Lösungshinweise zu den Übungen

Abschnitt 1.1

1. Jedes lineare $f \in \boldsymbol{B}_n$ hat eine *eindeutige* Darstellung der angegebenen Art. Daher ist 2^{n+1} (= Anzahl der $(n+1)$-gliedrigen Folgen aus $0, 1$) die gesuchte Anzahl.

2. Induktion über α zeigt: Ist ξ echter Anfang von α oder α echter Anfang von ξ, so ist ξ keine Formel.

3. Sei etwa $(\alpha \circ \beta) = (\alpha' \circ' \beta')$. Wäre $\alpha \neq \alpha'$, so wäre α echter Anfang von α' oder umgekehrt. Das ist unmöglich nach Übung 2.

4. Für $\xi \notin \mathcal{F}$ genügt $\mathcal{F} \setminus \{\neg\xi\}$ den Bedingungen der Formeldefinition. Also $\neg\xi \notin \mathcal{F}$.

Abschnitt 1.2

2. $\neg p \equiv p + 1,\ 1 \equiv p + \neg p,\ p \leftrightarrow q \equiv p + \neg q$ und $p + q \equiv p \leftrightarrow \neg q$.

3. Induktion über α zeigt $\alpha^{(n)}$ ist monoton, weil mit $f, g \in B$ auch $\vec{x} \mapsto f\vec{x} \wedge g\vec{x}$ und $\vec{x} \mapsto f\vec{x} \vee g\vec{x}$ mononton sind. Induktionsschritt über die Stellenzahl von f zeigt, mit $f \in \boldsymbol{B}_{n+1}$ sind auch $f_k \colon \vec{x} \to f(\vec{x}, k)$ monoton, $k = 0, 1$. Werden f_0, f_1 durch α_0 bzw. α_1 repräsentiert, so f durch die Formel $\alpha_0 \vee \alpha_1 \wedge p_{n+1}$.

4. Sei f nicht durch eine Formel in $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$ repräsentierbar. Dann ist f nicht monoton. Passende Einsetzung von Konstanten in f liefert die Negation.

Abschnitt 1.3

1. MP ergibt leicht $p \to q \to r,\ p \to q,\ p \vDash r$. Durch 3-malige Anwendung von (D) folgt hieraus $\vDash (p \to q \to r) \to (p \to q) \to (p \to r)$.

4. Sei $X^{\vdash} \vdash \alpha$, also $X \vdash X^{\vdash} \vdash \alpha$. Das ergibt $X \vdash \alpha$ nach (T).

5. $\vdash_0 \subseteq \vdash$: Sei $X \vdash_0 \alpha$, also $X_0 \vdash \alpha$ für ein endliches $X_0 \subseteq X$. Dann auch $X \vdash \alpha$.

Abschnitt 1.4

1. $X \cup \{\neg\alpha \mid \alpha \in Y\} \vdash \bot \Rightarrow X \cup \{\neg\alpha_0, \ldots, \neg\alpha_n\} \vdash \bot$, für gewisse $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in Y$. Das ergibt $X \vdash (\bigwedge_{i \leqslant n} \neg\alpha_i) \to \bot \equiv \bigvee_{i \leqslant n} a_i$.

2. Lemma 4.4 wie folgt ergänzen: $X \vdash \alpha \vee \beta \ \Leftrightarrow\ X \vdash \alpha$ oder $X \vdash \beta$.

4. Sei $X \nvdash \varphi$, $X \vdash' \varphi$ und $Y \supseteq X \cup \{\neg\varphi\}$ maximal konsistent in $\vdash$, sowie σ definiert durch $p^\sigma = \top$ für $p \in Y$ und $p^\sigma = \bot$ sonst. Simultane Induktion über $\alpha, \neg\alpha$ zeigt $\alpha \in Y \Rightarrow\ \vdash \alpha^\sigma$ und $\alpha \notin Y \Rightarrow\ \vdash \neg\alpha^\sigma$. Folglich $\vdash \neg\varphi^\sigma$. Daher $\vdash' \neg\varphi^\sigma$ und so $X^\sigma \vdash' \neg\varphi^\sigma$. Wegen $X \vdash' \varphi$ ist auch $X^\sigma \vdash' \varphi^\sigma$. Daher $\vdash' \alpha$ für alle α nach $(\neg 1)$.

5. Unter allen Konsequenzen mit den Eigenschaften $(\wedge 1)$–$(\neg 2)$ gibt es eine kleinste, $\vdash$, und $\vdash$ ist finitär (Übung 5 in **1.3**). Weil $\vdash$ maximal ist, kann nur $\vdash\, = \,\vDash$ gelten.

Abschnitt 1.5

1. Man muss den Formeln unter Beispiel 1 nur die Formeln $\{p_{ab} \mid a \leqslant_0 b\}$ hinzufügen.

2. Sei U trivial, $K \subseteq I$ koendlich, $K \notin U$, also $E = I \setminus K \in U$. Für jede Zerlegung $E = E_0 \cup E_1$ ist $E_0 \in U$ oder $E_1 \in U$. So erschließe man $\{i_0\} \in U$ für ein $i_0 \in I$.

Abschnitt 1.6

2. Kalküle mit MP als einziger Regel und A1,A2 unter den Axiomen erfüllen das Deduktionstheorem (Beweis wie Lemma 6.3). Für maximal konsistentes X beweist man $X \vdash \alpha \to \beta \ \Leftrightarrow\$ wenn $X \vdash \alpha$ so $X \vdash \beta$.

3. Man wende das Lemma von Zorn an auf $H = \{Y \supseteq X \mid Y \nvdash \alpha\}$.

4. Sei $X \nvdash \alpha_0$ und X o.B.d.A. α_0-maximal (Übung 3). Definiert man $w \vDash X$ durch $w \vDash p \ \Leftrightarrow\ p \in X$, so gilt: $X \vdash \alpha \to \beta \ \Leftrightarrow (X \vdash \alpha \Rightarrow X \vdash \beta)$.

Abschnitt 2.1

1. Es gibt 10 wesentlich 2-stellige Boolesche Funktionen f. Die Menge der entsprechenden 10 Gruppoide $(\{0,1\}, f)$ zerfällt in 5 Paare isomorpher Algebren.

4. Man ordne dem Element $a \in 2^I$ die Teilmenge $I_a = \{i \in I \mid a_i = 1\} \subseteq I$ zu.

Abschnitt 2.2

2. Induktion über t. Klar für Primterme oder falls ζ erster Buchstabe von t ist. Sonst ist $t = ft_1 \cdots t_n$ und ζ kommt in der Zeichenfolge $t_1 \cdots t_n$ vor, also in einem t_i und ist erster Buchstabe eines Subterms in t_i gemäß Induktionsannahme.

