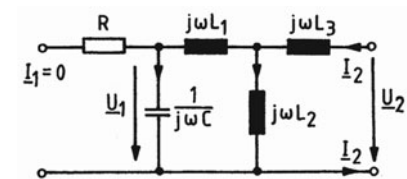


Bild A-172 Übungsaufgabe 10.3

Die Schaltelemente des realisierbaren Ersatzschaltbildes sind:

$$\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = R + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{j\omega C} - \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = R + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{j\omega C} = R + \frac{1}{j\omega 2C}$$

$$\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} = j\omega 2L + j\omega L = j\omega 3L$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{1}{j\omega C}$$

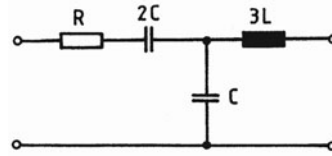


Bild A-173 Übungsaufgabe 10.3

#### 10.4

Zu 1. Die Leerlaufspannungsübersetzung vorwärts in Abhängigkeit von den  $\underline{Y}$ -Parametern errechnet sich nach Gl. (10.19) aus

$$(\underline{V}_{uf})_{Y_a=0} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}}$$

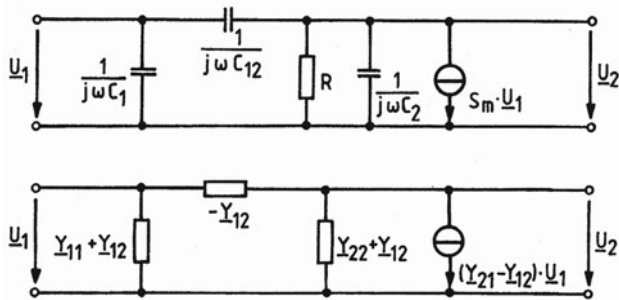


Bild A-174 Übungsaufgabe 10.4

Durch Vergleich der HF-Ersatzschaltung und der  $\pi$ -Ersatzschaltung ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} = j\omega C_1 \quad -\underline{Y}_{12} = j\omega C_{12}$$

$$\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12} = \frac{1}{R} + j\omega C_2 \quad S_m = \underline{Y}_{21} - \underline{Y}_{12}$$

d. h.

$$(\underline{V}_{uf})_{Y_a=0} = -\frac{S_m + \underline{Y}_{12}}{\frac{1}{R} + j\omega C_2 - \underline{Y}_{12}} = -\frac{S_m - j\omega C_{12}}{\frac{1}{R} + j\omega C_2 + j\omega C_{12}}$$

$$(\underline{V}_{uf})_{Y_a=0} = \frac{j\omega C_{12} - S_m}{\frac{1}{R} + j\omega(C_2 + C_{12})}$$

Zu 2. 
$$\underline{U}_1 = \frac{1}{j\omega C_{12}} \cdot \left( S_m \cdot \underline{U}_1 + \frac{\underline{U}_2}{R} + j\omega C_2 \cdot \underline{U}_2 \right) + \underline{U}_2$$

$$j\omega C_{12} \cdot \underline{U}_1 = S_m \cdot \underline{U}_1 + \frac{1}{R} \cdot \underline{U}_2 + j\omega C_2 \cdot \underline{U}_2 + j\omega C_{12} \cdot \underline{U}_2$$

$$(\underline{V}_{uf})_{Y_a=0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega C_{12} - S_m}{\frac{1}{R} + j\omega(C_2 + C_{12})}$$

## 10.5

Zu 1.  $(\underline{V}_{uf})_{\underline{Y}_a=0} = \underline{C}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{11}}$  (siehe Tabelle im Abschnitt 10.4)

Die  $\underline{A}$ -Parameter des  $\Gamma$ -Vierpols II sind im Abschnitt 10.3 angegeben:

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Y}_2 = 1 + \left( R_r + \frac{1}{j\omega C_r} \right) \left( \frac{1}{R_p} + j\omega C_p \right)$$

$$(\underline{V}_{uf})_{\underline{Y}_a=0} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{R_r}{R_p} + \frac{C_p}{C_r} \right) + j \cdot \left( \omega R_r C_p - \frac{1}{\omega R_p C_r} \right)}$$

Zu 2. siehe Abschnitt 4.4, Beispiel 5.

Zu 3. Die Leerlaufspannungsübersetzung ist reell, wenn der Imaginärteil des Operators Null ist:

$$\omega R_r C_p = \frac{1}{\omega R_p C_r} \quad \text{ergibt} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{R_r R_p C_r C_p}}$$

Zu 4.  $(\underline{V}_{uf})_{\underline{Y}_a=0} = \frac{1}{1 + \frac{R_r}{R_p} + \frac{C_p}{C_r}} = \frac{1}{3}$

## 10.6

Zu 1. Siehe Bild A-175: Es handelt sich um einen  $\Gamma$ -Vierpol II, dessen Parameter im Abschnitt 10.3 angegeben sind:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 \end{pmatrix}$$

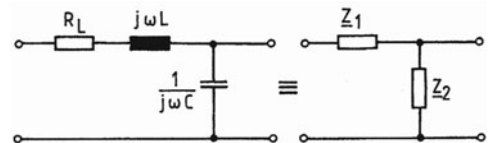


Bild A-175 Übungsaufgabe 10.6

Zu 2.  $(\underline{V}_{uf})_{\underline{Y}_a=0} = \frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} = \frac{1}{1 + (R_L + j\omega L) \cdot j\omega C} = \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega R_L C}$

$$(\underline{Z}_{in})_{\underline{Y}_a=\infty} = \underline{H}_{11} = \underline{Z}_1 = R_L + j\omega L$$

Zu 3.  $\underline{V}_{uf} = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_a} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_1}{R}}$  mit  $\underline{Y}_a = \frac{1}{R}$

$$\underline{V}_{uf} = \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega R_L C + \frac{R_L + j\omega L}{R}} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{R_L}{R} - \omega^2 LC \right) + j\omega \cdot \left( R_L C + \frac{L}{R} \right)}$$

$$\underline{Z}_{in} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = R_L + j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}$$

$$\underline{Z}_{in} = \frac{\left( 1 + \frac{R_L}{R} - \omega^2 LC \right) + j\omega \cdot \left( R_L C + \frac{L}{R} \right)}{\frac{1}{R} + j\omega C}$$

## 10.7

Zu 1. Bei den beiden Vierpolen handelt es sich um den Typ  $\Gamma$ -Vierpol II, dessen  $\underline{A}$ -Parameter allgemein im Abschnitt 10.3 angegeben sind (siehe Lösung 10.6).

Differenzierglied:

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_p \cdot \frac{1}{j\omega C_p}}{R_p + \frac{1}{j\omega C_p}} = \frac{R_p}{1 + j\omega R_p C_p} \quad (\underline{A}_D) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{R_p}{R(1 + j\omega R_p C_p)} & \frac{R_p}{1 + j\omega R_p C_p} \\ \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Z}_2 = R$$

Integrierglied:

$$\underline{Z}_1 = R \quad (\underline{A}_I) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{R}{R_r + \frac{1}{j\omega C_r}} & R \\ \frac{1}{R_r + \frac{1}{j\omega C_r}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Z}_2 = R_r + \frac{1}{j\omega C_r}$$

Zu 2.  $(\underline{V}_{uf})_{Y_a=0} = \frac{1}{\underline{A}_{11}} = K \cdot \frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega T_2}$

Differenzierglied:

$$\frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{1}{1 + \frac{R_p}{R \cdot (1 + j\omega R_p C_p)}} = \frac{1 + j\omega R_p C_p}{1 + j\omega R_p C_p + \frac{R_p}{R}}$$

$$\frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{1 + j\omega R_p C_p}{\frac{R_p + R}{R} + j\omega R_p C_p} = \frac{1 + j\omega R_p C_p}{\frac{R_p + R}{R} \cdot \left(1 + j\omega R_p C_p \cdot \frac{R}{R_p + R}\right)}$$

$$(\underline{V}_{ufD})_{Y_a=0} = \frac{R}{R_p + R} \cdot \frac{1 + j\omega R_p C_p}{1 + j\omega \cdot \frac{R_p \cdot R}{R_p + R} \cdot C_p}$$

mit  $K = \frac{R}{R_p + R}$ ,  $T_1 = R_p \cdot C_p$  und  $T_2 = \frac{R_p \cdot R}{R_p + R} \cdot C_p$

