

Lösungshinweise zu den Übungen

Abschnitt 1.1

1. Jedes lineare $f \in \mathbf{B}_n$ hat eine *eindeutige* Darstellung der angegebenen Art. Daher ist 2^{n+1} (= Anzahl der $(n+1)$ -gliedrigen Folgen aus $0, 1$) die gesuchte Anzahl.
2. Induktion über α zeigt: Ist ξ echter Anfang von α oder α echter Anfang von ξ , so ist ξ keine Formel.
3. Sei etwa $(\alpha \circ \beta) = (\alpha' \circ' \beta')$. Wäre $\alpha \neq \alpha'$, so wäre α echter Anfang von α' oder umgekehrt. Das ist unmöglich nach Übung 2.
4. Für $\xi \notin \mathcal{F}$ genügt $\mathcal{F} \setminus \{\neg\xi\}$ den Bedingungen der Formeldefinition. Also $\neg\xi \notin \mathcal{F}$.

Abschnitt 1.2

2. $\neg p \equiv p + 1$, $1 \equiv p + \neg p$, $p \leftrightarrow q \equiv p + \neg q$ und $p + q \equiv p \leftrightarrow \neg q$.
3. Induktion über α zeigt $\alpha^{(n)}$ ist monoton, weil mit $f, g \in B$ auch $\vec{x} \mapsto f\vec{x} \wedge g\vec{x}$ und $\vec{x} \mapsto f\vec{x} \vee g\vec{x}$ monoton sind. Induktionsschritt über die Stellenzahl von f zeigt, mit $f \in \mathbf{B}_{n+1}$ sind auch $f_k: \vec{x} \rightarrow f(\vec{x}, k)$ monoton, $k = 0, 1$. Werden f_0, f_1 durch α_0 bzw. α_1 repräsentiert, so f durch die Formel $\alpha_0 \vee \alpha_1 \wedge p_{n+1}$.
4. Sei f nicht durch eine Formel in $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$ repräsentierbar. Dann ist f nicht monoton. Passende Einsetzung von Konstanten in f liefert die Negation.

Abschnitt 1.3

1. MP ergibt leicht $p \rightarrow q \rightarrow r$, $p \rightarrow q$, $p \vDash r$. Durch 3-malige Anwendung von (D) folgt hieraus $\vDash (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$.
4. Sei $X^\dagger \vdash \alpha$, also $X \vdash X^\dagger \vdash \alpha$. Das ergibt $X \vdash \alpha$ nach (T).
5. $\vdash_0 \subseteq \vdash$: Sei $X \vdash_0 \alpha$, also $X_0 \vdash \alpha$ für ein endliches $X_0 \subseteq X$. Dann auch $X \vdash \alpha$.

Abschnitt 1.4

1. $X \cup \{\neg\alpha \mid \alpha \in Y\} \vdash \perp \Rightarrow X \cup \{\neg\alpha_0, \dots, \neg\alpha_n\} \vdash \perp$, für gewisse $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in Y$.
Das ergibt $X \vdash (\bigwedge_{i \leq n} \neg\alpha_i) \rightarrow \perp \equiv \bigvee_{i \leq n} \alpha_i$.
2. Lemma 4.4 wie folgt ergänzen: $X \vdash \alpha \vee \beta \Leftrightarrow X \vdash \alpha$ oder $X \vdash \beta$.

4. Sei $X \not\vdash \varphi$, $X \vdash' \varphi$ und $Y \supseteq X \cup \{\neg\varphi\}$ maximal konsistent in \vdash , sowie σ definiert durch $p^\sigma = \top$ für $p \in Y$ und $p^\sigma = \perp$ sonst. Simultane Induktion über α , $\neg\alpha$ zeigt $\alpha \in Y \Rightarrow \vdash \alpha^\sigma$ und $\alpha \notin Y \Rightarrow \vdash \neg\alpha^\sigma$. Folglich $\vdash \neg\varphi^\sigma$. Daher $\vdash' \neg\varphi^\sigma$ und so $X^\sigma \vdash' \neg\varphi^\sigma$. Wegen $X \vdash' \varphi$ ist auch $X^\sigma \vdash' \varphi^\sigma$. Daher $\vdash' \alpha$ für alle α nach $(\neg 1)$.
5. Unter allen Konsequenzen mit den Eigenschaften $(\wedge 1)$ – $(\neg 2)$ gibt es eine kleinste, \vdash , und \vdash ist finitär (Übung 5 in 1.3). Weil \vdash maximal ist, kann nur $\vdash = \vDash$ gelten.

Abschnitt 1.5

1. Man muss den Formeln unter Beispiel 1 nur die Formeln $\{p_{ab} \mid a \leq_0 b\}$ hinzufügen.
2. Sei U trivial, $K \subseteq I$ koendlich, $K \notin U$, also $E = I \setminus K \in U$. Für jede Zerlegung $E = E_0 \cup E_1$ ist $E_0 \in U$ oder $E_1 \in U$. So erschließe man $\{i_0\} \in U$ für ein $i_0 \in I$.

Abschnitt 1.6

2. Kalküle mit MP als einziger Regel und A1,A2 unter den Axiomen erfüllen das Deduktionstheorem (Beweis wie Lemma 6.3). Für maximal konsistentes X beweist man $X \vdash \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow$ wenn $X \vdash \alpha$ so $X \vdash \beta$.
3. Man wende das Lemma von Zorn an auf $H = \{Y \supseteq X \mid Y \not\vdash \alpha\}$.
4. Sei $X \not\vdash \alpha_0$ und X o.B.d.A. α_0 -maximal (Übung 3). Definiert man $w \vDash X$ durch $w \vDash p \Leftrightarrow p \in X$, so gilt: $X \vdash \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow (X \vdash \alpha \Rightarrow X \vdash \beta)$.

Abschnitt 2.1

1. Es gibt 10 wesentlich 2-stellige Boolesche Funktionen f . Die Menge der entsprechenden 10 Gruppoide $(\{0, 1\}, f)$ zerfällt in 5 Paare isomorpher Algebren.
4. Man ordne dem Element $a \in \mathcal{2}^I$ die Teilmenge $I_a = \{i \in I \mid a_i = 1\} \subseteq I$ zu.

Abschnitt 2.2

2. Induktion über t . Klar für Primterme oder falls ζ erster Buchstabe von t ist. Sonst ist $t = ft_1 \cdots t_n$ und ζ kommt in der Zeichenfolge $t_1 \cdots t_n$ vor, also in einem t_i und ist erster Buchstabe eines Subterms in t_i gemäß Induktionsannahme.
3. (a): \mathcal{E} gilt für Primterme. Annahme: \mathcal{E} gilt nicht für $f\vec{t}$. Dann ist entweder $f\vec{t} = gs_1 \dots s_m \xi$ oder $f\vec{t}\xi = gs_1 \dots s_m$ für einen Term $gs_1 \dots s_m$ und eine Zeichenfolge $\xi \neq \emptyset$. In jedem Falle $g = f$ und damit $m = n$. Die Induktionsannahme $\mathcal{E}t_1, \dots, \mathcal{E}t_n$ ergibt schrittweise $t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n$. Damit ist $\xi = \emptyset$ im Widerspruch zu $\xi \neq \emptyset$. (b) folgt leicht aus (a).

Abschnitt 2.3

1. $\forall x\alpha, \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \models \alpha \rightarrow \beta, \alpha \models \beta$. Sodann hintere Generalisierung.
2. Sei $\mathcal{M}_{xy}^{cd} \models \varphi \wedge \varphi \frac{y}{x}$ mit $c \neq d$. Dann gilt $\mathcal{M}_x^a \models \exists y(\varphi \frac{y}{x} \wedge x \neq y)$ für alle $a \in A$.
3. Nach Satz 3.1 und Satz 3.5 ist $\mathcal{A} \models \alpha(x) [a] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \alpha(x) [a] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \alpha \frac{a}{x}$.
4. (b): $\exists_n \wedge \neg \exists_m$ ist für $n \leq m$ äquivalent zu $\bigvee_{k=n}^m \exists_{=k}$, für $n > m$ zu $\exists_{=0}$ ($\equiv \perp$).