3. (a): $\mathcal{E}$ gilt für Primterme. Annahme: $\mathcal{E}$ gilt nicht für $f\vec{t}$. Dann ist entweder $f\vec{t} = gs_1 \dots s_m\xi$ oder $f\vec{t}\xi = gs_1 \dots s_m$ für einen Term $gs_1 \dots s_m$ und eine Zeichenfolge $\xi \neq \emptyset$. In jedem Falle $g = f$ und damit $m = n$. Die Induktionsannahme $\mathcal{E}t_1, \dots, \mathcal{E}t_n$ ergibt schrittweise $t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n$. Damit ist $\xi = \emptyset$ im Widerspruch zu $\xi \neq \emptyset$. (b) folgt leicht aus (a).

Abschnitt 2.3

1. $\forall x\alpha, \forall x(\alpha \to \beta) \vDash \alpha \to \beta, \alpha \vDash \beta$. Sodann hintere Generalisierung.

2. Sei $\mathcal{M}^{cd}_{xy} \vDash \varphi \wedge \varphi \frac{y}{x}$ mit $c \neq d$. Dann gilt $\mathcal{M}^{a}_{x} \vDash \exists y(\varphi \frac{y}{x} \wedge x \neq y)$ für alle $a \in A$.

3. Nach Satz 3.1 und Satz 3.5 ist $\mathcal{A} \vDash \alpha(x)\,[a] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A}' \vDash \alpha(x)\,[a] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A}' \vDash \alpha \frac{\boldsymbol{a}}{x}$.

4. (b): $\exists_n \wedge \neg\exists_m$ ist für $n \leqslant m$ äquivalent zu $\bigvee_{k=n}^{m} \exists_{=k}$, für $n > m$ zu $\exists_{=0}$ $(\equiv \bot)$.

Abschnitt 2.4

1. $\alpha \equiv \beta \;\Rightarrow\; \vDash \forall\vec{x}\,(\alpha \leftrightarrow \beta) \;\Rightarrow\; \vDash (\alpha \leftrightarrow \beta)\frac{\vec{t}}{\vec{x}} \;\big(= \alpha\frac{\vec{t}}{\vec{x}} \leftrightarrow \beta\frac{\vec{t}}{\vec{x}}\big)$.

2. $\neg\forall x(x \lhd y \to \alpha) \equiv \exists x \neg(x \lhd y \to \alpha) \equiv \exists x(x \lhd y \wedge \neg\alpha)$ (Ersetzungstheorem).

3. O.B.d.A. ist $\alpha \equiv \forall\vec{y}\alpha'(\vec{x},\vec{y})$ und $\beta \equiv \forall\vec{z}\beta'(\vec{x},\vec{z})$ mit disjunkten Tupeln $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Abschnitt 2.5

2. $\Rightarrow$: $X \vDash \varphi \to \beta \Leftrightarrow X, \varphi \vDash \beta$ und (e) Seite 62. $\Leftarrow$: (10) in **2.4**.

3. Beweise zuerst $T_\alpha := \{\beta \in \mathcal{L}^0 \mid T, \alpha \vDash \beta\}$ ist eine Theorie und dann $T_\alpha = T + \alpha$.

Abschnitt 2.6

1. Man folge dem Beweis von Satz 6.1 (beachte $f\vec{t} = y \equiv_{T_f} \delta_f(\vec{t}, y)$). Für den „nur dann“-Teil beachte man $(y = f\vec{x} \leftrightarrow \delta(\vec{x}, y))^\forall \vDash \forall\vec{x}\,\exists! y\delta(\vec{x}, y)$.

2. In $(\mathbb{N}, 0, 1, \mathtt{S}, +, \cdot)$ gelten $x = 0 \;\leftrightarrow\; x + x = x$, $\;x = 1 \;\leftrightarrow\; x \neq 0 \wedge x \cdot x = x$, sowie $y = \mathtt{S}x \leftrightarrow y = x + 1 \;\big(\equiv \exists z(y = x + z \wedge z + z \neq z \wedge z \cdot z = z)\big)$.

3. Sei $xy = xz = e$ ($\circ$, $\vDash$ werden nicht geschrieben) und ein y' mit $yy' = e$ gewählt. Dann ist auch $yx = (yx)(yy') = y(xy)y' = yey' = e$. Analog folgt $zx = e$. Also $y = z$, denn $y = y(xz) = (yx)z = ez = (zx)z = z(xz) = ze = z$.

4. Wäre $<$ definierbar, wäre $<$ unter jedem Automorphismus von $(\mathbb{Z}, 0, +)$ invariant. Das ist nicht der Fall für den Automorphismus $n \mapsto -n$ (Methode von Padoa).

Abschnitt 3.1

1. Sei $X \vdash \alpha\frac{t}{x}$. Dann ist $X, \forall x\neg\alpha \vdash \alpha\frac{t}{x}, \neg\alpha\frac{t}{x}$. Daher $X, \forall x\neg\alpha \vdash \exists x\alpha$. Gewiß ist auch $X, \neg\forall x\neg\alpha \vdash \exists x\alpha$. Also $X \vdash \exists x\alpha$ nach $(\neg 2)$.

2. Sei $\alpha' := \alpha\frac{y}{x}$, $u \notin \operatorname{var}\alpha$, $u \neq y$. Dann ist $\forall x\alpha \vdash \alpha'\frac{u}{y}$ $\;(= \alpha\frac{u}{x})$ nach $(\forall 1)$. Also $\forall x\alpha \vdash \forall y\alpha'$ $(= \forall y\alpha\frac{y}{x})$ nach $(\forall 2)$.

Abschnitt 3.2

1. Modellexistenzssatz und Übung 4 in **3.1**.

2. Es gilt $t^{\mathfrak{T}} = t$ (Induktion über t). Danach beweise man $(*)$ $\mathfrak{T} \vDash \forall\vec{x}\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{T} \vDash \varphi\frac{\vec{t}}{\vec{x}}$ für alle $\vec{t} \in \mathcal{T}^n$ (φ offen). Es gilt $\mathcal{M} \vDash \tilde{X} := \{\varphi\frac{\vec{t}}{\vec{x}} \mid \forall\vec{x}\varphi \in X,\ \vec{t} \in \mathcal{T}^n\}$. Induktion über $\wedge, \neg$ zeigt $\mathcal{M} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{T} \vDash \varphi$. Also $\mathfrak{T} \vDash \tilde{X}$ und so $\mathfrak{T} \vDash X$ nach $(*)$.

Abschnitt 3.3

2. $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall z[(x+(y+z)) = (x+y)+z)]$ folgt durch Induktion über z. Zum Beweis von $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall x\, x+y = y+x$ benötigt man $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall y\, 0+y = y$ und $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall y\, x+\mathsf{S}y = \mathsf{S}x+y$ (Übung 1). Induktion über die jeweils quantifizierte Variable.