Integrierglied:

$$\frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_r + \frac{1}{j\omega C_r}}} = \frac{R_r + \frac{1}{j\omega C_r}}{R_r + \frac{1}{j\omega C_r} + R}$$

$$(\underline{V}_{ufI})_{Y_a=0} = \frac{1 + j\omega R_r C_r}{1 + j\omega (R_r + R) C_r}$$

mit  $K = 1$ ,  $T_1 = R_r \cdot C_r$  und  $T_2 = (R_r + R) \cdot C_r$

Zu 3. Differenzierglied mit  $R_p \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{\underline{A}_{11}} = \lim_{R_p \rightarrow \infty} \frac{1 + j\omega R_p C_p}{1 + j\omega R_p C_p + \frac{R_p}{R}}$$

$$\frac{1}{\underline{A}_{11}} = \lim_{R_p \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{R_p} + j\omega C_p}{\frac{1}{R_p} + j\omega C_p + \frac{1}{R}} = \frac{j\omega C_p}{j\omega C_p + \frac{1}{R}}$$

$$(\underline{V}_{uf D})_{\underline{Y}_a=0} = \frac{j\omega R C_p}{1 + j\omega R C_p}$$

Integrierglied mit  $R_r = 0$ :

$$\frac{1}{\underline{A}_{11}} = \lim_{R_r \rightarrow 0} \frac{1 + j\omega R_r C_r}{1 + j\omega (R_r + R) C_r}$$

$$(\underline{V}_{uf I})_{\underline{Y}_a=0} = \frac{1}{1 + j\omega R C_r}$$

### 10.8

Zu 1. Der Brücken-T-Vierpol kann als Parallel-Parallel-Schaltung (Bild 10.53) oder als Reihen-Reihen-Schaltung (Bild 10.57) aufgefasst werden. Die Schaltung soll als Reihen-Reihen-Schaltung behandelt werden:

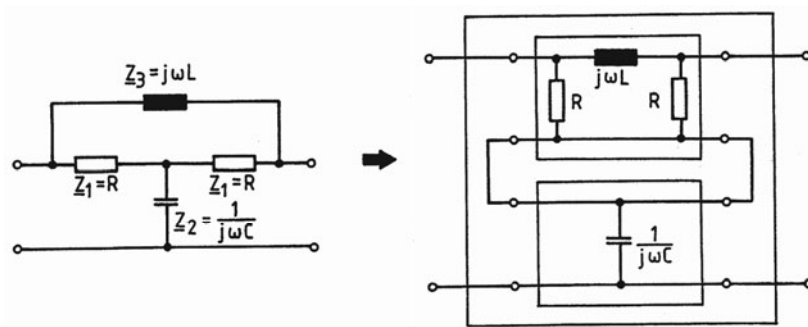


Bild A-176 Übungsaufgabe 10.8



Zu 2. Die  $\underline{Z}$ -Parameter der Gesamtschaltung ergeben sich durch Addition der  $\underline{Z}$ -Parameter des  $\pi$ -Vierpols und des Querwiderstandes, deren  $\underline{Z}$ -Parameter aus der Tabelle im Abschnitt 10.3 entnommen werden:

$$(\underline{Z}) = (\underline{Z}') + (\underline{Z}'') = \begin{pmatrix} \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_2 & \frac{\underline{Z}_1^2}{2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_2 \\ \frac{\underline{Z}_1^2}{2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_2 & \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_2 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{Z}) = \begin{pmatrix} \frac{R(R + j\omega L)}{2R + j\omega L} + \frac{1}{j\omega C} & \frac{R^2}{2R + j\omega L} + \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{R^2}{2R + j\omega L} + \frac{1}{j\omega C} & \frac{R(R + j\omega L)}{2R + j\omega L} + \frac{1}{j\omega C} \end{pmatrix}$$

Zu 3.  $(\underline{V}_{uf})_{Y_a=0} = \underline{C}_{21} = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}} = \frac{\frac{R^2}{2R + j\omega L} + \frac{1}{j\omega C}}{\frac{R^2}{2R + j\omega L} + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega R^2 C + 2R + j\omega L}{j\omega C(R^2 + j\omega LR) + 2R + j\omega L}$

$$(\underline{V}_{uf})_{Y_a=0} = \frac{2R + j\omega(R^2 C + L)}{2R - \omega^2 LCR + j\omega(R^2 C + L)} = \frac{2 + j\omega \cdot \left( RC + \frac{L}{R} \right)}{2 - \omega^2 LC + j\omega \cdot \left( RC + \frac{L}{R} \right)}$$

### 10.9

Zu 1.  $(\underline{V}_{uf})_{Y_a=0} = \frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C} - R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} = |\underline{V}_{uf}| \cdot e^{j\varphi}$

mit  $\underline{V}_{uf} = \frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2} \cdot e^{j\varphi_1}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2} \cdot e^{j\varphi_2}} = 1 \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$  d. h.  $|\underline{V}_{uf}| = V_{uf} = 1$

und  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \arctan(-\omega RC) - \arctan(\omega RC)$  mit  $\arctan(-x) = -\arctan x$   
 $\varphi = -2 \cdot \arctan(\omega RC)$

Zu 2. Mit

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

ist

$$\varphi = -2 \cdot \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

$\frac{\omega}{\omega_0}$	$\varphi$
0	0
0,25	- 28,1°
0,5	- 53,1°
0,75	- 73,3°
1	- 90°
1,33	- 106°
2	- 127°
4	- 152°
$\infty$	- 180°

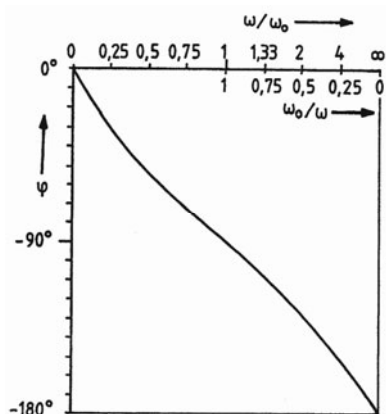


Bild A-177 Übungsaufgabe 10.9

## 10.10

Zu 1. Bei dem Doppel-T-RC-Glied handelt es sich um die Parallel-Parallel-Schaltung zweier T-Vierpole.

Die Vierpolparameter der Gesamtschaltung in Leitwertform ergeben sich durch Addition der  $\underline{Y}$ -Parameter der Einzelvierpole, die in der Tabelle im Abschnitt 10.3 zu finden sind.

Zu 2. Mit

$$(\underline{Y}_{\text{uf}})_{\underline{Y}_{\text{a}}=0} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22}} = 0$$