Abschnitt 2.4

1. $\alpha \equiv \beta \Rightarrow \models \forall \vec{x}(\alpha \leftrightarrow \beta) \Rightarrow \models (\alpha \leftrightarrow \beta) \frac{\vec{t}}{\vec{x}}$ ($= \alpha \frac{\vec{t}}{\vec{x}} \leftrightarrow \beta \frac{\vec{t}}{\vec{x}}$).
2. $\neg \forall x(x \triangleleft y \rightarrow \alpha) \equiv \exists x \neg(x \triangleleft y \rightarrow \alpha) \equiv \exists x(x \triangleleft y \wedge \neg \alpha)$ (Ersetzungstheorem).
3. O.B.d.A. ist $\alpha \equiv \forall \vec{y} \alpha'(\vec{x}, \vec{y})$ und $\beta \equiv \forall \vec{z} \beta'(\vec{x}, \vec{z})$ mit disjunkten Tupeln $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Abschnitt 2.5

2. \Rightarrow : $X \models \varphi \rightarrow \beta \Leftrightarrow X, \varphi \models \beta$ und (e) Seite 62. \Leftarrow : (10) in 2.4.
3. Beweise zuerst $T_\alpha := \{\beta \in \mathcal{L}^0 \mid T, \alpha \models \beta\}$ ist eine Theorie und dann $T_\alpha = T + \alpha$.

Abschnitt 2.6

1. Man folge dem Beweis von Satz 6.1 (beachte $f\vec{t} = y \equiv_{T_f} \delta_f(\vec{t}, y)$). Für den „nur dann“-Teil beachte man $(y = f\vec{x} \leftrightarrow \delta(\vec{x}, y))^\forall \models \forall \vec{x} \exists! y \delta(\vec{x}, y)$.
2. In $(\mathbb{N}, 0, 1, \mathbf{S}, +, \cdot)$ gelten $x = 0 \leftrightarrow x + x = x, x = 1 \leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \cdot x = x$, sowie $y = \mathbf{S}x \leftrightarrow y = x + 1$ ($\equiv \exists z(y = x + z \wedge z + z \neq z \wedge z \cdot z = z)$).
3. Sei $xy = xz = e$ (\circ, \models werden nicht geschrieben) und ein y' mit $yy' = e$ gewählt. Dann ist auch $yx = (yx)(yy') = y(xy)y' = yey' = e$. Analog folgt $zx = e$. Also $y = z$, denn $y = y(xz) = (yx)z = ez = (zx)z = z(xz) = ze = z$.
4. Wäre $<$ definierbar, wäre $<$ unter jedem Automorphismus von $(\mathbb{Z}, 0, +)$ invariant. Das ist nicht der Fall für den Automorphismus $n \mapsto -n$ (Methode von Padoa).

Abschnitt 3.1

1. Sei $X \vdash \alpha \frac{t}{x}$. Dann ist $X, \forall x \neg \alpha \vdash \alpha \frac{t}{x}, \neg \alpha \frac{t}{x}$. Daher $X, \forall x \neg \alpha \vdash \exists x \alpha$. Gewiß ist auch $X, \neg \forall x \neg \alpha \vdash \exists x \alpha$. Also $X \vdash \exists x \alpha$ nach ($\neg 2$).
2. Sei $\alpha' := \alpha \frac{y}{x}, u \notin \text{var} \alpha, u \neq y$. Dann ist $\forall x \alpha \vdash \alpha' \frac{y}{y}$ ($= \alpha \frac{y}{x}$) nach ($\forall 1$). Also $\forall x \alpha \vdash \forall y \alpha'$ ($= \forall y \alpha \frac{y}{x}$) nach ($\forall 2$).

Abschnitt 3.2

1. Modellexistenzssatz und Übung 4 in 3.1.
2. Es gilt $t^{\mathfrak{I}} = t$ (Induktion über t). Danach beweise man (*) $\mathfrak{I} \models \forall \vec{x} \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \varphi^{\vec{t}}$ für alle $\vec{t} \in \mathcal{T}^n$ (φ offen). Es gilt $\mathcal{M} \models \tilde{X} := \{\varphi^{\vec{t}} \mid \forall \vec{x} \varphi \in X, \vec{t} \in \mathcal{T}^n\}$. Induktion über \wedge, \neg zeigt $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \varphi$. Also $\mathfrak{I} \models \tilde{X}$ und so $\mathfrak{I} \models X$ nach (*).

Abschnitt 3.3

2. $\vdash_{\text{PA}} \forall z[(x + (y + z) = (x + y) + z)]$ folgt durch Induktion über z . Zum Beweis von $\vdash_{\text{PA}} \forall x x + y = y + x$ benötigt man $\vdash_{\text{PA}} \forall y 0 + y = y$ und $\vdash_{\text{PA}} \forall y x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}x + y$ (Übung 1). Induktion über die jeweils quantifizierte Variable.
3. (a): Sei $\varphi := (\forall y < x) \alpha^{\frac{y}{x}}$ und $\vdash_{\text{PA}} \forall x(\varphi \rightarrow \alpha)$. Um $\vdash_{\text{PA}} \forall x \alpha$ zu zeigen, genügt es $\vdash_{\text{PA}} \forall x \varphi$ induktiv über x zu beweisen, weil $\vdash_{\text{PA}} \varphi^{\frac{\mathbf{S}x}{x}} \rightarrow \alpha$. Trivial gilt $\vdash_{\text{PA}} \varphi^{\frac{0}{x}}$. Der Induktionsschritt $\varphi \vdash_{\text{PA}} \varphi^{\frac{\mathbf{S}x}{x}}$ folgt wegen $y < \mathbf{S}x \equiv_{\text{PA}} y \leq x$ aus $\vdash_{\text{PA}} \varphi \rightarrow \alpha$. (b): Folgt aus (a) durch Kontraposition, also durch Anwendung von IS auf $\neg \varphi$. (c): Für $\varphi := (\forall x < v) \exists y \gamma \rightarrow \exists z (\forall x < v) (\exists y < z) \gamma$ gilt $\vdash_{\text{PA}} \varphi^{\frac{0}{v}}$ und man beweist unschwer $\varphi \vdash_{\text{PA}} \varphi^{\frac{\mathbf{S}v}{v}}$. Dies liefert die Behauptung gemäß IS.

Abschnitt 3.4

1. $X = T \cup \{v_i \neq v_j \mid i \neq j\}$ ist erfüllbar, weil jede endliche Teilmenge dies ist.
2. $X = \text{Th} \mathcal{A} \cup \{v_{n+1} < v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat ein Modell mit unendlich absteigender Kette.
4. Sei $u \in \text{Var}$. Folgende Formelmenge (mit Symbolen \mathbf{a} für die $a \in V$) ist konsistent:
 $\text{Th}(V, \epsilon^V) \cup \{\mathbf{a} \in \mathbf{b} \mid a, b \in V, a \in^V b\} \cup \{\mathbf{a} \notin \mathbf{b} \mid a, b \in V, a \notin^V b\} \cup \{\mathbf{a} \in u \mid a \in V\}$.