3. (a): Sei $\varphi := (\forall y{<}x)\alpha\frac{y}{x}$ und $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall x(\varphi \to \alpha)$. Um $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall x\alpha$ zu zeigen, genügt es $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall x\varphi$ induktiv über x zu beweisen, weil $\vdash_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{\mathsf{S}x}{x} \to \alpha$. Trivial gilt $\vdash_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{0}{x}$. Der Induktionsschritt $\varphi \vdash_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{\mathsf{S}x}{x}$ folgt wegen $y{<}\mathsf{S}x \equiv_{\mathsf{PA}} y{\leqslant}x$ aus $\vdash_{\mathsf{PA}} \varphi \to \alpha$. (b): Folgt aus (a) durch Kontraposition, also durch Anwendung von IS auf $\neg\varphi$. (c): Für $\varphi := (\forall x{<}v)\exists y\gamma \to \exists z(\forall x{<}v)(\exists y{<}z)\gamma$ gilt $\vdash_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{0}{v}$ und man beweist unschwer $\varphi \vdash_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{\mathsf{S}v}{v}$. Dies liefert die Behauptung gemäß IS.

Abschnitt 3.4

1. $X = T \cup \{\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{v}_j \mid i \neq j\}$ ist erfüllbar, weil jede endliche Teilmenge dies ist.

2. $X = Th\mathcal{A} \cup \{\boldsymbol{v}_{n+1} < \boldsymbol{v}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat ein Modell mit unendlich absteigender Kette.

4. Sei $u \in \mathit{Var}$. Folgende Formelmenge (mit Symbolen $\boldsymbol{a}$ für die $a \in V$) ist konsistent:
$$Th(V, \in^V) \cup \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{b} \mid a, b \in V,\ a \in^V b\} \cup \{\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{b} \mid a, b \in V,\ a \notin^V b\} \cup \{\boldsymbol{a} \in u \mid a \in V\}.$$

Abschnitt 3.5

1. $\beta \in T' \ \Leftrightarrow\ \alpha \to \beta \in T$. Wesentlich ist, dass T' zur selben Sprache gehört wie T.

2. (ii)$\Rightarrow$(iii): Ist $T + \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ nichtendliche Erweiterung, kann $\bigwedge_{i \leqslant n} \alpha_i \nvdash_T \alpha_{n+1}$ angenommen werden. Sei T_n Vervollständigung von $T + \bigwedge_{i \leqslant n} \alpha_i + \neg\alpha_{n+1}$. Dann ist $T_m \neq T_n$. (iii)$\Rightarrow$(ii): Annahme $T + \alpha_0, T + \alpha_1, \ldots$ sei eine unendliche Folge paarweise verschiedener Vervollständigungen von T. Dann ist $T + \{\neg\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche Erweiterung von T, weil $T + \bigwedge_{\nu \leqslant n} \neg\alpha_\nu \nvDash \neg\alpha_{n+1}$. (ii)$\Rightarrow$(i): Man zeigt leicht, jede konsistente Theorie ist identisch mit dem Durchschnitt ihrer Vervollständigungen. Das gilt speziell für die Erweiterungen von T.

3. $\alpha \in T \Leftrightarrow\ \alpha \in T_i$ für alle $i \leqslant n$; dabei seien $T_0, \ldots, T_n$ alle Vervollständigungen von T. Diese sind sämtlich axiomatisierbar, also entscheidbar.

Abschnitt 3.6

1. Es ist $x = y \nvDash \forall x\, x = y$. Wegen $\vdash \subseteq \vDash$ gilt daher auch nicht $x = y \vdash \forall x\, x = y$.

2. (a): Seien $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ effektive Aufzählungen aller Aussagen bzw. aller endlichen T-Modelle. Man notiere im n-ten Schritt alle φ_i für $i \leqslant n$ mit $\mathcal{A}_n \vDash \varphi_i$.
(b): Seien $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ effektive Aufzählungen der in T beweisbaren bzw. widerlegbaren Aussagen. Jedes $\alpha \in \mathcal{L}^0$ kommt in genau einer dieser Folgen vor.

3. Auch Bedingung (ii) aus Übung 2 ist erfüllt, weil nur endliche viele Axiome in einer endlichen Struktur auf ihre Gültigkeit getestet werden müssen.

Abschnitt 3.7

1. Für **H**: Sei h Homomorphismus: $ht^{\mathcal{A},w} = t^{\mathcal{B},hw}$ mit $x^{hw} = hx^w$. Für **S** siehe (3) in **2.3**. Für **P**: Sei $\mathcal{B} = \prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Dann ist $t^{\mathcal{B},w} = (t^{\mathcal{A}_i,w_i})_{i\in I}$ mit $x^w = (x^{w_i})_{i\in I}$.

2. In $\mathcal{L}^1_Q$ ist $\alpha_{\text{üa}} := \mho x\, x = x$ eine Aussage mit $\mathcal{A} \vDash \alpha_{\text{üa}} \;\Leftrightarrow\;$ *A ist überabzählbar.* In $\mathcal{L}_{II}$ formalisiere man die Aussage 'es gibt eine lückenlose Ordnung ohne größtes Element'. Eine solche ist immer überabzählbar.

3. Sei α die Konjunktion aller Axiome für geordnete Körper unter Einschluss des in $\mathcal{L}_{II}$ leicht formulierbaren Stetigkeitsaxioms Seite 86. Diese legt den Körper der reellen Zahlen bis auf Isomorphie eindeutig fest. Sei ferner β die in $\mathcal{L}_{II}$ ebenfalls leicht formulierbare Aussage 'Jede überabzählbare Teilmenge des Trägers $\mathbb{R}$ ist zu $\mathbb{R}$ gleichmächtig'. Es gibt eine $\gamma := \alpha \wedge \beta$ erfüllende $\mathcal{L}_{II}$-Struktur genau dann, wenn CH gilt. Andernfalls ist $\neg\gamma$ eine Tautologie.

Abschnitt 4.1

1. Sei $\mathcal{B} = \prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Es genügt, $(\star)$ $\mathcal{A}_i \vDash \alpha\ [w_i] \Leftrightarrow \beta \vDash \alpha\ [w]$ mit $x^w = (x^{w_i})_{i\in I}$ induktiv für Basis-Hornformeln zu beweisen. Beachte dabei $t^{\mathcal{B},w} = (t^{\mathcal{A}_i,w_i})_{i\in I}$. $(\star)$ ergibt leicht die Induktionsschritte über $\wedge, \forall, \exists$.

3. Eine Menge positiver Hornformeln hat stets ein 1-elementiges Modell.

Abschnitt 4.2

1. Für $w_1 \vDash p_1, p_3, \neg p_2$ und $w_2 \vDash p_2, p_3, \neg p_1$ ist $w_1 \vDash \mathcal{P}$ und $w_2 \vDash \mathcal{P}$, aber es gibt keine Belegung $w \leqslant w_1, w_2$ mit $w \vDash \mathcal{P}$.