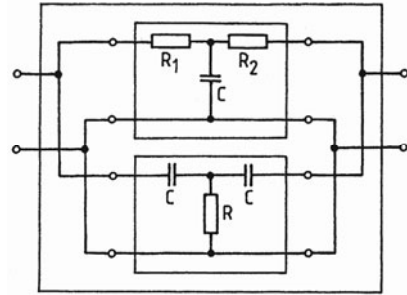


Bild A-178 Übungsaufgabe 10.10

ist der Parameter  $\underline{Y}_{21}$  des Doppel-T-Vierpols gesucht. Der  $\underline{Y}_{21}$ -Parameter eines T-Vierpols mit allgemeinen komplexen Widerständen (Abschnitt 10.3) ist

$$\underline{Y}_{21T} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3}$$

so dass sich für die Parallel-Parallel-Schaltung ergibt:

$$\underline{Y}_{21} = \underline{Y}'_{21} + \underline{Y}''_{21} = -\left( \frac{1}{\frac{R_1}{j\omega C} + \frac{R_2}{j\omega C} + R_1 R_2} + \frac{R}{\frac{2R}{j\omega C} + \left(\frac{1}{j\omega C}\right)^2} \right)$$

$$\underline{Y}_{21} = -\left( \frac{1}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} + \frac{(j\omega C)^2 R}{j\omega C 2R + 1} \right)$$

mit  $\omega = \omega_0$

$$\underline{Y}_{21} = \frac{-1}{R_1 + R_2 + j\omega_0 C R_1 R_2} + \frac{\omega_0^2 C^2 R}{j\omega_0 C 2R + 1} = 0$$

ergibt sich die Gleichung

$$j\omega_0 C 2R + 1 = \omega_0^2 C^2 R \cdot (R_1 + R_2 + j\omega_0 C R_1 R_2),$$

in der die Imaginärteile und die Realteile beider Seiten gleichgesetzt werden:

$$j\omega_0 C 2R = j\omega_0^3 C^3 R R_1 R_2$$

$$2 = \omega_0^2 C^2 R_1 R_2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{R_1 R_2}} \cdot \frac{1}{C}$$

$$1 = \omega_0^2 C^2 R (R_1 + R_2)$$

$$\text{mit } \omega_0^2 C^2 = \frac{2}{R_1 R_2}$$

$$1 = \frac{2}{R_1 R_2} R (R_1 + R_2)$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{2(R_1 + R_2)}$$

## 10.11

Zu 1. Die RC-Phasenkette kann als eine Kettenschaltung eines T-Vierpols und eines  $\pi$ -Vierpols aufgefasst werden. Aus den  $\underline{A}$ -Parametern der Einzelvierpole werden die  $\underline{A}$ -Parameter des Gesamtvierpols durch Matrizenmultiplikation errechnet. Da aber nur die Spannungsübersetzung  $\underline{V}_{uf}$  gesucht ist, braucht nur der Parameter  $\underline{A}_{11}$  ermittelt zu werden:

$$(\underline{V}_{uf})_{\underline{Y}_a=0} = \frac{1}{\underline{A}_{11}}$$

mit

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}'_{11} \cdot \underline{A}''_{11} + \underline{A}'_{12} \cdot \underline{A}''_{21}$$

(siehe Abschnitt 10.7.6)

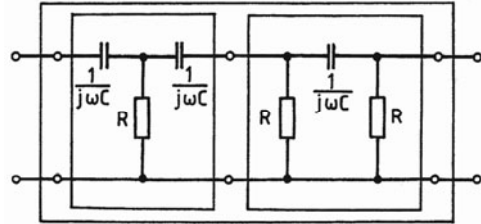


Bild A-179 Übungsaufgabe 10.11

$$\underline{A}_{11} = \left(1 + \frac{Z'_1}{Z'_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{Z''_2}{Z''_3}\right) + \left(Z'_1 + Z'_3 + \frac{Z'_1 Z'_3}{Z'_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{Z'_1} + \frac{1}{Z'_3} + \frac{Z''_2}{Z'_1 Z'_3}\right)$$

$$\underline{A}_{11} = \left(1 + \frac{1}{\frac{j\omega C}{R}}\right)^2 + \left(\frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{\frac{j\omega C}{R} \cdot \frac{1}{j\omega C}}\right) \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R \cdot R}\right)$$

$$\underline{A}_{11} = \left(1 + \frac{1}{j\omega RC}\right)^2 + \left(\frac{2}{j\omega C} - \frac{1}{\omega^2 RC^2}\right) \cdot \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{j\omega R^2 C}\right)$$

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{2}{j\omega RC} - \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2} + \frac{4}{j\omega RC} - \frac{2}{\omega^2 R^2 C^2} - \frac{2}{\omega^2 R^2 C^2} - \frac{1}{j\omega^3 R^3 C^3}$$

$$\underline{A}_{11} = 1 - \frac{5}{\omega^2 R^2 C^2} - j \cdot \frac{6}{\omega RC} + j \cdot \frac{1}{\omega^3 R^3 C^3}$$

$$(\underline{V}_{uf})_{\underline{Y}_a=0} = \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{\omega^2 R^2 C^2}\right) - j \cdot \left(\frac{6}{\omega RC} - \frac{1}{\omega^3 R^3 C^3}\right)}$$

Zu 2.  $\underline{V}_{uf}$  ist reell, wenn der Imaginärteil Null ist:

$$\frac{6}{\omega RC} = \frac{1}{\omega^3 R^3 C^3}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot RC} = \frac{0,41}{RC}$$

$\underline{V}_{uf}$  ist imaginär, wenn der Realteil Null ist:

$$1 = \frac{5}{\omega^2 R^2 C^2}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{5}}{RC} = \frac{2,24}{RC}$$

10.12

Zu 1. Die Transistorstufe im Bild 10.84 ist eine Parallel-Parallel-Schaltung (Spannung-Strom-Rückkopplung) mit einem Längswiderstand am Eingang in Kette (siehe Bild A-180).

Die Transistorstufe im Bild 10.85 ist eine Reihen-Reihen-Schaltung (Strom-Spannung-Rückkopplung) wie in den Bildern 10.51 und 10.58. Sie stellt also eine stromgegengekoppelte Emitterschaltung dar.

Im Bild 10.86 ist eine Kollektorschaltung dargestellt, die als rückgekoppelte Emitterschaltung (Spannung-Spannung-Rückkopplung) aufgefasst werden kann, wie im Bild 10.62 nachgewiesen ist.

Zu 2. Parallel-Parallel-Schaltung des Transistors mit einem  $\Gamma$ -Vierpol II:

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{11e}} + \frac{1}{R_2} & -\frac{h_{12e}}{h_{11e}} - \frac{1}{R_2} \\ \frac{h_{21e}}{h_{11e}} - \frac{1}{R_2} & \det h_e + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_C} \end{pmatrix}$$

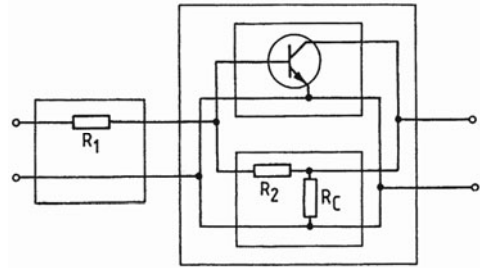


Bild A-180 Übungsaufgabe 10.12

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2,7k\Omega} + \frac{1}{47k\Omega} & -\frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{2,7k\Omega} - \frac{1}{47k\Omega} \\ \frac{220}{2,7k\Omega} - \frac{1}{47k\Omega} & \frac{2,7k\Omega \cdot 18\mu S - 220 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{2,7k\Omega} + \frac{1}{47k\Omega} + \frac{1}{120k\Omega} \end{pmatrix}$$

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} 391,65\mu S & -21,332\mu S \\ 81,46mS & 35,388\mu S \end{pmatrix}$$

umgewandelt in  $\underline{A}$ -Parameter wegen der Kettenschaltung:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\frac{1}{Y_{21}} \\ \frac{\det \underline{Y}}{Y_{21}} & -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -434,4 \cdot 10^{-6} & -12,276\Omega \\ -21,502 \cdot 10^{-6} S & -4,808 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Kettenschaltung des Längswiderstandes und des beschalteten Transistors:

(Matrizenmultiplikation)

		$-434,4 \cdot 10^{-6}$ $-12,276\Omega$ $-21,502 \cdot 10^{-6} S$ $-4,808 \cdot 10^{-3}$					
<table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">4,7kΩ</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> </table>	1	4,7kΩ	0	1		$\begin{pmatrix} -101,5 \cdot 10^{-3} & -34,87\Omega \\ -21,502 \cdot 10^{-6} S & -4,808 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$	= $(\underline{A})$
1	4,7kΩ						
0	1						

Betriebskenngrößen:

$$Z_{\text{in}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \frac{-101,5 \cdot 10^{-3}}{-21,502 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}} = 4,72 \text{ k}\Omega \approx R_1$$

$$Z_{\text{out}} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} = \frac{-4,808 \cdot 10^{-3}}{-21,502 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}} = 224 \Omega$$

$$V_{\text{uf}} = \frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{1}{-101,5 \cdot 10^{-3}} = -9,85 \approx -10, \text{ d. h. gleich } -\frac{R_2}{R_1}.$$