Abschnitt 3.5

1. $\beta \in T' \Leftrightarrow \alpha \rightarrow \beta \in T$. Wesentlich ist, dass T' zur selben Sprache gehört wie T .
2. (ii) \Rightarrow (iii): Ist $T + \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ nichtendliche Erweiterung, kann $\bigwedge_{i \leq n} \alpha_i \not\in_T \alpha_{n+1}$ angenommen werden. Sei T_n Vervollständigung von $T + \bigwedge_{i \leq n} \alpha_i + \neg \alpha_{n+1}$. Dann ist $T_m \neq T_n$. (iii) \Rightarrow (ii): Annahme $T + \alpha_0, T + \alpha_1, \dots$ sei eine unendliche Folge paarweise verschiedener Vervollständigungen von T . Dann ist $T + \{\neg \alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche Erweiterung von T , weil $T + \bigwedge_{\nu \leq n} \neg \alpha_\nu \neq \neg \alpha_{n+1}$. (ii) \Rightarrow (i): Man zeigt leicht, jede konsistente Theorie ist identisch mit dem Durchschnitt ihrer Vervollständigungen. Das gilt speziell für die Erweiterungen von T .
3. $\alpha \in T \Leftrightarrow \alpha \in T_i$ für alle $i \leq n$; dabei seien T_0, \dots, T_n alle Vervollständigungen von T . Diese sind sämtlich axiomatisierbar, also entscheidbar.

Abschnitt 3.6

1. Es ist $x = y \neq \forall x x = y$. Wegen $\vdash \subseteq \models$ gilt daher auch nicht $x = y \vdash \forall x x = y$.
2. (a): Seien $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ effektive Aufzählungen aller Aussagen bzw. aller endlichen T -Modelle. Man notiere im n -ten Schritt alle φ_i für $i \leq n$ mit $\mathcal{A}_n \models \varphi_i$.
(b): Seien $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ effektive Aufzählungen der in T beweisbaren bzw. widerlegbaren Aussagen. Jedes $\alpha \in \mathcal{L}^0$ kommt in genau einer dieser Folgen vor.
3. Auch Bedingung (ii) aus Übung 2 ist erfüllt, weil nur endliche viele Axiome in einer endlichen Struktur auf ihre Gültigkeit getestet werden müssen.

Abschnitt 3.7

1. Für **H**: Sei h Homomorphismus: $ht^{\mathcal{A},w} = t^{\beta,hw}$ mit $x^{hw} = hx^w$. Für **S** siehe (3) in 2.3. Für **P**: Sei $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Dann ist $t^{\mathcal{B},w} = (t^{\mathcal{A}_i,w_i})_{i \in I}$ mit $x^w = (x^{w_i})_{i \in I}$.
2. In \mathcal{L}_Q^1 ist $\alpha_{\text{üa}} := \forall x x = x$ eine Aussage mit $\mathcal{A} \models \alpha_{\text{üa}} \Leftrightarrow A$ ist überabzählbar. In \mathcal{L}_{II} formalisiere man die Aussage 'es gibt eine lückenlose Ordnung ohne größtes Element'. Eine solche ist immer überabzählbar.
3. Sei α die Konjunktion aller Axiome für geordnete Körper unter Einschluss des in \mathcal{L}_{II} leicht formulierbaren Stetigkeitsaxioms Seite 86. Diese legt den Körper der reellen Zahlen bis auf Isomorphie eindeutig fest. Sei ferner β die in \mathcal{L}_{II} ebenfalls leicht formulierbare Aussage 'Jede überabzählbare Teilmenge des Trägers \mathbb{R} ist zu \mathbb{R} gleichmächtig'. Es gibt eine $\gamma := \alpha \wedge \beta$ erfüllende \mathcal{L}_{II} -Struktur genau dann, wenn CH gilt. Andernfalls ist $\neg\gamma$ eine Tautologie.

Abschnitt 4.1

1. Sei $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Es genügt, $(\star) \mathcal{A}_i \models \alpha[w_i] \Leftrightarrow \beta \models \alpha[w]$ mit $x^w = (x^{w_i})_{i \in I}$ induktiv für Basis-Hornformeln zu beweisen. Beachte dabei $t^{\mathcal{B},w} = (t^{\mathcal{A}_i,w_i})_{i \in I}$.
 (\star) ergibt leicht die Induktionsschritte über \wedge, \forall, \exists .
3. Eine Menge positiver Hornformeln hat stets ein 1-elementiges Modell.

Abschnitt 4.2

1. Für $w_1 \models p_1, p_3, \neg p_2$ und $w_2 \models p_2, p_3, \neg p_1$ ist $w_1 \models \mathcal{P}$ und $w_2 \models \mathcal{P}$, aber es gibt keine Belegung $w \leq w_1, w_2$ mit $w \models \mathcal{P}$.
2. Für beliebiges $w \models \mathcal{P}$ folgt $w \models p_{m,n,m+n}$ induktiv über n , also $w_{\mathcal{P}} \leq w$.
3. (a) Resolutionsatz. (b) $w_{\mathcal{P}} \models \neg p_{n,m,k}$ für $k \neq n + m$.

Abschnitt 4.3

2. \Rightarrow : Annahme $x_i \in \text{var } t_j$. Dann $x_i^\sigma = t_j \neq t_j^\sigma = x_i^{\sigma^2}$.
3. Sei ω Unifikator von $K_0 \cup K_1$, also $K_0^\omega = K_1^\omega$. Sei $x^{\omega'} = x^{\rho\omega}$ für $x \in \text{var } K_0$ und $x^{\omega'} = x^\omega$ sonst. Dann ist $K_0^{\rho\omega'} = K_0^{\rho^2\omega} = K_0^\omega$ (beachte $\rho^2 = \iota$), sowie $K_1^{\omega'} = K^\omega$.

Abschnitt 4.4

1. Seien K_0, K_1 zerlegt wie in der Definition von UR und sei ρ ein Separator von K_0, K_1 , sowie ω' definiert wie im Hinweis zu Übung 3 in **4.3**.
2. Man vereinige \mathcal{P}_g und \mathcal{P}_h und füge dem Resultat noch folgende Klauseln hinzu:
 $r_f(\vec{x}, 0, u) :- r_g(\vec{x}, u)$ und $r_f(\vec{x}, Sy, u) :- r_f(\vec{x}, y, v), r_h(\vec{x}, y, v, u)$.
3. Man füge den Programmen noch $r_f\vec{x}u :- r_{g_1}\vec{x}y_1, \dots, r_{g_m}\vec{x}y_m, r_h\vec{y}u$ hinzu.

Abschnitt 5.1

3. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b, c$. Die lineare Funktion $x \mapsto \frac{a-c}{a-b} \cdot x + \frac{c-b}{a-b} \cdot a$ vermittelt einen Automorphismus des (reellen) Intervalls $[a, b]$ auf das Intervall $[a, c]$.
4. O.B.d.A. sei $A \cap B = \emptyset$. Es genügt zu zeigen $D_{el}\mathcal{A} \cup D_{el}\mathcal{B}$ ist konsistent.
5. (a): $\{t^A \mid t \in \mathcal{T}_E\}$ ist abgeschlossen gegenüber allen f^A , ist also identisch mit dem Träger von \mathcal{A} . (b): $\mathcal{B} \models T + D_E\mathcal{A}$ lässt sich zu einem $\mathcal{B}' \models T + D\mathcal{A}$ expandieren: Für $a \in A \setminus E$ mit $a = t^A$ und $t \in \mathcal{T}_E$ gemäß (a) sei $a^{\mathcal{B}'} = t^{\mathcal{B}}$ ($= t^A$).

Abschnitt 5.2

2. IS auf $\alpha(x_n) = \forall x_0 \cdots x_{n-1} (\bigwedge_{i < n} \mathbf{S}x_i = x_{i+1} \rightarrow x_n \neq x_0)$ anwenden.
3. Sei $a \in G \models T$ und $\frac{a}{n}$ das Element mit $n \frac{a}{n} = a$, sowie $\frac{m}{n} : a \mapsto m \frac{a}{n}$ für $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Dadurch wird G zur Vektorgruppe eines \mathbb{Q} -Vektorraums.
4. (b): Behauptung zuerst für beliebige Konjunktion aus den α_i und ihren Negationen beweisen. Beachte $\alpha_i \wedge \alpha_j \equiv_T \perp$ für $i \neq j$ und $\vdash_T \bigvee_{i \leq m} \alpha_i$.