2. Für beliebiges $w \vDash \mathcal{P}$ folgt $w \vDash p_{m,n,m+n}$ induktiv über n, also $w_{\mathcal{P}} \leqslant w$.

3. (a) Resolutionssatz. (b) $w_{\mathcal{P}} \vDash \neg p_{n,m,k}$ für $k \neq n + m$.

Abschnitt 4.3

2. $\Rightarrow$: Annahme $x_i \in var\, t_j$. Dann $x_i^\sigma = t_j \neq t_j^\sigma = x_i^{\sigma^2}$.

3. Sei ω Unifikator von $K_0 \cup K_1$, also $K_0^\omega = K_1^\omega$. Sei $x^{\omega'} = x^{\rho\omega}$ für $x \in var\, K_0$ und $x^{\omega'} = x^\omega$ sonst. Dann ist $K_0^{\rho\omega'} = K_0^{\rho^2\omega} = K_0^\omega$ (beachte $\rho^2 = \iota$), sowie $K_1^{\omega'} = K^\omega$.

Abschnitt 4.4

1. Seien K_0, K_1 zerlegt wie in der Definition von UR und sei ρ ein Separator von K_0, K_1, sowie ω' definiert wie im Hinweis zu Übung 3 in **4.3**.

2. Man vereinige $\mathcal{P}_g$ und $\mathcal{P}_h$ und füge dem Resultat noch folgende Klauseln hinzu: $r_f(\vec{x}, 0, u) :- r_g(\vec{x}, u)$ und $r_f(\vec{x}, Sy, u) :- r_f(\vec{x}, y, v), r_h(\vec{x}, y, v, u)$.

3. Man füge den Programmen noch $r_f\vec{x}u :- r_{g_1}\vec{x}y_1, \dots, r_{g_m}\vec{x}y_m, r_h\vec{y}u$ hinzu.

Abschnitt 5.1

3. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b, c$. Die lineare Funktion $x \mapsto \frac{a-c}{a-b} \cdot x + \frac{c-b}{a-b} \cdot a$ vermittelt einen Automorphismus des (reellen) Intervalls $[a, b]$ auf das Intervall $[a, c]$.

4. O.B.d.A. sei $A \cap B = \emptyset$. Es genügt zu zeigen $D_{el}\mathcal{A} \cup D_{el}\mathcal{B}$ ist konsistent.

5. (a): $\{t^\mathcal{A} \mid t \in \mathcal{T}_E\}$ ist abgeschlossen gegenüber allen $f^\mathcal{A}$, ist also identisch mit dem Träger von $\mathcal{A}$. (b): $\mathcal{B} \vDash T + D_E\mathcal{A}$ lässt sich zu einem $\mathcal{B}' \vDash T + D\mathcal{A}$ expandieren: Für $a \in A \setminus E$ mit $a = t^\mathcal{A}$ und $t \in \mathcal{T}_E$ gemäß (a) sei $a^{\mathcal{B}'} = t^\mathcal{B}$ $(= t^\mathcal{A})$.

Abschnitt 5.2

2. IS auf $\alpha(x_n) = \forall x_0 \cdots x_{n-1}(\bigwedge_{i<n} \mathsf{S}x_i = x_{i+1} \to x_n \neq x_0)$ anwenden.

3. Sei $a \in G \vDash T$ und $\frac{a}{n}$ das Element mit $n\,\frac{a}{n} = a$, sowie $\frac{m}{n}\colon a \mapsto m\,\frac{a}{n}$ für $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Dadurch wird G zur Vektorgruppe eines $\mathbb{Q}$-Vektorraums.

4. (b): Behauptung zuerst für beliebige Konjunktion aus den α_i und ihren Negationen beweisen. Beachte $\alpha_i \wedge \alpha_j \equiv_T \bot$ für $i \neq j$ und $\vdash_T \bigvee_{i \leqslant m} \alpha_i$.

Abschnitt 5.3

1. $(\mathcal{A}, \vec{a}) \sim_k (\mathcal{B}, \vec{b}) \;\Leftrightarrow\; a_i \mapsto b_i$ $(i = 1, \dots, n)$ ist partieller Isomorphismus.

2. In Runde 1 spiele II beliebig, danach gemäß den Gewinnstrategien für Modelle von SO_{01} bzw. SO_{10} in den beiden Zerlegungshälften.

3. Falls I mit $a \in A$ beginnt und rechts und links von a mindestens 2^{n-1} Elemente verbleiben, wähle II entsprechend. Sonst mit Elementen derselben Distanz vom linken bzw. rechten Randelement antworten.

4. Fallunterscheidung ob $\mathcal{A} \vDash \mathsf{SO}$ unendlich oder endlich ist. Im ersten Falle folgt die Behauptung aus der Vollständigkeit aller Theorien $\mathsf{SO}_{ij} \cup \{\exists_i \mid i > 0\}$.

Abschnitt 5.4

1. Jeder Halbverband $(A, \cap)$ ist durch $a \mapsto \{x \in A \mid x \leqslant a\}$ in den Mengenhalbverband $(\mathfrak{P}A, \cap)$ einbettbar. Dabei sei $\leqslant$ die Halbordnung von $(A, \cap)$, Seite 39.

3. Sei A geordnet. Ersetzt man jedes $a \in A$ durch ein Exemplar von $(\mathbb{Z}, <)$ bzw. von $(\mathbb{Q}, <)$, so entsteht eine diskrete Ordnung bzw. eine dichte Ordnung $B \supseteq \mathcal{A}$.

4. Sei $\mathcal{A}_0 \vDash T_0$. Wähle $\mathcal{A}_1$ mit $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \vDash T_1$, $\mathcal{A}_2$ mit $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \vDash T_0$ usw. Das ergibt eine Kette $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots$ mit $\mathcal{A}_{2i} \vDash T_0$, $\mathcal{A}_{2i+1} \vDash T_1$. Dann ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{2i} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{2i+1} \vDash T$. Also sind T, T_i modellverträglich.

5. Die Vereinigung S einer Kette von mit T modellverträglichen induktiven Theorien ist wieder induktiv. S hat denselben $\forall$-Teil wie T, ist mit T also auch modellverträglich. Also gibt es nach dem Zornschen Lemma eine maximale, und nach Übung 4 damit auch eine größte Theorie dieser Art.

Abschnitt 5.5

1. Für $i \neq 0$ oder $j \neq 0$ besitzt DO_{ij} Modelle $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \not\preccurlyeq \mathcal{B}$.