Zu 3. Die Parallelschaltung der beiden Basiswiderstände bildet einen Querwiderstand, der mit der Reihen-Reihen-Schaltung des Transistors in Kette geschaltet ist:

$$(\underline{A}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 13,41 \mu\text{S} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{820 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{82 \text{ k}\Omega} = 13,41 \mu\text{S}$$

Die Reihen-Reihen-Schaltung des Transistors mit dem Querwiderstand ist identisch mit dem Vierpol 3 des zweistufigen Verstärkers im Bild 10.50, deren  $\underline{Z}$ -Parameter im Abschnitt 10.7.3 berechnet wurden:

$$(\underline{Z}'') = \begin{pmatrix} 4,167 \text{ k}\Omega & 3,308 \text{ k}\Omega \\ -12,2 \text{ M}\Omega & 58,86 \text{ k}\Omega \end{pmatrix}.$$

Diese wurden im Abschnitt 10.7.6 (Beispiel 4) in  $\underline{A}$ -Parameter umgewandelt:

$$(\underline{A}'') = \begin{pmatrix} -341,0 \cdot 10^{-6} & -3,328 \cdot 10^3 \Omega \\ -81,83 \cdot 10^{-9} \text{ S} & -4,817 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Der Kollektorwiderstand ist ein Querwiderstand, der in Kette geschaltet ist:

$$(\underline{A}''') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 66,67 \mu\text{S} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_C} = \frac{1}{15 \text{ k}\Omega} = 66,67 \mu\text{S}$$

Durch zweimalige Matrizenmultiplikation ergeben sich die  $\underline{A}$ -Parameter der gesamten Stufe:

		$-341,0 \cdot 10^{-6}$	$-3,328 \cdot 10^3 \Omega$	1	0
		$-81,83 \cdot 10^{-9} \text{ S}$	$-4,817 \cdot 10^{-3}$	$66,67 \cdot 10^{-6} \text{ S}$	1
1	0	$-341,0 \cdot 10^{-6}$	$-3,328 \cdot 10^3 \Omega$	$-222,2 \cdot 10^{-3}$	$-3,328 \cdot 10^3 \Omega$
$13,41 \cdot 10^{-6} \text{ S}$	1	$-86,40 \cdot 10^{-9} \text{ S}$	$-49,445 \cdot 10^{-3}$	$-3,383 \cdot 10^{-6} \text{ S}$	$-49,445 \cdot 10^{-3}$

Betriebskenngrößen:

$$Z_{\text{in}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \frac{-222,2 \cdot 10^{-3}}{-3,383 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}} = 65,7 \text{ k}\Omega$$

$$Z_{\text{out}} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} = \frac{-49,445 \cdot 10^{-3}}{-3,383 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}} = 14,6 \text{ k}\Omega$$

$$V_{\text{uf}} = \frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{1}{-222,2 \cdot 10^{-3}} = -4,5$$

Zu 4. Mit den H-Parametern des Querwiderstandes

$$(\underline{H}^{\prime\prime}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1/R_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1/5k\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0,2mS \end{pmatrix}$$

ergibt sich mit den  $h_e$ -Parametern ( $\underline{H}'$ ) des Transistors:

$$(\underline{H}) = \begin{pmatrix} \underline{H}'_{11} + \underline{H}''_{11} & -(\underline{H}'_{12} - \underline{H}''_{12}) \\ -(\underline{H}'_{21} - \underline{H}''_{21}) & \underline{H}'_{22} + \underline{H}''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,7k\Omega + 0 & -(1,5 \cdot 10^{-4} - 1) \\ -(220 + 1) & 18\mu S + 0,2mS \end{pmatrix}$$

$$(\underline{H}) = \begin{pmatrix} 2,7k\Omega & 1 \\ -221 & 218\mu S \end{pmatrix}$$

Betriebskenngrößen:

$$\underline{Z}_{in} = \frac{\det \underline{H}}{\underline{H}_{22}} = \frac{2,7 \cdot 10^3 \Omega \cdot 218 \cdot 10^{-6} S + 221}{218 \cdot 10^{-6} S} = \frac{221,6}{218 \cdot 10^{-6} S} = 1M\Omega$$

$$\underline{Z}_{in\,ges} = \frac{1}{\frac{1}{R_{B1}} + \frac{1}{R_{B2}} + \frac{1}{\underline{Z}_{in}}} = \frac{1}{\frac{1}{120k\Omega} + \frac{1}{270k\Omega} + \frac{1}{1M\Omega}} = 77k\Omega$$

$$\underline{Z}_{out} = \frac{1 + \underline{H}_{11} \cdot \underline{Y}_i}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_i \cdot \det \underline{H}} = \frac{\underline{Z}_i + \underline{H}_{11}}{\underline{H}_{22} \cdot \underline{Z}_i + \det \underline{H}}$$

$$\text{mit } \underline{Z}_i = \frac{1}{\frac{1}{120k\Omega} + \frac{1}{270k\Omega}} = 83,1k\Omega$$

$$\underline{Z}_{out} = \frac{83,1k\Omega + 2,7k\Omega}{218 \cdot 10^{-6} S \cdot 83,1k\Omega + 221,6} = 358\Omega$$

$$\underline{V}_{uf} = -\frac{\underline{H}_{21}}{\det \underline{H}} = -\frac{-221}{221,6} = 0,997 \approx 1$$

Wegen des hohen Eingangswiderstandes und des niedrigen Ausgangswiderstandes bei einer Spannungsübersetzung von 1 eignet sich die Kollektorschaltung als Impedanzwandler.

### 10.13

Zu 1. Die Vierpolzusammenschaltung der Phasenumkehrstufe ist bereits im Bild 10.64 angegeben. Sie ist also eine Reihen-Parallel-Schaltung nach Bild 10.61.

Zu 2. Die  $\underline{H}$ -Parameter der Gesamtschaltung werden nach Gl. (10.74) berechnet:

$$\begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}'_{11} + \underline{H}''_{11} & \underline{H}'_{12} - \underline{H}''_{12} \\ \underline{H}'_{21} - \underline{H}''_{21} & \underline{H}'_{22} + \underline{H}''_{22} \end{pmatrix}$$

Die  $h_e$ -Parameter des Transistors sind die  $\underline{H}'$ -Parameter, und die  $\underline{H}$ -Parameter des  $\Gamma$ -Vierpols I sind die  $\underline{H}''$ -Parameter, die im Abschnitt 10.3 zu finden sind und sich nicht ändern, wenn der Vierpol auf den Kopf gestellt wird (siehe Abschnitt 10.7.3):

$$\begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11e} + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} & h_{12e} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ h_{21e} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} & h_{22e} + \frac{1}{R_1 + R_2} \end{pmatrix}$$

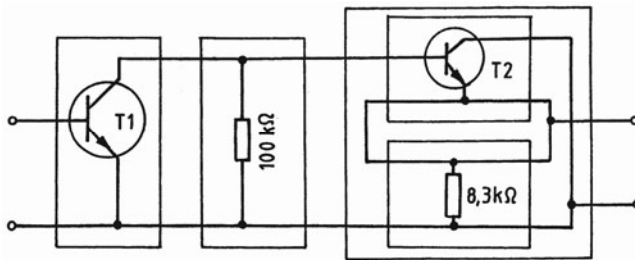
Zu 3. Mit

$$\begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\text{k}\Omega + 5\text{k}\Omega & 10^{-4} - 0,5 \\ 200 + 0,5 & \frac{1}{50\text{k}\Omega} + \frac{1}{20\text{k}\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\text{k}\Omega & -0,5 \\ \approx 200 & 70\mu\text{S} \end{pmatrix}$$

$$(\underline{V}_{\text{uf}})_{\underline{Y}_a=0} = -\frac{\underline{H}_{21}}{\det \underline{H}} = -\frac{200}{10\text{k}\Omega \cdot 70 \cdot 10^{-6} + 100} = -2$$

**10.14**

Zu 1.