Abschnitt 5.3

1. $(\mathcal{A}, \vec{a}) \sim_k (\mathcal{B}, \vec{b}) \Leftrightarrow a_i \mapsto b_i$ ($i = 1, \dots, n$) ist partieller Isomorphismus.
2. In Runde 1 spiele II beliebig, danach gemäß den Gewinnstrategien für Modelle von SO_{01} bzw. SO_{10} in den beiden Zerlegungshälften.

3. Falls I mit $a \in A$ beginnt und rechts und links von a mindestens 2^{n-1} Elemente verbleiben, wähle II entsprechend. Sonst mit Elementen derselben Distanz vom linken bzw. rechten Randelement antworten.
4. Fallunterscheidung ob $\mathcal{A} \models \text{SO}$ unendlich oder endlich ist. Im ersten Falle folgt die Behauptung aus der Vollständigkeit aller Theorien $\text{SO}_{ij} \cup \{\exists_i \mid i > 0\}$.

Abschnitt 5.4

1. Jeder Halbverband (A, \cap) ist durch $a \mapsto \{x \in A \mid x \leq a\}$ in den Mengenhalfverband $(\mathfrak{P}A, \cap)$ einbettbar. Dabei sei \leq die Halbordnung von (A, \cap) , Seite 39.
3. Sei A geordnet. Ersetzt man jedes $a \in A$ durch ein Exemplar von $(\mathbb{Z}, <)$ bzw. von $(\mathbb{Q}, <)$, so entsteht eine diskrete Ordnung bzw. eine dichte Ordnung $B \supseteq \mathcal{A}$.
4. Sei $\mathcal{A}_0 \models T_0$. Wähle \mathcal{A}_1 mit $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \models T_1$, \mathcal{A}_2 mit $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \models T_0$ usw. Das ergibt eine Kette $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots$ mit $\mathcal{A}_{2i} \models T_0$, $\mathcal{A}_{2i+1} \models T_1$. Dann ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{2i} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{2i+1} \models T$. Also sind T, T_i modellverträglich.
5. Die Vereinigung S einer Kette von mit T modellverträglichen induktiven Theorien ist wieder induktiv. S hat denselben \forall -Teil wie T , ist mit T also auch modellverträglich. Also gibt es nach dem Zornschen Lemma eine maximale, und nach Übung 4 damit auch eine größte Theorie dieser Art.

Abschnitt 5.5

1. Für $i \neq 0$ oder $j \neq 0$ besitzt DO_{ij} Modelle $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \not\models \mathcal{B}$.
2. (a) Lindströms Kriterium. T ist \aleph_1 -kategorisch, denn ein T -Modell kann als \mathbb{Q} -Vektorraum verstanden werden. (b) Jedes T_0 -Modell G ist in ein T -Modell H einbettbar; man gewinnt ein solches H , indem auf der Menge aller Paare $\frac{a}{n}$ mit $a \in G$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine geeignete Äquivalenzrelation definiert wird.
3. Eindeutigkeit folgt ähnlich wie die der Modellvervollständigung.
4. Der algebraische Abschluß $\overline{\mathcal{F}_p}$ des Primkörpers \mathcal{F}_p der Charakteristik p hat die Darstellung $\overline{\mathcal{F}_p} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_{p^n}$, wobei \mathcal{F}_{p^n} den endlichen Körper aus p^n Elementen bezeichnet. Ferner gilt eine in allen a.a. Körpern mit Primzahlcharakteristik gültige Aussage bereits in allen a.a. Körpern.

Abschnitt 5.6

1. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \mathbf{ZG}_0$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Dann auch $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$, denn das Prädikat $m|$ hat in \mathbf{ZG} eine \forall - und eine \exists -Definition. Also $\mathcal{A}' \subseteq_{ec} \mathcal{B}'$, mithin $\mathcal{A} \subseteq_{ec} \mathcal{B}$.
2. Induktiv über quantorenfreies $\varphi = \varphi(x)$ ergibt sich: für jedes $\mathcal{A} \models \mathbf{RCF}^\circ$ ist $\varphi^{\mathcal{A}}$ oder $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}$ endlich, was für $\alpha(x)$ nicht der Fall ist.
4. Die Gruppe $2\mathbb{Z}$ ist Substruktur der geordneten Gruppe \mathbb{Z} , aber nicht $2\mathbb{Z} \preccurlyeq \mathbb{Z}$.

Abschnitt 5.7

1. Sei $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\} = \{\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_n\}$ und $I_\nu = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_\nu\}$, also $I = I_0 \cup \dots \cup I_n$. Damit gehört genau eines der I_ν zu F (Induktion über n).
3. Behauptung indirekt beweisen. Seien I, J_α, F definiert wie in Korollar 7.3, sowie $\mathcal{A}_i \in \mathbf{K}$ und $w_i: AV \rightarrow A_i$ derart, dass $w_i\alpha \in D^{A_i}$ für $\alpha \in i$, $w_i\varphi \notin D^{A_i}$, $\mathcal{C} := \prod_{i \in I}^F \mathcal{A}_i (\in \mathbf{K})$ und $w = (w_i)_{i \in I}$. Dann ist $wX \subseteq D^{\mathcal{C}}$, also $X \not\subseteq_{\mathcal{C}} \varphi$.
4. O.B.d.A. ist $\mathcal{A} = \mathcal{Q}$ und $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{Q}^I$ für gewisses I nach dem Stoneschen Repräsentationssatz (siehe 2.1). $\mathcal{Q} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{Q}^I \models \alpha \Rightarrow \mathcal{B} \models \alpha$ nach Satz 7.2.

Abschnitt 6.1

1. $\Rightarrow: \chi_{\text{graph}f} = \delta|f\vec{a} - b|$. $\Leftarrow: f\vec{a} = \mu b[f\vec{a} = b]$. Ferner: $f\vec{a} = \mu b \leq h\vec{a}[f\vec{a} = b]$.
3. Sei $s_m := \sum_{i \leq m} i$ und damit $\varphi(a, b) = s_{a+b} + a$. *Injektivität:* Sei $\varphi(a, b) = \varphi(a', b')$. Angenommen $a+b \neq a'+b'$ und o.B.d.A. $a+b < a'+b'$. Dann $\varphi(a, b) < \varphi(a, b) + b + 1 = s_{a+b} + a + b + 1 = s_{a+b+1} \leq s_{a'+b'} \leq \varphi(a', b')$. Also $a + b = a' + b'$ und so $a = \varphi(a, b) - s_{a+b} = \varphi(a', b') - s_{a'+b'} = a'$, also auch $b = b'$. *Surjektivität:* Da $0 = \varphi(0, 0) \in \text{ran } \varphi$, genügt zu zeigen $\varphi(a, b) + 1 \in \text{ran } \varphi$ für alle a, b . Im Falle $b = 0$ ist $\varphi(a, 0) + 1 = s_{a+0} + a + 1 = s_{a+1} = \varphi(0, a + 1)$. Für $b > 0$ ist $\varphi(a + 1, b - 1) = s_{a+1+b-1} + a + 1 = s_{a+b} + a + 1 = \varphi(a, b) + 1$. Dieser Beweis bestätigt auch die Korrektheit der Paarkodierungs-Figur.
4. \Rightarrow : Sei $M = \{b \in \mathbb{N} \mid \exists a Rab\}$, R rekursiv, $c \in M$ fest gewählt. Sei $fn = b$, falls $(\exists a \leq n) n = \varphi(a, b)$ & Rab , und $fn = c$ im anderen Falle. Dann gilt $M = \text{ran } f$. \Leftarrow : $M = \{b \in \mathbb{N} \mid (\exists a \in \mathbb{N})fa = b\}$ und Übung 1.