2. (a) Lindströms Kriterium. T ist $\aleph_1$-kategorisch, denn ein T-Modell kann als $\mathbb{Q}$-Vektorraum verstanden werden. (b) Jedes T_0-Modell G ist in ein T-Modell H einbettbar; man gewinnt ein solches H, indem auf der Menge aller Paare $\frac{a}{n}$ mit $a \in G$ und $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ eine geeignete Äquivalenzrelation definiert wird.

3. Eindeutigkeit folgt ähnlich wie die der Modellvervollständigung.

4. Der algebraische Abschluß $\overline{\mathcal{F}_p}$ des Primkörpers $\mathcal{F}_p$ der Charakteristik p hat die Darstellung $\overline{\mathcal{F}_p} = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathcal{F}_{p^n}$, wobei $\mathcal{F}_{p^n}$ den endlichen Körper aus p^n Elementen bezeichnet. Ferner gilt eine in allen a.a. Körpern mit Primzahlcharakteristik gültige Aussage bereits in allen a.a. Körpern.

Abschnitt 5.6

1. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vDash \mathsf{ZG}_0$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Dann auch $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$, denn das Prädikat $m|$ hat in ZG eine $\forall$- und eine $\exists$-Definition. Also $\mathcal{A}' \subseteq_{ec} \mathcal{B}'$, mithin $\mathcal{A} \subseteq_{ec} \mathcal{B}$.

2. Induktiv über quantorenfreies $\varphi = \varphi(x)$ ergibt sich: für jedes $\mathcal{A} \vDash \mathsf{RCF}^\circ$ ist $\varphi^{\mathcal{A}}$ oder $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}$ endlich, was für $\alpha(x)$ nicht der Fall ist.

4. Die Gruppe $2\mathbb{Z}$ ist Substruktur der geordneten Gruppe $\mathbb{Z}$, aber nicht $2\mathbb{Z} \preccurlyeq \mathbb{Z}$.

Abschnitt 5.7

1. Sei $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\} = \{\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_n\}$ und $I_\nu = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_\nu\}$, also $I = I_0 \cup \dots \cup I_n$. Damit gehört genau eines der I_ν zu F (Induktion über n).

3. Behauptung indirekt beweisen. Seien I, J_α, F definiert wie in Korollar **7.3**, sowie $\mathcal{A}_i \in \boldsymbol{K}$ und $w_i\colon AV \to A_i$ derart, dass $w_i\alpha \in D^{\mathcal{A}_i}$ für $\alpha \in i$, $w_i\varphi \notin D^{\mathcal{A}_i}$, $\mathcal{C} := \prod_{i\in I}^F \mathcal{A}_i$ $(\in \boldsymbol{K})$ und $w = (w_i)_{i\in I}$. Dann ist $wX \subseteq D^{\mathcal{C}}$, also $X \nvDash_{\mathcal{C}} \varphi$.

4. O.B.d.A. ist $\mathcal{A} = \mathit{2}$ und $\mathit{2} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathit{2}^I$ für gewisses I nach dem Stoneschen Repräsentationssatz (siehe **2.1**). $\mathit{2} \vDash \alpha \Rightarrow \mathit{2}^I \vDash \alpha \Rightarrow \mathcal{B} \vDash \alpha$ nach Satz 7.2.

Abschnitt 6.1

1. $\Rightarrow$: $\chi_{graph\, f} = \delta|f\vec{a} - b|$. $\Leftarrow$: $f\vec{a} = \mu b[f\vec{a} = b]$. Ferner: $f\vec{a} = \mu b \leqslant h\vec{a}[f\vec{a} = b]$.

3. Sei $s_m := \Sigma_{i\leqslant m}\, i$ und damit $\wp(a,b) = s_{a+b} + a$. *Injektivität*: Sei $\wp(a,b) = \wp(a',b')$. Angenommen $a{+}b \neq a'{+}b'$ und o.B.d.A. $a{+}b < a'{+}b'$. Dann $\wp(a,b) < \wp(a,b){+}b{+}1$ $= s_{a+b} + a + b + 1 = s_{a+b+1} \leqslant s_{a'+b'} \leqslant \wp(a',b')$. Also $a + b = a' + b'$ und so $a = \wp(a,b) - s_{a+b} = \wp(a',b') - s_{a'+b'} = a'$, also auch $b = b'$. *Surjektivität*: Da $0 = \wp(0,0) \in ran\, \wp$, genügt zu zeigen $\wp(a,b) + 1 \in ran\, \wp$ für alle a, b. Im Falle $b = 0$ ist $\wp(a,0) + 1 = s_{a+0} + a + 1 = s_{a+1} = \wp(0, a+1)$. Für $b > 0$ ist $\wp(a+1, b-1) = s_{a+1+b-1} + a + 1 = s_{a+b} + a + 1 = \wp(a,b) + 1$. Dieser Beweis bestätigt auch die Korrektheit der Paarkodierungs-Figur.

4. $\Rightarrow$: Sei $M = \{b \in \mathbb{N} \mid \exists aRab\}$, R rekursiv, $c \in M$ fest gewählt. Sei $fn = b$, falls $(\exists a{\leqslant}n)\, n = \wp(a,b)\ \&\ Rab$, und $fn = c$ im anderen Falle. Dann gilt $M = ran\, f$. $\Leftarrow$: $M = \{b \in \mathbb{N} \mid (\exists a \in \mathbb{N}) fa = b\}$ und Übung 1.

Abschnitt 6.2

1. Es sei $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ eine rekursive Aufzählung von X. Nach Übung 2 in **6.1** ist dann $\{\beta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $\beta_n = \underbrace{\alpha_n \wedge \ldots \wedge \alpha_n}_{n}$ rekursiv und ein Axiomensystem für T.

3. Sei $\Phi_n = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ ein Beweis von $\varphi = \varphi_n$ in $T + \alpha$ und seien Beweise Φ'_k für $\alpha \to \varphi_k$ zu $\Phi_i = (\varphi_0, \dots, \varphi_i)$ für alle $i < n$ schon konstruiert. Man definiere einen Beweis Φ'_n für $\alpha \to \varphi$ durch p.r. Fallunterscheidung entsprechend dem Beweis von Lemma 1.6.3.

4. Zeige zuerst die Menge P der Primaussagen aus Tr_0 ist p.r. Dazu konstruiere eine p.r. Funktion f mit $f\dot{t} = t^{\mathcal{N}}$ falls $var\,t = \emptyset$. Schließlich beachte man
$$\alpha \in Tr_0 \Leftrightarrow \alpha \in P \vee (\exists\beta,\gamma<\alpha)[\alpha = \beta\wedge\gamma \ \&\ \beta,\gamma \in Tr_0 \vee \alpha = \neg\beta \ \&\ \beta \notin Tr_0].$$

Abschnitt 6.3

1. $\exists\vec{x}\alpha \equiv_{\mathcal{N}} \exists y(\exists x_1\leqslant y)\dots(\exists x_n\leqslant y)\alpha$ mit $y \notin var\,\alpha$. Für eine Belegung $\vec{a}$ von $\vec{x}$ belege y mit $\max\{a_1, \dots, a_n\}$. Analog ist $\forall\vec{x}\alpha \equiv_{\mathcal{N}} \forall y(\forall x_1\leqslant y)\dots(\forall x_n\leqslant y)\alpha$

2. $(\forall x<v)\exists y\alpha \equiv_{\mathsf{PA}} \exists z(\forall x<v)(\exists y<z)\alpha$ nach Übung 3(c) in **3.3**.