**Bild A-181**  
Übungsaufgabe  
10.14

**Transistor T1:** Umrechnung der  $h_e$ -Parameter in  $A'$ -Parameter

$$(\underline{A}') = \begin{pmatrix} -\frac{\det h_e}{h_{21e}} & -\frac{h_{11e}}{h_{21e}} \\ -\frac{h_{22e}}{h_{21e}} & -\frac{1}{h_{21e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -209 \cdot 10^{-6} & -13,64\Omega \\ -90,9 \cdot 10^{-9}\text{S} & -3,03 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \det h_e = 4,5\text{k}\Omega \cdot 30\mu\text{S} - 2 \cdot 10^{-4} \cdot 330 = 69 \cdot 10^{-3}$$

**Querwiderstand 100 kΩ:**

$$(\underline{A}'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 \cdot 10^{-6}\text{S} & 1 \end{pmatrix}$$

**Reihen-Parallel-Schaltung T2/8,3 kΩ:** (siehe Abschnitt 10.7.4, Beispiel 1)

$$(\underline{H}''') = \begin{pmatrix} h_{11e} + H_{11Q} & -(h_{12e} - H_{12Q}) \\ -(h_{21e} - H_{21Q}) & h_{22e} + H_{22Q} \end{pmatrix}$$

mit den  $H_Q$ -Parametern des Querwiderstandes:

$$(\underline{H}_Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1/8,3\text{k}\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 120\mu\text{S} \end{pmatrix}$$

$$(\underline{H}''') = \begin{pmatrix} 4,5\text{k}\Omega & -(2 \cdot 10^{-4} - 1) \\ -(330 + 1) & 30\mu\text{S} + 120\mu\text{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \cdot 10^{-3}\Omega & 1 \\ -331 & 150 \cdot 10^{-6}\text{S} \end{pmatrix}$$

Umrechnung in A-Parameter:

$$(\underline{A}''') = \begin{pmatrix} -\frac{\det H'''}{H_{21}'''} & -\frac{H_{11}'''}{H_{21}'''} \\ -\frac{H_{22}'''}{H_{21}'''} & -\frac{1}{H_{21}'''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 13,6\Omega \\ 453 \cdot 10^{-9}\text{S} & 3,02 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

mit  $\det H''' = 331,7$

**A-Parameter der Kettenschaltung** (zweifache Matrizenmultiplikation):

	1	0	1	13,6Ω
	$10 \cdot 10^{-6}\text{S}$	1	$453 \cdot 10^{-9}\text{S}$	$3,02 \cdot 10^{-3}$
$-209 \cdot 10^{-6}$	$-345 \cdot 10^{-6}$	$-13,64\Omega$	$-351 \cdot 10^{-6}$	$-45,9 \cdot 10^{-3}\Omega$
$-90,9 \cdot 10^{-9}\text{S}$	$-121,2 \cdot 10^{-9}\text{S}$	$-3,03 \cdot 10^{-3}$	$-123 \cdot 10^{-9}\text{S}$	$-10,8 \cdot 10^{-6}$
$-13,64\Omega$				
$-3,03 \cdot 10^{-3}$				

Zu 2.  $(V_{\text{uf}})_{Y_{\text{a}}=0} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{-351 \cdot 10^{-6}} = -2850$

$V_{\text{uf}} = 2850$ , das sind 69dB (nach Gl. (10.20))

### 10.15

Zu 1. Abgesehen von dem am Eingang in Kette geschalteten Umpoler stimmt die Parallel-Reihenschaltung mit der im Bild 10.65 überein. Der Umpoler am Eingang bedeutet eine Vorzeichenumkehr der Parameter  $c_{12}$  und  $c_{21}$ , wie im Abschnitt 10.7.4 beschrieben ist.

Die c-Parameter der Gesamtschaltung sind die  $c_b$ -Parameter der Basisschaltung

$$\begin{pmatrix} c_{11b} & c_{12b} \\ c_{21b} & c_{22b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'_{11} + c''_{11} & -(c'_{12} + c''_{12}) \\ -(c'_{21} + c''_{21}) & c'_{22} + c''_{22} \end{pmatrix}$$

Die einfach gestrichenen Parameter sind die Transistorparameter in Emitterschaltung, die von der  $h_e$ -Form in die  $c_e$ -Form umgerechnet werden müssen:

$$\begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} \\ c'_{21} & c'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11e} & c_{12e} \\ c_{21e} & c_{22e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_{22e}}{\det h_e} & -\frac{h_{12e}}{\det h_e} \\ -\frac{h_{21e}}{\det h_e} & \frac{h_{11e}}{\det h_e} \end{pmatrix}$$

Die zweifach gestrichenen Parameter sind die des Umpolers, die im Abschnitt 10.3 zu finden sind:

$$\begin{pmatrix} c''_{11} & c''_{12} \\ c''_{21} & c''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergeben sich die c-Parameter der Basisschaltung

$$\begin{pmatrix} c_{11b} & c_{12b} \\ c_{21b} & c_{22b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_{22e}}{\det h_e} & \frac{h_{12e}}{\det h_e} - 1 \\ \frac{h_{21e}}{\det h_e} + 1 & \frac{h_{11e}}{\det h_e} \end{pmatrix}$$



und damit die Umrechnungsformeln für die  $h_b$ -Parameter

$$h_{11b} = \frac{c_{22b}}{\det c_b} = \frac{\frac{h_{11e}}{\det h_e}}{\frac{h_{22e}}{\det h_e} \cdot \frac{h_{11e}}{\det h_e} - \left( \frac{h_{12e}}{\det h_e} - 1 \right) \left( \frac{h_{21e}}{\det h_e} + 1 \right)}$$

$$h_{11b} = \frac{h_{11e}}{\frac{h_{22e} \cdot h_{11e}}{\det h_e} - \frac{(h_{12e} - \det h_e)(h_{21e} + \det h_e)}{\det h_e}}$$

$$h_{11b} = \frac{h_{11e}}{\frac{(h_{22e} \cdot h_{11e} - h_{12e} \cdot h_{21e}) + \det h_e \cdot h_{21e} - h_{12e} \cdot \det h_e + (\det h_e)^2}{\det h_e}}$$

$$h_{11b} = \frac{h_{11e}}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \det h_e} \quad \text{vgl. mit Gl. (10.85)}$$

$$h_{12b} = -\frac{c_{12b}}{\det c_b} = -\frac{\frac{h_{12e}}{\det h_e} - \frac{\det h_e}{\det h_e}}{\frac{h_{22e}}{\det h_e} \cdot \frac{h_{11e}}{\det h_e} - \left( \frac{h_{12e}}{\det h_e} - 1 \right) \left( \frac{h_{21e}}{\det h_e} + 1 \right)}$$

$$h_{12b} = -\frac{h_{12e} - \det h_e}{\frac{h_{22e} \cdot h_{11e}}{\det h_e} - \frac{(h_{12e} - \det h_e)(h_{21e} + \det h_e)}{\det h_e}}$$

$$h_{12b} = -\frac{\det h_e - h_{12e}}{\frac{(h_{22e} \cdot h_{11e} - h_{12e} \cdot h_{21e}) + \det h_e \cdot h_{21e} - h_{12e} \cdot \det h_e + (\det h_e)^2}{\det h_e}}$$

$$h_{12b} = \frac{\det h_e - h_{12e}}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \det h_e} \quad \text{vgl. mit Gl. (10.86)}$$

$$h_{21b} = -\frac{c_{21b}}{\det c_b} = -\frac{\frac{h_{21e}}{\det h_e} + \frac{\det h_e}{\det h_e}}{\frac{h_{22e}}{\det h_e} \cdot \frac{h_{11e}}{\det h_e} - \left( \frac{h_{12e}}{\det h_e} - 1 \right) \left( \frac{h_{21e}}{\det h_e} + 1 \right)}$$

$$h_{21b} = -\frac{h_{21e} + \det h_e}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \det h_e} \quad \text{vgl. mit Gl. (10.87)}$$

$$h_{22b} = \frac{c_{11b}}{\det c_b} = \frac{\frac{h_{22e}}{\det h_e}}{\frac{h_{22e}}{\det h_e} \cdot \frac{h_{11e}}{\det h_e} - \left( \frac{h_{12e}}{\det h_e} - 1 \right) \left( \frac{h_{21e}}{\det h_e} + 1 \right)}$$

$$h_{22b} = \frac{h_{22e}}{1 + h_{21e} - h_{12e} + \det h_e} \quad \text{vgl. mit Gl. (10.88)}$$

Zu 2.