Abschnitt 6.2

1. Es sei $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ eine rekursive Aufzählung von X . Nach Übung 2 in 6.1 ist dann $\{\beta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $\beta_n = \underbrace{\alpha_n \wedge \dots \wedge \alpha_n}_n$ rekursiv und ein Axiomensystem für T .

3. Sei $\Phi_n = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ ein Beweis von $\varphi = \varphi_n$ in $T + \alpha$ und seien Beweise Φ'_k für $\alpha \rightarrow \varphi_k$ zu $\Phi_i = (\varphi_0, \dots, \varphi_i)$ für alle $i < n$ schon konstruiert. Man definiere einen Beweis Φ'_n für $\alpha \rightarrow \varphi$ durch p.r. Fallunterscheidung entsprechend dem Beweis von Lemma 1.6.3.
4. Zeige zuerst die Menge P der Primaussagen aus Tr_0 ist p.r. Dazu konstruiere eine p.r. Funktion f mit $f\dot{t} = t^N$ falls $\text{var } t = \emptyset$. Schließlich beachte man

$$\alpha \in Tr_0 \Leftrightarrow \alpha \in P \mathbf{V} (\exists \beta, \gamma < \alpha) [\alpha = \beta \wedge \gamma \ \& \ \beta, \gamma \in Tr_0 \ \mathbf{V} \ \alpha = \neg \beta \ \& \ \beta \notin Tr_0].$$

Abschnitt 6.3

1. $\exists \vec{x} \alpha \equiv_{\mathcal{N}} \exists y (\exists x_1 \leq y) \dots (\exists x_n \leq y) \alpha$ mit $y \notin \text{var } \alpha$. Für eine Belegung \vec{a} von \vec{x} belege y mit $\max\{a_1, \dots, a_n\}$. Analog ist $\forall \vec{x} \alpha \equiv_{\mathcal{N}} \forall y (\forall x_1 \leq y) \dots (\forall x_n \leq y) \alpha$
2. $(\forall x < v) \exists y \alpha \equiv_{\text{PA}} \exists z (\forall x < v) (\exists y < z) \alpha$ nach Übung 3(c) in 3.3.

Abschnitt 6.4

1. $<$ -Induktion über $s = a + b$. Richtig für $a = b = 1$ mit $x = 0, y = 1$. Sei $s > 2$. Dann ist $a \neq b$. Falls $a > b$ ist auch $a - b \perp b$. Da $(a - b) + b < s$, gibt es nach Induktionsannahme $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x(a - b) + 1 = yb$. Also $xa + 1 = y'b$ mit $y' = x + y$. Falls $a < b$ ist $a \perp b - a$ und man schließt analog.
2. (a): $p \not\vdash a \Rightarrow a \perp p \Rightarrow \exists xy xa + 1 = yp \Rightarrow \exists xy b = ybp - xab \Rightarrow p \mid b$. (b): führe $p \mid \text{kgV}\{a_\nu \mid \nu \leq n\}$ und $(\forall \nu \leq n) p \not\vdash a_\nu$ zum Widerspruch. (c) folgt leicht aus (b).
4. (a): Beweise dies zuerst für x statt \vec{x} . (b): Zeige $\text{sb}_x(\ulcorner \varphi \urcorner, x) = \ulcorner \varphi \urcorner$ für $x \notin \text{frei } \varphi$.

Abschnitt 6.5

3. Klar falls $T + \Delta$ inkonsistent ist. Andernfalls ist $T + \Delta$ nach 2.6 konservative Erweiterung von T und $\alpha \in T + \Delta \Leftrightarrow \alpha^{rd} \in T$. Da α^{rd} aus α effektiv hergestellt werden kann, ist mit T auch $T + \Delta$ entscheidbar.
4. $f \in \mathbf{F}_1$ mit $fa = (a)_{\text{last}}$ falls a einen Beweis in \mathbf{Q} kodiert und $fa = (0 = 0)$: sonst, ist p.r. und zählt \mathbf{Q} rekursiv auf.

Abschnitt 6.6

1. Sei $T \supseteq T_1$ konsistent. $S = \{\alpha \in \mathcal{L}_0 \mid \alpha^P \in T^\Delta\}$ ist eine Theorie, die T_0 konsistent erweitert und daher unentscheidbar. Dasselbe gilt für T^Δ und T .
4. $n \in m \rightarrow n < m$, sowie $m \cup \{n\} = m + 2^n$ falls $n \notin m$. Für den Nachweis von Fin und IS_\in wird die $<$ -Induktion benötigt.

Abschnitt 6.7

1. Hinweis zu Übung 1 in **6.3** führt auch im Induktionsschritt zum Ziel.
2. Δ_0 ist r.a. aber Δ_1 nicht (Bemerkung 2 in **6.3**). \dot{Q} ist Σ_1 aber nicht Δ_1 .
3. Der Hinweis zu Übung 3 in **3.3** zeigt, dass $<$ -Induktion in $I\Delta_0$ durch Standard-Induktion über x für $\varphi := (\forall y < x)\alpha \frac{y}{x}$ bewiesen wird. Da das Minimalschema durch Kontraposition folgt, benötigen wir hierfür Induktion für $\neg\varphi$. Beides sind Δ_0 -Formeln, sofern $\alpha \Delta_0$ ist.

Abschnitt 7.1

1. Für rest wähle man $\varphi(a, b, r) := (\exists q \leq a)(a = b \cdot q + r \wedge r < b) \vee b = r = 0$ und beweise $\vdash_{PA} \exists r \varphi(a, b, r)$ durch Induktion über a . Nutze die Axiome von \mathbf{N} in **6.3**.
2. (a): $<$ -Induktion. (b): Hinweis zu Übung 1 in **6.4** in PA formalisieren.
4. Für $\Box_{T+\alpha}\varphi \vdash_T \Box_T(\alpha \rightarrow \varphi)$ nutze man Übung 3 in **6.2**.

Abschnitt 7.2

1. $\vdash_T \Box\alpha \rightarrow \alpha \Rightarrow \vdash_{T'} \neg\Box\alpha \Rightarrow \vdash_{T'} \text{Con}_{T'}$, weil nach (5) $\text{Con}_{T'} \equiv_T \neg\Box\neg\neg\alpha \equiv_T \neg\Box\alpha$. Damit ist T' nach Satz 2.2 inkonsistent, also $\vdash_T \alpha$.
3. Angenommen $T^n = T + \neg\Box^n\perp$ und $\text{Con}_{T^n} \equiv_T \neg\Box^{n+1}\perp$. Wegen $\Box^n\perp \vdash_T \Box^{n+1}\perp$ gilt $\neg\Box^{n+1}\perp \vdash_T \neg\Box^n\perp$. Somit $T^{n+1} = (T + \neg\Box^n\perp) + \neg\Box^{n+1}\perp = T + \neg\Box^{n+1}\perp$. Ferner ist nach (5) in **7.2** $\text{Con}_{T^{n+1}} \equiv_T \neg\Box\neg(\neg\Box^{n+1}\perp) \equiv \neg\Box^{n+2}\perp$.
4. Für jede arithmetische Aussage α ist der Satz ‘Wenn α in PA beweisbar ist, so gilt α ’ in ZFC beweisbar (PA ist interpretierbar in ZFC, siehe **6.6**). Formalisiert: $\vdash_{ZFC} \Box_{PA}\alpha \rightarrow \alpha$.