Abschnitt 6.4

1. $<$-Induktion über $s = a + b$. Richtig für $a = b = 1$ mit $x = 0$, $y = 1$. Sei $s > 2$. Dann ist $a \neq b$. Falls $a > b$ ist auch $a - b\perp b$. Da $(a - b) + b < s$, gibt es nach Induktionsannahme $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x(a-b)+1 = yb$. Also $xa+1 = y'b$ mit $y' = x+y$. Falls $a < b$ ist $a\perp b - a$ und man schließt analog.

2. (a): $p \nmid a \Rightarrow a\perp p \Rightarrow \exists xy\, xa + 1 = yp \Rightarrow \exists xy\, b = ybp - xab \Rightarrow p|b$. (b): führe $p|\,\mathrm{kgV}\{a_\nu|\,\nu\leqslant n\}$ und $(\forall\nu\leqslant n)p\nmid a_\nu$ zum Widerspruch. (c) folgt leicht aus (b).

4. (a): Beweise dies zuerst für x statt $\vec{x}$. (b): Zeige $\mathrm{sb}_x(\ulcorner\varphi\urcorner, x) = \ulcorner\varphi\urcorner$ für $x \notin frei\,\varphi$.

Abschnitt 6.5

3. Klar falls $T + \Delta$ inkonsistent ist. Andernfalls ist $T + \Delta$ nach **2.6** konservative Erweiterung von T und $\alpha \in T + \Delta \Leftrightarrow \alpha^{rd} \in T$. Da α^{rd} aus α effektiv hergestellt werden kann, ist mit T auch $T + \Delta$ entscheidbar.

4. $f \in \mathbf{F}_1$ mit $fa = (a)_{last}$ falls a einen Beweis in Q kodiert und $fa = (0=0)^{\cdot}$ sonst, ist p.r. und zählt Q rekursiv auf.

Abschnitt 6.6

1. Sei $T \supseteq T_1$ konsistent. $S = \{\alpha \in \mathcal{L}_0 \mid \alpha^{\mathsf{P}} \in T^{\Delta}\}$ ist eine Theorie, die T_0 konsistent erweitert und daher unentscheibar. Dasselbe gilt für T^{Δ} und T.

4. $n\in m \to n < m$, sowie $m \cup \{n\} = m + 2^n$ falls $n \notin m$. Für den Nachweis von Fin und $\mathsf{IS}_\in$ wird die $<$-Induktion benötigt.

Abschnitt 6.7

1. Hinweis zu Übung 1 in **6.3** führt auch im Induktionsschritt zum Ziel.

2. Δ_0 ist r.a. aber Δ_1 nicht (Bemerkung 2 in **6.3**). $\dot{\mathsf{Q}}$ ist Σ_1 aber nicht Δ_1.

3. Der Hinweis zu Übung 3 in **3.3** zeigt, dass <-Induktion in $I\Delta_0$ durch Standard-Induktion über x für $\varphi := (\forall y{<}x)\alpha\frac{y}{x}$ bewiesen wird. Da das Minimalschema durch Kontraposition folgt, benötigen wir hierfür Induktion für $\neg\varphi$. Beides sind Δ_0-Formeln, sofern α Δ_0 ist.

Abschnitt 7.1

1. Für rest wähle man $\varphi(a,b,r) := (\exists q{\leqslant}a)(a = b\cdot q + r \wedge r < b) \vee b = r = 0$ und beweise $\vdash_{\mathsf{PA}} \exists r\varphi(a,b,r)$ durch Induktion über a. Nutze die Axiome von N in **6.3**.

2. (a): <-Induktion. (b): Hinweis zu Übung 1 in **6.4** in PA formalisieren.

4. Für $\Box_{T+\alpha}\varphi \vdash_T \Box_T(\alpha \to \varphi)$ nutze man Übung 3 in **6.2**.

Abschnitt 7.2

1. $\vdash_T \Box\alpha \to \alpha \Rightarrow \vdash_{T'} \neg\Box\alpha \Rightarrow \vdash_{T'} \mathtt{Con}_{T'}$, weil nach (5) $\mathtt{Con}_{T'} \equiv_T \neg\Box\neg\neg\alpha \equiv_T \neg\Box\alpha$. Damit ist T' nach Satz 2.2 inkonsistent, also $\vdash_T \alpha$.

3. Angenommen $T^n = T + \neg\Box^n\bot$ und $\mathtt{Con}_{T^n} \equiv_T \neg\Box^{n+1}\bot$. Wegen $\Box^n\bot \vdash_T \Box^{n+1}\bot$ gilt $\neg\Box^{n+1}\bot \vdash_T \neg\Box^n\bot$. Somit $T^{n+1} = (T + \neg\Box^n\bot) + \neg\Box^{n+1}\bot = T + \neg\Box^{n+1}\bot$. Ferner ist nach (5) in **7.2** $\mathtt{Con}_{T^{n+1}} \equiv_T \neg\Box\neg(\neg\Box^{n+1}\bot) \equiv \neg\Box^{n+2}\bot$.

4. Für jede arithmetische Aussage α ist der Satz 'Wenn α in PA beweisbar ist, so gilt α' in ZFC beweisbar (PA ist interpretierbar in ZFC, siehe **6.6**). Formalisiert: $\vdash_{\mathsf{ZFC}} \Box_{\mathsf{PA}}\alpha \to \alpha$.

Abschnitt 7.4

1. Man beweist zuerst $\mathsf{G}_n = \{H \in \mathcal{F}_\Box \mid \vdash_{\mathsf{G}} \Box^{n+1}\bot \to H\}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \vdash_{\mathsf{G}_n} H \ \Leftrightarrow \vdash_{\mathsf{G}} \Box^{n+1}\bot \to H &\Leftrightarrow \vdash_{\mathsf{PA}} (\Box^{n+1}\bot \to H)^\imath \text{ für alle } \imath && \text{(Satz 4.2)} \\ &\Leftrightarrow \vdash_{\mathsf{PA}} \Box^{n+1}\bot \to H^\imath \text{ für alle } \imath && \text{(Eigenschaft von } \imath) \\ &\Leftrightarrow \vdash_{\mathsf{PA}_n} H^\imath \text{ für alle } \imath && (\mathsf{PA}_n = \mathsf{PA} + \Box^n\bot). \end{aligned}$$

2. Die erste Behauptung ergibt sich unschwer aus Übung 3 in **7.2**. Die Bestimmung der Beweislogik folgt aus Satz 4.3 und $\mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^n_\bot} \equiv_{\mathsf{PA}^n} \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^n}$ nach (6) in **7.2**.