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \\ \underline{I}_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11e} & \cancel{Y}_{12e} & -(Y_{11e} + Y_{12e}) \\ \cancel{Y}_{21e} & \cancel{Y}_{22e} & -(\cancel{Y}_{21e} + \cancel{Y}_{22e}) \\ -(Y_{11e} + Y_{21e}) & -(\cancel{Y}_{12e} + \cancel{Y}_{22e}) & \Sigma Y_e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_{B0} \\ \underline{U}_{C0} \\ \underline{U}_{E0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_B \\ \underline{I}_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11e} & -(Y_{11e} + Y_{12e}) \\ -(Y_{11e} + Y_{21e}) & \Sigma Y_e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_B \\ \underline{U}_E \end{pmatrix}$$

d. h.

$$Y_{11c} = Y_{11e}$$

$$Y_{12c} = -(Y_{11e} + Y_{12e})$$

$$Y_{21c} = -(Y_{11e} + Y_{21e})$$

$$Y_{22c} = \Sigma Y_e = Y_{11e} + Y_{12e} + Y_{21e} + Y_{22e}$$

Mit den Umrechnungsformeln für die Vierpolparameter im Abschnitt 10.2 ergeben sich die Formeln für die gesuchten  $h_c$ -Parameter:

$$h_{11c} = \frac{1}{Y_{11c}} = \frac{1}{Y_{11e}} = h_{11e} \quad \text{vgl. mit Gl. (10.77)}$$

$$h_{12c} = -\frac{Y_{12c}}{Y_{11c}} = \frac{Y_{11e} + Y_{12e}}{Y_{11e}} = \frac{\frac{1}{h_{11e}} - \frac{h_{12e}}{h_{11e}}}{\frac{1}{h_{11e}}} = 1 - h_{12e} \quad \text{vgl. mit Gl. (10.78)}$$

$$h_{21c} = \frac{Y_{21c}}{Y_{11c}} = \frac{-(Y_{11e} + Y_{21e})}{Y_{11e}} = \frac{-\frac{1}{h_{11e}} - \frac{h_{21e}}{h_{11e}}}{\frac{1}{h_{11e}}} = -(1 + h_{21e}) \quad \text{vgl. mit Gl. (10.79)}$$

$$h_{22c} = \frac{\det y_c}{Y_{11c}} = \frac{Y_{11c} \cdot Y_{22c} - Y_{12c} \cdot Y_{21c}}{Y_{11c}}$$

$$h_{22c} = \frac{Y_{11e} \cdot (Y_{11e} + Y_{12e} + Y_{21e} + Y_{22e}) - (Y_{11e} + Y_{12e})(Y_{11e} + Y_{21e})}{Y_{11e}}$$

$$h_{22c} = \frac{Y_{11e}^2 + Y_{11e}Y_{12e} + Y_{11e}Y_{21e} + Y_{11e}Y_{22e} - Y_{11e}^2 - Y_{11e}Y_{21e} - Y_{12e}Y_{11e} - Y_{12e}Y_{21e}}{Y_{11e}}$$

$$h_{22c} = \frac{Y_{11e} \cdot Y_{22e} - Y_{12e} \cdot Y_{21e}}{Y_{11e}} = \frac{\det y_e}{Y_{11e}} = \frac{\frac{h_{22e}}{h_{11e}}}{\frac{1}{h_{11e}}} = h_{22e} \quad \text{vgl. mit Gl. (10.80)}$$

**10.16**

Zu 1. Mit den Gln. (10.91) und (10.92) können die Wellenwiderstände ermittelt werden:

$$\underline{Z}_{w1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}} \quad \underline{Z}_{w2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}},$$

im Abschnitt 10.3 stehen die  $\underline{A}$ -Parameter des  $\Gamma$ -Vierpols II:

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix},$$

in obige Formeln eingesetzt ergeben sich

$$\underline{Z}_{w1} = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot Z_1}{\frac{1}{Z_2} \cdot 1}} = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2 \cdot \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \sqrt{Z_1 \cdot (Z_1 + Z_2)}$$

und

$$\underline{Z}_{w2} = \sqrt{\frac{1 \cdot Z_1}{\frac{1}{Z_2} \cdot \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)}} = \sqrt{\frac{Z_1 \cdot Z_2}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}}$$

Zu 2. Mit

$$\underline{Z}_1 = j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1} \quad \text{und} \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$$

ist

$$\underline{Z}_{w1} = \sqrt{\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1}\right) \cdot \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}\right)}$$

$$\underline{Z}_{w1} = \sqrt{j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right) \cdot j \cdot \left[\omega L - \frac{1}{\omega} \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\right]}$$

$$\underline{Z}_{w1} = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C_1} - \omega L\right) \cdot \left[\omega L - \frac{1}{\omega} \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\right]}$$

Zu 3.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega C_1} &= \omega L \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{L \cdot C_1}} \end{aligned} \right| \begin{aligned} \omega L &= \frac{1}{\omega} \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L \cdot C_1 \cdot C_2}} \end{aligned}$$

## 10.17

Zu 1. Mit den Gln. (10.99), (10.100) und (10.101) lassen sich die  $\underline{A}$ -Parameter für symmetrische Vierpole berechnen:

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_l}{\underline{Z}_l - \underline{Z}_k}} = \sqrt{\frac{90\Omega}{90\Omega - 80\Omega}} = 3$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_k = 3 \cdot 80\Omega = 240\Omega \quad \underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_l} = \frac{3}{90\Omega} = \frac{1}{30\Omega}$$

Die Ersatzschaltungen symmetrischer Vierpole (s. Bild 10.47) enthalten  $\underline{Z}$ - bzw.  $\underline{Y}$ -Parameter, die aus den  $\underline{A}$ -Parametern errechnet werden.

**T-Ersatzschaltung**

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = 3 \cdot 30\Omega = 90\Omega$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{21}} = 30\Omega$$

$$\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = 90\Omega - 30\Omega = 60\Omega$$

 **$\pi$ -Ersatzschaltung:**

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}} = \frac{3}{240\Omega} = \frac{1}{80\Omega}$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\frac{1}{\underline{A}_{12}} = -\frac{1}{240\Omega}$$

$$\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} = \frac{3}{240\Omega} - \frac{1}{240\Omega} = \frac{1}{120\Omega}$$

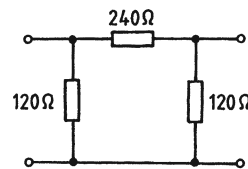
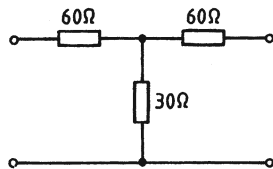


Bild A-182 Übungsaufgabe 10.17

Zu 2. Kontrolle mit Dreieck-Stern-Transformation nach den Gln. (4.100) bis (4.102) im Band 2:

$$\frac{240\Omega \cdot 120\Omega}{120\Omega + 240\Omega + 120\Omega} = 60\Omega \quad \text{und} \quad \frac{120\Omega \cdot 120\Omega}{120\Omega + 240\Omega + 120\Omega} = 30\Omega$$