Abschnitt 7.4

1. Man beweist zuerst $G_n = \{H \in \mathcal{F}_\Box \mid \vdash_G \Box^{n+1}\perp \rightarrow H\}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \vdash_{G_n} H &\Leftrightarrow \vdash_G \Box^{n+1}\perp \rightarrow H \Leftrightarrow \vdash_{PA} (\Box^{n+1}\perp \rightarrow H)^i \text{ für alle } i && \text{(Satz 4.2)} \\ &\Leftrightarrow \vdash_{PA} \Box^{n+1}\perp \rightarrow H^i \text{ für alle } i && \text{(Eigenschaft von } i) \\ &\Leftrightarrow \vdash_{PA_n} H^i \text{ für alle } i && \text{(PA}_n = \text{PA} + \Box^n\perp). \end{aligned}$$
2. Die erste Behauptung ergibt sich unschwer aus Übung 3 in **7.2**. Die Bestimmung der Beweislogik folgt aus Satz 4.3 und $\text{Con}_{PA_n} \equiv_{PA_n} \text{Con}_{PA^n}$ nach (6) in **7.2**.
4. $\not\vdash_{GS} \neg[\neg\Box(p \rightarrow q) \wedge \neg\Box(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg\Box(p \rightarrow \neg q) \wedge \neg\Box(\neg p \rightarrow \neg q)]$ und Satz 4.4.

Literatur

- [As] G. ASSER, *Einführung in die mathematische Logik, Teil III*, Teubner 1981.
- [Ba] J. BARWISE (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland 1977.
- [BD] A. BERARDUCCI, P. D'AQUINO, Δ_0 -complexity of the relation $y = \prod_{i \leq n} F(i)$, *Ann. Pure Appl. Logic* 75 (1995), 49–56.
- [Be1] L. D. BEKLEMISHEV, *On the classification of propositional provability logics*, *Math. USSR – Izvestiya* 35 (1990), 247–275.
- [Be2] ———, *Iterated local reflection versus iterated consistency*, *Ann. Pure Appl. Logic* 75 (1995), 25–48.
- [Be3] ———, *Bimodal logics for extensions of arithmetical theories*, *J. Symb. Logic* 61 (1996), 91–124.
- [BF] J. BARWISE, S. FEFERMAN (Hrsg.), *Model-Theoretic Logics*, Springer 1985.
- [BGG] E. BÖRGER, E. GRÄDEL, Y. GUREVICH, *The Classical Decision Problem*, Springer 1997.
- [Bi] G. BIRKHOFF, *On the structure of abstract algebras*, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 31 (1935), 433–454.
- [BJ] G. BOOLOS, R. JEFFREY, *Computability and Logic*, 3. Aufl. Cambridge Univ. Press 1989.
- [BM] J. BELL, M. MACHOVER, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland 1977.
- [Boo] G. BOOLOS, *The Logic of Provability*, Cambridge Univ. Press 1993.
- [BP] P. BENACERRAF, H. PUTNAM (Hrsg.), *Philosophy of Mathematics, Selected Readings*, (Englewood Cliffs NJ 1964) 2. Aufl. Cambridge Univ. Press 1997.
- [Bu] S. R. BUSS (Hrsg.), *Handbook of Proof Theory*, Elsevier 1998.
- [Bue] S. BUECHLER, *Essential Stability Theory*, Springer 1996.

- [Ca] G. CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen*, (Berlin 1932) Springer 1980.
- [Ch] A. CHURCH, *A note on the Entscheidungsproblem*, J. Symb. Logic 1 (1936), 40–41.
- [CK] C. C. CHANG, H. J. KEISLER, *Model Theory*, (Amsterdam 1973) 3. Aufl. North-Holland 1990.
- [CZ] A. CHAGROV, M. ZAKHARYASHEV, *Modal Logic*, Clarendon Press 1997.
- [Da] D. VAN DALEN, *Logic and Structure*, (Berlin 1980) 4. Aufl. Springer 2004.
- [Dav] M. DAVIS (Hrsg.), *The Undecidable*, Raven Press 1965.
- [De1] O. DEISER, *Einführung in die Mengenlehre*, (Berlin 2002) 2. Aufl. Springer 2004.
- [De2] ———, *Axiomatische Mengenlehre*, voraussichtlich Springer 2009.
- [Do] K. DOETS, *From Logic to Logic Programming*, MIT Press 1994.
- [EFT] H.-D. EBBINGHAUS, J. FLUM, W. THOMAS, *Einführung in die Mathematische Logik*, (Darmstadt 1978) 5. Aufl. Spectrum Akad. Verlag 2007.
- [En] H. ENDERTON, *A Mathematical Introduction to Logic*, (New York 1972) 2. Aufl. Academic Press 2001.
- [Fe1] W. FELSCHER, *Berechenbarkeit*, Springer 1993.
- [Fe2] ———, *Lectures on Mathematical Logic*, Vol. 1–3, Gordon & Breach 2000.
- [Fef] S. FEFERMANN, *In the Light of Logic*, Oxford Univ. Press 1998.
- [Fr] G. FREGE, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, (Halle 1879) G. Olms Verlag 1971, oder in [Hei, 1–82].
- [Ge] G. GENTZEN, *Untersuchungen über das logische Schließen*, Mathematische Zeitschrift 39 (1935), 176–210, 405–431.
- [GH] H.-J. GOLTZ, H. HERRE, *Grundlagen der logischen Programmierung*, Akademie-Verlag 1990.
- [GJ] M. GAREY, D. JOHNSON, *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman 1979.
- [Gö1] K. GÖDEL, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik 37 (1930), 349–360, oder *Collected Works I*.
- [Gö2] ———, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), 173–198.
- [Gö3] ———, *Collected Works*, Vol. I–V, Oxford Univ. Press, Vol. I 1986, Vol. II 1990, Vol. III 1995, Vol. IV, V 2003.

- [Gor] S. N. GORYACHEV, *On the interpretability of some extensions of arithmetic*, Mathematical Notes 40 (1986), 561–572.
- [Gr] G. GRÄTZER, *Universal Algebra*, (New York 1968) 2. Aufl. Springer 1979.
- [HA] D. HILBERT, W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*, (Berlin 1928) 6. Aufl. Springer 1972.
- [HB] D. HILBERT, P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, Bd. I, II, (Berlin 1934, 1939) 2. Aufl. Springer, Band I 1968, Band II 1970.
- [He] L. HENKIN, *The completeness of the first-order functional calculus*, J. Symb. Logic 14 (1949), 159–166.
- [Hei] J. VAN HEIJENOORT (Hrsg.), *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press 1967.
- [Her] J. HERBRAND, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III (1930), oder in [Hei, 525–581].
- [HeR] B. HERRMANN, W. RAUTENBERG, *Finite replacement and finite Hilbert-style axiomatizability*, Zeitsch. Math. Logik Grundlagen Math. 38 (1982), 327–344.
- [Hi] P. HINMAN, *Fundamentals of Mathematical Logic*, A. K. Peters 2005.
- [Ho] W. HODGES, *Model Theory*, Cambridge Univ. Press 1993.
- [HP] P. HÁJEK, P. PUDLÁK, *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Springer 1993.
- [HR] H. HERRE, W. RAUTENBERG, *Das Basistheorem und einige Anwendungen in der Modelltheorie*, Wiss. Z. Humboldt-Univ., Math. Nat. R. 19 (1970), 579–583.
- [Id] P. IDZIAK, *A characterization of finitely decidable congruence modular varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 903–934.
- [Ig] K. IGNATIEV, *On strong provability predicates and the associated modal logics*, J. Symb. Logic 58 (1993), 249–290.
- [Ih] T. IHRINGER, *Allgemeine Algebra*, (Stuttgart 1988) 2. Aufl. Heldermann 2003.
- [JK] R. JENSEN, C. KARP, *Primitive recursive set functions*, in *Axiomatic Set Theory, Vol. I* (Hrsg. D. SCOTT), Proc. Symp. Pure Math. 13, I, AMS 1971, 143–167.
- [Ka] R. KAYE, *Models of Peano Arithmetic*, Clarendon Press 1991.
- [Ke] H. J. KEISLER, *Logic with the quantifier “there exist uncountably many”*, Annals of Mathematical Logic 1 (1970), 1–93.
- [KK] G. KREISEL, J.-L. KRIVINE, *Modelltheorie*, Springer 1972.