4. $\nvdash_{\mathsf{GS}} \neg[\neg\Box(p \to q) \wedge \neg\Box(\neg p \to q) \wedge \neg\Box(p \to \neg q) \wedge \neg\Box(\neg p \to \neg q)]$ und Satz 4.4.

Literatur

[As] G. Asser, *Einführung in die mathematische Logik*, *Teil III*, Teubner 1981.

[Ba] J. Barwise (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland 1977.

[BD] A. Berarducci, P. D'Aquino, Δ_0*-complexity of the relation* $y = \prod_{i \leqslant n} F(i)$, Ann. Pure Appl. Logic 75 (1995), 49–56.

[Be1] L. D. Beklemishev, *On the classification of propositional provability logics*, Math. USSR – Izvestiya 35 (1990), 247–275.

[Be2] ______, *Iterated local reflection versus iterated consistency*, Ann. Pure Appl. Logic 75 (1995), 25–48.

[Be3] ______, *Bimodal logics for extensions of arithmetical theories*, J. Symb. Logic 61 (1996), 91–124.

[BF] J. Barwise, S. Feferman (Hrsg.), *Model-Theoretic Logics*, Springer 1985.

[BGG] E. Börger, E. Grädel, Y. Gurevich, *The Classical Decision Problem*, Springer 1997.

[Bi] G. Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 31 (1935), 433–454.

[BJ] G. Boolos, R. Jeffrey, *Computability and Logic*, 3. Aufl. Cambridge Univ. Press 1989.

[BM] J. Bell, M. Machover, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland 1977.

[Boo] G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge Univ. Press 1993.

[BP] P. Benacerraf, H. Putnam (Hrsg.), *Philosophy of Mathematics*, *Selected Readings*, (Englewood Cliffs NJ 1964) 2. Aufl. Cambridge Univ. Press 1997.

[Bu] S. R. Buss (Hrsg.), *Handbook of Proof Theory*, Elsevier 1998.

[Bue] S. Buechler, *Essential Stability Theory*, Springer 1996.

[Ca] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, (Berlin 1932) Springer 1980.

[Ch] A. Church, *A note on the Entscheidungsproblem*, J. Symb. Logic 1 (1936), 40–41.

[CK] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, (Amsterdam 1973) 3. Aufl. North-Holland 1990.

[CZ] A. Chagrov, M. Zakharyashev, *Modal Logic*, Clarendon Press 1997.

[Da] D. van Dalen, *Logic and Structure*, (Berlin 1980) 4. Aufl. Springer 2004.

[Dav] M. Davis (Hrsg.), *The Undecidable*, Raven Press 1965.

[De1] O. Deiser, *Einführung in die Mengenlehre*, (Berlin 2002) 2. Aufl. Springer 2004.

[De2] ———, *Axiomatische Mengenlehre*, voraussichtlich Springer 2009.

[Do] K. Doets, *From Logic to Logic Programming*, MIT Press 1994.

[EFT] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die Mathematische Logik*, (Darmstadt 1978) 5. Aufl. Spectrum Akad. Verlag 2007.

[En] H. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, (New York 1972) 2. Aufl. Academic Press 2001.

[Fe1] W. Felscher, *Berechenbarkeit*, Springer 1993.

[Fe2] ———, *Lectures on Mathematical Logic*, Vol. 1–3, Gordon & Breach 2000.

[Fef] S. Fefermann, *In the Light of Logic*, Oxford Univ. Press 1998.

[Fr] G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, (Halle 1879) G. Olms Verlag 1971, oder in [Hei, 1–82].

[Ge] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schließen*, Mathematische Zeitschrift 39 (1935), 176–210, 405–431.

[GH] H.-J. Goltz, H. Herre, *Grundlagen der logischen Programmierung*, Akademie-Verlag 1990.

[GJ] M. Garey, D. Johnson, *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman 1979.

[Gö1] K. Gödel, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik 37 (1930), 349–360, oder *Collected Works I*.

[Gö2] ———, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), 173–198.

[Gö3] ———, *Collected Works*, Vol. I–V, Oxford Univ. Press, Vol. I 1986, Vol. II 1990, Vol. III 1995, Vol. IV, V 2003.

[Gor] S. N. Goryachev, *On the interpretability of some extensions of arithmetic*, Mathematical Notes 40 (1986), 561–572.

[Gr] G. Grätzer, *Universal Algebra*, (New York 1968) 2. Aufl. Springer 1979.

[HA] D. Hilbert, W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, (Berlin 1928) 6. Aufl. Springer 1972.

[HB] D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Bd. I, II, (Berlin 1934, 1939) 2. Aufl. Springer, Band I 1968, Band II 1970.

[He] L. Henkin, *The completeness of the first-order functional calculus*, J. Symb. Logic 14 (1949), 159–166.

[Hei] J. van Heijenoort (Hrsg.), *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press 1967.

[Her] J. Herbrand, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III (1930), oder in [Hei, 525–581].

[HeR] B. Herrmann, W. Rautenberg, *Finite replacement and finite Hilbert-style axiomatizability*, Zeitsch. Math. Logik Grundlagen Math. 38 (1982), 327–344.

[Hi] P. Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic*, A. K. Peters 2005.

[Ho] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge Univ. Press 1993.

[HP] P. Hájek, P. Pudlák, *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Springer 1993.

[HR] H. Herre, W. Rautenberg, *Das Basistheorem und einige Anwendungen in der Modelltheorie*, Wiss. Z. Humboldt-Univ., Math. Nat. R. 19 (1970), 579–583.

[Id] P. Idziak, *A characterization of finitely decidable congruence modular varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 903–934.

[Ig] K. Ignatiev, *On strong provability predicates and the associated modal logics*, J. Symb. Logic 58 (1993), 249–290.

[Ih] T. Ihringer, *Allgemeine Algebra*, (Stuttgart 1988) 2. Aufl. Heldermann 2003.

[JK] R. Jensen, C. Karp, *Primitive recursive set functions*, in *Axiomatic Set Theory, Vol. I* (Hrsg. D. Scott), Proc. Symp. Pure Math. 13, I, AMS 1971, 143–167.

[Ka] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Clarendon Press 1991.

[Ke] H. J. Keisler, *Logic with the quantifier "there exist uncountably many"*, Annals of Mathematical Logic 1 (1970), 1–93.

[KK] G. Kreisel, J.-L. Krivine, *Modelltheorie*, Springer 1972.