## Verwendete und weiterführende Literatur

- [1] Lunze, K.: Theorie der Wechselstromschaltungen, VEB Verlag Technik 1981
- [2] Lunze, K.: Berechnung elektrischer Stromkreise, Arbeitsbuch VEB Verlag Technik, Berlin 1970
- [3] Philippow, E.: Grundlagen der Elektrotechnik, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.G., Leipzig, 1967
- [4] Führer, Heidemann, Nerretter: Grundgebiete der Elektrotechnik, 2 Bände, Hanser Verlag München, Wien, 1984
- [5] Ameling, Walter.: Grundlagen der Elektrotechnik, 2 Bände, Vieweg-Verlag Braunschweig, 1985
- [6] Lindner, H.: Elektro-Aufgaben, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 3 Bände, 1968 bis 1977, Neuauflage im Vieweg-Verlag Braunschweig, Wiesbaden 1989
- [7] Book, D. und Struß, C.: Harmonische Analyse einer in diskreten Punkten vorgegebenen Funktion, Diplomarbeit an der FH Hannover, 1982
- [8] Köhler, G. und Walther, A.: Fouriersche Analyse von Funktionen mit Sprüngen, Ecken und ähnlichen Besonderheiten, Archiv für Elektrotechnik 25 (1931), S. 747–758
- [9] Doetsch, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Birkhäuser Verlag, Basel 1958
- [10] Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation, R. Oldenbourg Verlag, München 1967
- [11] Holbrook, J. G.: Laplace-Transformation, Vieweg-Verlag Braunschweig, 1984
- [12] Dirschmid, H. J.: Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik, Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1987
- [13] Mildnerberger, O.: System- und Signaltheorie, Vieweg-Verlag Braunschweig, 1988
- [14] Fritzsche, G.: Theoretische Grundlagen der Nachrichtentechnik, VEB Verlag Technik Berlin 1972
- [15] Pauli, W.: Vierpoltheorie: Akademie-Verlag Berlin, 1973
- [16] Telefunken-Fachbuch: Röhre und Transistor als Vierpol, 1967
- [17] Tholl, H.: Bauelemente der Halbleiterelektronik, Teubner Verlag Stuttgart, 1976
- [18] Bystron, Borgmeyer: Grundlagen der Technischen Elektronik, Hanser Verlag München, Wien, 1987
- [19] Stoll, D.: Schaltungen der Nachrichtentechnik, Vieweg-Verlag Braunschweig 1986

# Sachwortverzeichnis

## A

- abklingende Wechselspannung, Laplacetransformation 34
- Abklingkonstante 22
- absolute Konvergenz des Fourierintegrals 156 ff.
- Additionssatz der Laplacetransformation 56
- Ähnlichkeitssätze der Laplacetransformation 56 ff.
- algebraische Gleichung 51, 54 ff.
- allgemeine Leitwertgleichungen 250
- Amplitudenspektrum 96, 152
  - des gleichgerichteten Stroms 155
  - einer Rechteckfunktion 112, 153 ff.
- Anfangsbedingungen 5
- Anfangswertsatz der Laplacetransformation 63
- aktive Schaltelemente 2
- $\underline{A}$ -Parameter von Vierpolen 179
- aperiodischer Fall 22, 25 ff., 73
- aperiodischer Grenzfall 22 ff., 26 ff., 73
- Aufladevorgang eines Kondensators 10, 12, 43 ff.
- Ausgangsleitwert 173, 194
- Ausgangs-Wellenwiderstand 253 ff.
- Ausgangswiderstand 173, 194
- Ausgleichsvorgänge 1
  - bei einem Transformator 66 ff.
  - bei Gleichspannung 7 ff., 63 ff., 92
  - bei sinusförmiger Quellspannung 14 ff., 69 ff., 93
  - bei verschwindenden Anfangsbedingungen 49 ff.
  - in Schwingkreisen 20 ff., 71 ff., 93

## B

- Basisschaltung
  - als Rückkopplungsschaltung 248 ff.
  - eines Transistors 201 ff.
- Betriebskenngrößen
  - eines Transistorverstärkers 198 ff., 245 ff.
  - von Vierpolschaltungen 172 ff., 189 ff.

- Besselsche Gleichungen 118
- Brücken-T-Vierpol 188, 231, 234, 260

## C

- charakteristische Gleichung 22
- $\underline{C}$ -Parameter von Vierpolen 178

## D

- Dämpfung 206
- Dämpfungssatz der Laplacetransformation 57
- Deltafunktion 93

- Differenzieren von Bildfunktionen 62
- Differenzierglied 260
- direkte trigonometrische Interpolation 117 ff.
- Dirichletsche Bedingung 96
- Diracimpuls 38, 93
- Distribution 38, 93
- Dreipole 248 ff.

## E

- Effektivwert einer
  - nichtsinusförmigen Wechselgröße 142 ff.
  - Rechteckfunktion 143
  - Sägezahnfunktion 144
- Eingangsleitwert 173, 189, 190, 196
- Eingangs-Wellenwiderstand 253 ff.
- Eingangswiderstand 173, 189, 190, 196
- eingeschwungener Vorgang 3 ff.
- Einschaltvorgang einer
  - Gleichspannung an eine Spule 7
  - Wechselspannung an eine Spule 14 ff.
- Endwertsatz der Laplacetransformation 62 ff.
- Entladevorgang eines Kondensators
  - über eine Spule 20 ff.
  - über ohmsche Widerstände 11, 44 ff.
- Ersatzfunktion 124
- Ersatzschaltungen von Vierpolen 174
  - mit  $\underline{C}$ -Parametern 178
  - mit  $\underline{H}$ -Parametern 177
  - mit  $\underline{Y}$ -Parametern 175
  - mit  $\underline{Z}$ -Parametern 176
  - von Transistoren 185
- Exponentialfunktion, Laplacetransformation 32

## F

- Faltungssatz der Laplacetransformation 61 ff.
- Fehlerquadratintegral 100
- Fehlerquadratsumme 117
- Filterkette 245
- flüchtiger Vorgang 3 ff.
- Fortsetzungsfunktion 39
- Fourieranalyse 95 ff.
- Fourierintegral 156 ff.
- Fourierkoeffizienten, Berechnung 100 ff.
  - Formeln für die Berechnung 103 ff.
  - Vereinfachung für die Berechnung 104 ff.
- Fourierreihe
  - einer Dreiecksfunktion 130 ff.
  - einer Ersatzfunktion 124 ff.
  - einer Rechteckfunktion 111 ff., 128
  - einer Sägezahnspannung 97 ff., 112 ff.

- eines gleichgerichteten Stroms 114 ff., 123, 139
  - mit Fourierkoeffizienten 99
- Fouriersynthese 147 ff.  
 Fouriertransformation 156 ff.  
 Fouriertransformierte
- Darstellungsformen 157
  - der Signum-Funktion 170
  - der Zeitfunktion  $f(t) = 1$  161
  - des Diracimpulses 159
  - eines Rechteckimpulses 158
- Frequenzgang 165, 170  
 Frequenz-Kennlinien-Diagramm 165

**G**

- $\Gamma$ -Vierpol I 186  
 $\Gamma$ -Vierpol II 187  
 Gegenkopplung 229  
 gerade Funktionen 104 ff.  
 Geradenapproximation und Sprungstellenverfahren 132 ff.  
 Gleichanteil einer Fourierreihe 95

**H**

- $H$ -Parameter von Vierpolen 177  
 Harmonische einer Fourierreihe 95  
 Hybridform der Vierpolgleichungen 177

**I**

- Impulsantwort einer RC-Schaltung 166, 170  
 Integrieren von Bildfunktionen 62  
 Integrierglied 260  
 inverse Fouriertransformation 157, 160  
 inverse Laplacetransformation 49

**K**

- Kenngrößen von Vierpolen
- in Rückwärtsbetrieb 193 ff., 196
  - in Vorwärtsbetrieb 189 ff., 196
- Kettenform der Vierpolparameter 179  
 Kettenschaltung zweier Vierpole 243 ff.  
 Klemmen-Leistungsverstärkung 206  
 Klirrfaktoren 145
- einer Rechteckfunktion 145
  - einer Sägezahnfunktion 145
- Kollektorschaltung
- als Rückkopplungsschaltung 248
  - eines Transistors 201
- komplementäre Schaltungen eines Transistors 202  
 komplexe Fourierreihe 150 ff.  
 Konvergenz
- der Fourierreihen 96
  - der Laplacetransformierten 162 ff.
- Korrespondenzen
- der Fouriertransformation 164
  - der Laplacetransformation 86 ff.