- [Kl1] S. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, (Amsterdam 1952) 2. Aufl. Wolters-Noordhoff 1988.
- [Kl2] ———, *Mathematical Logic*, Wiley & Sons 1967.
- [KR] I. KOREC, W. RAUTENBERG, *Model interpretability into trees and applications*, Arch. math. Logik 17 (1976), 97–104.
- [Kr] M. KRACHT, *Tools and Techniques in Modal Logic*, Elsevier 1999.
- [Kra] J. KRAJÍČEK, *Bounded Arithmetic, Propositional Logic, and Complexity Theory*, Cambridge Univ. Press 1995.
- [Ku] K. KUNEN, *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland 1980.
- [Li] P. LINDSTRÖM, *On extensions of elementary logic*, Theoria 35 (1969), 1–11.
- [Ll] J. W. LLOYD, *Foundations of Logic Programming*, (Berlin 1984) 2. Aufl. Springer 1987.
- [Lö] M. LÖB, *Solution of a problem of Leon Henkin*, J. Symb. Logic 20 (1955), 115–118.
- [Ma] A. I. MAL'CEV, *The Metamathematics of Algebraic Systems*, North-Holland 1971.
- [Mal] J. MALITZ, *Introduction to Mathematical Logic*, Springer 1979.
- [Mat] Y. MATIYASEVICH, *Hilbert's Tenth Problem*, MIT Press 1993.
- [Me] E. MENDELSON, *Introduction to Mathematical Logic*, (Princeton 1964) 4. Aufl. Chapman & Hall 1997.
- [ML] G. MÜLLER, W. LENSKI (Hrsg.), *The Ω -Bibliography of Mathematical Logic*, Springer 1987.
- [Mo] D. MONK, *Mathematical Logic*, Springer 1976.
- [MV] R. MCKENZIE, M. VALERIOTE, *The Structure of Decidable Locally Finite Varieties*, Progress in Mathematics 79, Birkhäuser 1989.
- [Ob] A. OBERSCHELP, *Rekursionstheorie*, BI-Wiss.-Verlag 1993.
- [Po] W. POHLERS, *Proof Theory, An Introduction*, Lecture Notes in Mathematics 1407, Springer 1989.
- [Pr] A. PRESTEL, *Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie*, Vieweg 1986.

- [Pre] M. PRESBURGER, *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt*, Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves 1 (1930), 92–101.
- [Ra1] W. RAUTENBERG, *Klassische und Nichtklassische Aussagenlogik*, Vieweg 1979.
- [Ra2] ———, *A Concise Introduction to Mathematical Logic*, Springer 2006.
- [Ra3] ———, *Messen und Zählen, Eine einfache Konstruktion der reellen Zahlen*, Heldermann 2007.
- [Ri] M. RICHTER, *Logikkalküle*, Teubner 1978.
- [Ro1] A. ROBINSON, *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, (Amsterdam 1963) 2. Aufl. North-Holland 1974.
- [Ro2] ———, *Non-Standard Analysis*, (Amsterdam 1966) 3. Aufl. North-Holland 1974.
- [Rob] J. ROBINSON, *A machine-oriented logic based on the resolution principle*, Journal of the ACM 12 (1965), 23–41.
- [Rog] H. ROGERS, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, 2. Aufl. MIT Press 1988.
- [Ros] J. B. ROSSER, *Extensions of some theorems of Gödel and Church*, J. Symb. Logic 1 (1936), 87–91.
- [Rot] P. ROTHMALER, *Einführung in die Modelltheorie*, Spectrum Akad. Verlag 1995.
- [RS] H. RASIOWA, R. SIKORSKI, *The Mathematics of Metamathematics*, (Warschau 1963) 3. Aufl. Polish Scientific Publ. 1970.
- [RZ] W. RAUTENBERG, M. ZIEGLER, *Recursive inseparability in graph theory*, Notices Amer. Math. Soc. 22 (1975), A–523.
- [Sa] G. SACKS, *Saturated Model Theory*, W. A. Benjamin 1972.
- [Sam] G. SAMBIN, *An effective fixed point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras*, Studia Logica 35 (1976), 345–361.
- [Schö] U. SCHÖNING, *Logik für Informatiker*, (Mannheim 1987) 5. Aufl. Spectrum Akad. Verlag 2000.
- [Se] A. SELMAN, *Completeness of calculi for axiomatically defined classes of algebras*, Algebra Universalis 2 (1972), 20–32.
- [Sh] S. SHELAH, *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models*, (Amsterdam 1978) 2. Aufl. North-Holland 1990.
- [Shoe] J. R. SHOENFIELD, *Mathematical Logic*, (Reading Mass. 1967) A. K. Peters 2001.

- [Si] W. SIEG, *Herbrand analyses*, Arch. Math. Logic 30 (1991), 409–441.
- [Sm] R. SMULLYAN, *Diagonalization and Self-Reference*, Clarendon Press 1994.
- [So] R. SOLOVAY, *Provability interpretation of modal logic*, Israel Journal of Mathematics 25 (1976), 287–304.
- [Sz] W. SZMIELEW, *Elementary properties of abelian groups*, Fund. Math. 41 (1954), 203–271.
- [Ta1] A. TARSKI, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Studia Philosophica 1 (1936), 261–405, oder in [Ta3, 152–278].
- [Ta2] ———, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, (Santa Monica 1948, Berkeley 1951) Paris 1967.
- [Ta3] ———, *Logic, Semantics, Metamathematics*, (Oxford 1956) 2. Aufl. Hackett 1983.
- [TMR] A. TARSKI, A. MOSTOWSKI, R. M. ROBINSON, *Undecidable Theories*, North-Holland 1953.
- [Tu] A. TURING, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc., 2nd Ser. 42 (1937), 230–265, oder in [Dav].
- [TW] H.-P. TUSCHIK, H. WOLTER, *Mathematische Logik – kurzgefaßt*, (Mannheim 1994) 2. Aufl. Spectrum Akad. Verlag 2002.
- [Vi] A. VISSER, *An overview of interpretability logic*, in *Advances in Modal Logic, Vol. 1* (Hrsg. M. KRACHT et al.), CSLI Lecture Notes 87 (1998), 307–359.
- [Wae] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra I*, (Berlin 1930) 4. Aufl. Springer 1955.
- [Wag] F. WAGNER, *Simple Theories*, Kluwer 2000.
- [Wi] A. WILKIE, *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers ...*, Journal Amer. Math. Soc. 9 (1996), 1051–1094.
- [WP] A. WILKIE, J. PARIS, *On the scheme of induction for bounded arithmetic formulas*, Ann. Pure Appl. Logic 35 (1987), 261–302.
- [WR] A. WHITEHEAD, B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, I–III, (Cambridge 1910, 1912, 1913) 2. Aufl. Cambridge Univ. Press, Vol. I 1925, Vol. II, III 1927.
- [Zi] M. ZIEGLER, *Model theory of modules*, Ann. Pure Appl. Logic 26 (1984), 149–213.