[Kl1] S. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, (Amsterdam 1952) 2. Aufl. Wolters-Noordhoff 1988.

[Kl2] ———, *Mathematical Logic*, Wiley & Sons 1967.

[KR] I. KOREC, W. RAUTENBERG, *Model interpretability into trees and applications*, Arch. math. Logik 17 (1976), 97–104.

[Kr] M. KRACHT, *Tools and Techniques in Modal Logic*, Elsevier 1999.

[Kra] J. KRAJÍČEK, *Bounded Arithmetic, Propositional Logic, and Complexity Theory*, Cambridge Univ. Press 1995.

[Ku] K. KUNEN, *Set Theory*, *An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland 1980.

[Li] P. LINDSTRÖM, *On extensions of elementary logic*, Theoria 35 (1969), 1–11.

[Ll] J. W. LLOYD, *Foundations of Logic Programming*, (Berlin 1984) 2. Aufl. Springer 1987.

[Lö] M. LÖB, *Solution of a problem of Leon Henkin*, J. Symb. Logic 20 (1955), 115–118.

[Ma] A. I. MAL'CEV, *The Metamathematics of Algebraic Systems*, North-Holland 1971.

[Mal] J. MALITZ, *Introduction to Mathematical Logic*, Springer 1979.

[Mat] Y. MATIYASEVICH, *Hilbert's Tenth Problem*, MIT Press 1993.

[Me] E. MENDELSON, *Introduction to Mathematical Logic*, (Princeton 1964) 4. Aufl. Chapman & Hall 1997.

[ML] G. MÜLLER, W. LENSKI (Hrsg.), *The Ω-Bibliography of Mathematical Logic*, Springer 1987.

[Mo] D. MONK, *Mathematical Logic*, Springer 1976.

[MV] R. MCKENZIE, M. VALERIOTE, *The Structure of Decidable Locally Finite Varieties*, Progress in Mathematics 79, Birkhäuser 1989.

[Ob] A. OBERSCHELP, *Rekursionstheorie*, BI-Wiss.-Verlag 1993.

[Po] W. POHLERS, *Proof Theory*, *An Introduction*, Lecture Notes in Mathematics 1407, Springer 1989.

[Pr] A. PRESTEL, *Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie*, Vieweg 1986.

[Pre] M. Presburger, *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt*, Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves 1 (1930), 92–101.

[Ra1] W. Rautenberg, *Klassische und Nichtklassische Aussagenlogik*, Vieweg 1979.

[Ra2] ———, *A Concise Introduction to Mathematical Logic*, Springer 2006.

[Ra3] ———, *Messen und Zählen, Eine einfache Konstruktion der reellen Zahlen*, Heldermann 2007.

[Ri] M. Richter, *Logikkalküle*, Teubner 1978.

[Ro1] A. Robinson, *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, (Amsterdam 1963) 2. Aufl. North-Holland 1974.

[Ro2] ———, *Non-Standard Analysis*, (Amsterdam 1966) 3. Aufl. North-Holland 1974.

[Rob] J. Robinson, *A machine-oriented logic based on the resolution principle*, Journal of the ACM 12 (1965), 23–41.

[Rog] H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, 2. Aufl. MIT Press 1988.

[Ros] J. B. Rosser, *Extensions of some theorems of Gödel and Church*, J. Symb. Logic 1 (1936), 87–91.

[Rot] P. Rothmaler, *Einführung in die Modelltheorie*, Spectrum Akad. Verlag 1995.

[RS] H. Rasiowa, R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, (Warschau 1963) 3. Aufl. Polish Scientific Publ. 1970.

[RZ] W. Rautenberg, M. Ziegler, *Recursive inseparability in graph theory*, Notices Amer. Math. Soc. 22 (1975), A–523.

[Sa] G. Sacks, *Saturated Model Theory*, W. A. Benjamin 1972.

[Sam] G. Sambin, *An effective fixed point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras*, Studia Logica 35 (1976), 345–361.

[Schö] U. Schöning, *Logik für Informatiker*, (Mannheim 1987) 5. Aufl. Spectrum Akad. Verlag 2000.

[Se] A. Selman, *Completeness of calculi for axiomatically defined classes of algebras*, Algebra Universalis 2 (1972), 20–32.

[Sh] S. Shelah, *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models*, (Amsterdam 1978) 2. Aufl. North-Holland 1990.

[Shoe] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, (Reading Mass. 1967) A. K. Peters 2001.

[Si] W. SIEG, *Herbrand analyses*, Arch. Math. Logic 30 (1991), 409–441.

[Sm] R. SMULLYAN, *Diagonalization and Self-Reference*, Clarendon Press 1994.

[So] R. SOLOVAY, *Provability interpretation of modal logic*, Israel Journal of Mathematics 25 (1976), 287–304.

[Sz] W. SZMIELEW, *Elementary properties of abelian groups*, Fund. Math. 41 (1954), 203–271.

[Ta1] A. TARSKI, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Studia Philosophica 1 (1936), 261–405, oder in [Ta3, 152-278].

[Ta2] ———, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, (Santa Monica 1948, Berkeley 1951) Paris 1967.

[Ta3] ———, *Logic, Semantics, Metamathematics*, (Oxford 1956) 2. Aufl. Hackett 1983.

[TMR] A. TARSKI, A. MOSTOWSKI, R. M. ROBINSON, *Undecidable Theories*, North-Holland 1953.

[Tu] A. TURING, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc., 2^{nd} Ser. 42 (1937), 230–265, oder in [Dav].

[TW] H.-P. TUSCHIK, H. WOLTER, *Mathematische Logik – kurzgefaßt*, (Mannheim 1994) 2. Aufl. Spectrum Akad. Verlag 2002.

[Vi] A. VISSER, *An overview of interpretability logic*, in *Advances in Modal Logic, Vol. 1* (Hrsg. M. KRACHT et al.), CSLI Lecture Notes 87 (1998), 307–359.

[Wae] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra I*, (Berlin 1930) 4. Aufl. Springer 1955.

[Wag] F. WAGNER, *Simple Theories*, Kluwer 2000.

[Wi] A. WILKIE, *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers ...*, Journal Amer. Math. Soc. 9 (1996), 1051–1094.

[WP] A. WILKIE, J. PARIS, *On the scheme of induction for bounded arithmetic formulas*, Ann. Pure Appl. Logic 35 (1987), 261–302.

[WR] A. WHITEHEAD, B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, I–III, (Cambridge 1910, 1912, 1913) 2. Aufl. Cambridge Univ. Press, Vol. I 1925, Vol. II, III 1927.

[Zi] M. ZIEGLER, *Model theory of modules*, Ann. Pure Appl. Logic 26 (1984), 149–213.

Stichwortverzeichnis

Symbolverzeichnis