**L**

- Längswiderstand 186  
 Laplaceintegral 31  
 Laplaceoperationen 85 ff.  
 Laplacetransformation 30 ff.
- der Ableitung einer Funktion 34 ff.
  - der Ableitung einer Funktion mit Fortsetzungsfunktion 39
  - der abklingenden sinusförmigen Wechselspannung 34
  - der sinusförmigen Wechselspannung 33
  - der verschobenen Sprungfunktion 58
  - des Integrals einer Funktion 40 ff.
  - einer dreieckförmigen Zeitfunktion 61
  - einer Impulsfolge 59
  - einer Rampenfunktion 32
  - einer Sprungfunktion 31
  - von Exponentialfunktionen 32
  - von periodischen Sinusimpulsen 60
- Leistungsverstärkung 206
- eines HF-Transistors 210 ff.
  - eines NF-Transistors 209, 245 ff.
- Leistungsübertragung
- am Vierpolausgang 203 ff.
  - am Vierpoleingang 203
- Leitwertform der Vierpolgleichungen 175  
 Lineare Vierpole 171  
 Lösungsmethoden für die Berechnung von Ausgleichsvorgängen 51

**M**

- Matrizenschaltung und Vierpolzusammenschaltung 229  
 Maximale Leistungsverstärkung 217  
 Methode der kleinsten Fehlerquadrate 100  
 Mitkopplung 229

**N**

- Netzberechnung bei nichtsinusförmigen periodischen Quellspannungen 146  
 Netzwertfunktion 147  
 Neutralisationsschaltungen 225  
 numerische Berechnung von trigonometrischen Reihen 116 ff.

**O**

- Oberwellen einer Fourierreihe 95  
 Operationsverstärker 76  
 Operatoren der Laplacetransformation 50  
 Ordinaten sprünge 125 ff.  
 Orthogonalitätsrelationen 102

**P**

- Parallel-Parallel-Schaltung zweier Vierpole 229, 230 ff.  
 Parallel-Reihen-Form der Vierpolgleichungen 178

Parallel-Reihen-Schaltung zweier Vierpole  
229, 241  
passive Schaltelemente 2  
periodischer Fall 22, 28 ff., 74  
Phasenkette 261  
Phasenspektrum 96, 152  
– einer Rechteckfunktion 153 ff.  
Phasenumkehrstufe 241, 262  
 $\pi$ -Ersatzschaltung  
– eines Übertragers 184  
– von Vierpolen 175  
 $\pi$ -Schaltung 187  
Pol-Nullstellen-Diagramm 54  
P-, PI-, PD-Verhalten einer RC-Schaltung 83

**Q**

Querwiderstand 186

**R**

Rampenfunktion 32  
Rechteck-Frequenzkurve 160  
Rechteckspannung am Operationsverstärker  
76 ff.  
Reihen-Parallel-Form der Vierpolgleichungen  
177  
Reihen-Parallel-Schaltung zweier Vierpole  
229, 236 ff.  
Reihen-Reihen-Schaltung zweier Vierpole  
228 ff., 232 ff.  
richtungssymmetrischer Vierpol 221  
rückgekoppelter Transistorverstärker 228  
Rückkopplungsvierpole 228 ff.  
Rücktransformation der Laplacetrans-  
formation 49  
rückwirkungsfreie Vierpole 223 ff.

**S**

Sätze der Laplacetransformation 56 ff.  
Schaltgesetze 5  
Schaltvorgang 1  
Scheitelfaktor 146  
Schwingfall 22, 28 ff., 74 ff.  
Simpsonregel 118  
Spaltfunktion 158  
Spannungsrückwirkung 173, 195, 196  
Spannungsteilerregel 54  
Spannungsübersetzung 173, 192, 196  
Spektrum eines Rechteckimpulses 158  
spezielle Vierpole 218 ff.  
Sprungantwort 13, 78 ff., 94  
Sprungfunktion 31  
Sprungstellenverfahren 116, 124 ff., 136 ff.  
Stabile Vierpole 172  
Stoßfaktor 18  
stoßkurzschlußstrom 18  
stromgegeggekoppelte Emitterschaltung 228  
Stromrückwirkung 173, 195, 196  
Stromübersetzung 173, 192, 196

Stützstellen von Funktionen 117  
Symbolische Methode 50  
symmetrische Vierpole 221  
Symmetrische X-Schaltung 188, 261  
Symmetrien von periodischen Funktionen  
104 ff.

**T**

T-Ersatzschaltung  
– eines Übertragers 184  
– von Vierpolen 176  
Teilsommen einer Fourierreihe 96  
Transistorstufe  
– in Parallel-Parallel-Schaltung 232  
– in Reihen-Reihen-Schaltung 235  
Trapezregel 118  
T-Schaltung 187

**U**

Übergangsfunktion 78 ff.  
– von RC-Schaltungen 13, 80 ff., 94  
Übertragungsfunktion 54, 78 ff., 165  
Übertragungsmaß  
– passiver Vierpole 256  
– symmetrischer passiver Vierpole 257  
Übertragungs-Leistungsverstärkung 216  
Übertragungsleitwert 173, 191, 194, 196  
Übertragungsvierpol 171  
Übertragungswiderstand 173, 191, 195, 196  
U-Ersatzschaltung  
– mit einer Spannungsquelle und einer  
Stromquelle 177, 178  
– mit zwei Spannungsstellen 176  
– mit zwei Stromquellen 175  
umkehrbare Vierpole 218 ff.  
Umpoler 188  
Umpoler-Zusammenschaltungen 248  
Umrechnung der Vierpolparameter 180, 181  
– von Dreipolen 248  
Umrechnungsformeln für Transistorparameter  
249, 251 ff.  
ungerade Funktionen 105

**V**

Variation der Konstanten 23  
verfügbare Leistung 205  
verfügbare Leistungsverstärkung 217  
Verschiebungssätze der Laplacetransformation  
58 ff.  
Verzerrungsfaktor 144  
Vierpolgleichungen und Vierpolparameter 174  
– in Ketten-Form 179  
– in Leitwertform 175  
– in Parallel-Reihen-Form 178  
– in Reihen-Parallel-Form 177  
– in Widerstandsform 176  
Vierpolparameter  
– der Kettenschaltung 244



- der Parallel-Parallel-Schaltung 231
  - der Parallel-Reihen-Schaltung 242
  - der Reihen-Parallel-Schaltung 236
  - der Reihen-Reihen-Schaltung 233
  - passiver Vierpole 186 ff.
  - Vierpolschaltung
    - in Rückwärtsbetrieb 173
    - in Vorwärtsbetrieb 172
  - Vierpoltheorie 171 ff.
  - Vierpolzusammenschaltungen 226 ff.
    - eines zweistufigen Verstärkers 227 ff., 235
  - vollständige Leitwertmatrix eines Dreipols 249 ff.
  - Vorzeichen der Vierpolparameter des Rückkopplungsvierpols 234, 237 ff.
- W**
- Wechselspannung, Laplacetransformation 33
  - Wellendämpfungsmaß 256
  - Wellenparameter passiver Vierpole 253 ff.
  - Wellenphasenmaß 256
- Wellenwiderstand
    - passiver Vierpole 253 ff.
    - symmetrischer Vierpole 254 ff.
  - Widerstandsform der Vierpolgleichungen 176
  - Winkelmaß 256
  - Wirkleistung bei nichtsinusförmigen Strömen und Spannungen 141 ff.
- Y**
- Y-Parameter von Vierpolen 175
- Z**
- Zeitfunktion der Frequenzkurve 157
    - der Frequenzfunktion  $F(j\omega) = 1$  161
    - der rechteckigen Frequenzfunktion 160
  - $\underline{Z}$ -Parameter von Vierpolen 176
  - Zipperer-Tafel 121 ff.
  - Zusammenhang zwischen Laplace- und Fouriertransformation 162 ff.
  - Zusammenschaltung von Vierpolen 174, 225 ff.
  - zweistufiger Transistorverstärker 227, 235, 247, 263