Stichwortverzeichnis

A

a.a. (algebraisch abgeschlossen), 38
 \forall -Formel, \forall -Aussage, 54
 \forall -Theorie, 66
 $\forall\exists$ -Aussage, $\forall\exists$ -Theorie, 148
Abbildung (Funktion), xix
 bijektive, xix
 identische, xix
 injektive, surjektive, xix
abelsche Gruppe, 38
 dividierbare, 81
 torsionsfreie, 82
ableitbar, 18, 29
Ableitungsbedingungen, 210
Abschlußaxiome, 200
Abschluss (eines Modells in T), 152
Absorptionsgesetze, 39
Ackermann-Funktion, 175
Algebra, 34
algebraisch, 38
allgemeingültig, 14, 51
allgemeingültigkeitsgleich, 61
Alphabet, xx
Anfang, xx, 37
Anfangssequenz, 18
Anfrage, 122
Anordnung, 37
Antivalenz, 2
äquivalent, 9, 51
 in (oder modulo) T , 66
 in einer Struktur, 59
Äquivalenz, 3
Äquivalenzklasse, 41
Äquivalenzrelation, 36

arithmetisch, 184
arithmetische Hierarchie, 205
arithmetisierbar, 177, 194
Artin, 153
assoziativ, xxi
aufzählbar, 92, 175
Aussage, 47
Aussagenvariable, 4
 modalisierte, 224
Auswahlaxiom, 90
Auswahlfunktion, xxi
Automorphismus, 40
axiomatisierbar, 81
 endlich, rekursiv, 81
Axiomensystem, 65
 logisches, 29, 95

B

β -Funktion, 189
Basisregeln, 18, 72
Basissatz, 140, 161
Baum, 26
Belegung, 7, 49, 221
benachbart, 25
berechenbar, 127, 169
beschränkt, 37
Beweis (formaler), 29, 96
beweisbar, 19, 29
beweisbar rekursiv, 212
Beweislogik, 224
Bild, xix
Birkhoffsche Regeln, 99
Blatt, 113
Boolesche Algebra, 39
Boolesche Basis, 140, 160

- Boolesche Funktion, 2
 duale, selbstduale, 12
 lineare, 8
 monotone, 13
 Boolesche Kombination, 45
 Boolesche Matrix, 40
 Boolesche Signatur, 5
- C**
- Charakteristik eines Körpers, 39
 Chinesischer Restsatz, 189
 Church, 92
 Churchsche These, 171
 Cohen, xviii
- D**
- δ -Funktion, 170
 Δ_0 -Formel, Δ_0 -Prädikat, 185
 Δ_0 -Induktion, 206
 Davis, 199
 Deduktionstheorem, 16, 31
 deduktiv abgeschlossen, 16, 64
 definierbar
 (elementar) in einer Struktur, 54
 Δ_0 -definierbar, 212
 explizit, implizit, 69
 in Theorien, 211
 mit Parametern, 85
 Σ_1 -definierbar, 212
 Definitionsbereich, xix
 DeJongh, 225
 Diagramm, 132
 elementares, 133
 universales, 149
 direkte Potenz, 42
 Disjunktion, 2
 Distributivgesetze, 39
 Durchschnitt, xix
- E**
- \exists -abgeschlossen, 155
 \exists -Formel, 54
 einfache, 158
- Ehrenfeucht-Spiel, 142
 Einbettung, 40
 elementare, 136
 Einschränkung, 35
 Einselement, 38
 Einsetzung, 58, 223
 elementar-äquivalent, 55
 elementarer Typ, 139
 Enderweiterung, 84
 endliche Modelleigenschaft, 98
 Endlichkeitssatz, 21, 24, 74, 81
 entscheidbar, 81, 169
 erfüllbar, 14, 51, 65, 112
 erfüllbarkeitsgleich, 69
 Erfüllungsrelation, 14, 49
 Ersetzungstheorem, 10, 59
 Erweiterung, 36, 62, 64
 definitorische, 69
 elementare, 133
 endliche, 65
 konservative, 53, 67
 transzendente, 153
 unmittelbare, 153
 existentiell abgeschlossen, 149, 155
 Expansion, 36, 62
 explizite Definition, 67, 68
 Extensionalitätsprinzip, 2
- F**
- f -abgeschlossen, 35
 Faktorstruktur, 41
 Falsum, 5
 fast alle, 48, 163
 Fermatsche Vermutung, 199
 Fibonacci-Folge, 174
 fiktives Argument, 8
 Filter, 28
 Fixpunktlemma, 194
 Folge, xx
 Folgerungsrelation
 aussagenlogische, 15
 globale, lokale, 63

prädikatenlogische, 51
 Formel, 4, 45
 arithmetische, 185, 212
 atomare, 45
 Boolesche, 5
 definierende, 67
 duale, 12
 geschlossene, 47
 pränex, 61
 quantorenfreie (= offene), 45
 repräsentierende, 8, 184, 187
 universale, 54
 Formelalgebra, 34
 Formelinduktion, 6, 46
 Frege, 60
 Funktion, xix
 charakteristische, xx
 n -stellige, xx
 primitiv-rekursive, 169
 rekursive (= μ -rekursive), 169
 funktional vollständig, 12
 Funktionsterm, 44

G

Generalisierte, 51
 Generalisierung, 62
 Gentzen-Kalkül, 18
 geordnetes Paar, 89
 gleichheitsfrei, 80
 gleichmächtig, 87
 Gleichung, 45
 diophantische, 185, 198
 Gödel, xvii, 71, 189, 225
 gödelisierbar, 177, 194
 Gödelterm, 191
 Gödelzahl, 173
 einer Zeichenfolge, 176
 eines Beweises, 177
 Graph, 37
 einfacher, 25
 k -chromatischer, 25
 einer Operation, xxi

planarer, 26
 Größenbereich, 38
 Grundinstanz, 107, 123
 Grundterm, 44
 Gruppe, Gruppoid, 38
 geordnete, 38

H

Halbgruppe, 38
 Halbordnung, 37
 Halbring, 38
 Halbverband, 39
 Harrington, 219
 Hauptpolynom, 82
 Henkin-Menge, 77
 Herbrand-Modell, 108
 minimales, 110
 Herbrand-Struktur, 108
 Herleitung, herleitbar, 19
 Hilbert, xvii
 Hilbert-Kalkül, 29, 95
 Hilberts Programm, xvii, 168
 Homomorphismus, 40
 natürlicher, 41
 strenger, 40
 Horn-Resolution (H -Resolution), 116
 Hornformel, 109
 Basis-Hornformel, 109
 positive, negative, 109
 universale, 109
 Hornklausel, 116
 Horntheorie, 109
 nichttriviale, 110
 universale, 110
 Hyperexponentiation, 186

I

i.a. (im Allgemeinen), 42
 I -Tupel, xx
 idempotent, xxi
 Identität, 99
 Implikation, 3
 konverse, 3

- Individuenvariable, 43
 Induktion
 über φ , 7, 46
 über t , 44
 <-Induktion, 86
 Induktionsaxiom, 84
 Induktionsschema, 83
 Induktionsschritt, 83
 Infimum, 39
 Infinitesimalzahl, 86
 informell, 63
 inkonsistent, 17, 21, 75
 Instanz, 107, 123
 Integritätsbereich, 38
 Interpretation, 49
 (relativ) interpretierbar, 200
 Invariansatz, 55
 invertierbar, xxi
 Isomorphismus, 40
 partieller, 138
- J**
- ι -Term, 68
 Jeroslow, 225
 Junktor, 3
- K**
- κ -kategorisch, 137
 Kardinalzahl, 135
 Kern (einer pränexen Formel), 61
 Kette, 37
 von Strukturen, 148
 elementare, 148
 von Theorien, 80
 Kettenschluß, 14
 Fregescher, 14
 Klammerersparnis, 5, 46
 Klasse
 elementare, Δ -elementare, 139
 von \mathcal{L} -Strukturen, 98
 Klausel, 112, 118
 definite, positive, negative, 112
 Kleene, 169, 205
- koendlich, 28
 Koinzidenzsatze, 52
 kollisionsfrei, 56
 kommutativ, xxi
 Kompaktheitssatz, 24, 82
 Komposition, xix, 169
 Kongruenz(relation), 41, 58
 Königscher Graphensatz, 26
 Konjunktion, 2
 Konsequenzrelation
 aussagenlogische, 17
 finitäre, 17
 maximale, 24
 konsistent, 21, 65, 75, 123
 Konsistenzerweiterung, 220
 Konstante, xx
 Konstantenexpansion, 76
 Konstantenquantifizierung, 76
 Kontinuumshypothese, 135
 Kontradiktion, 14
 Kontrapositionsregel, 17
 Körper, 38
 algebraisch abgeschlossener, 82
 der algebraischen Zahlen, 134
 geordneter, 39
 reell abgeschlossener, 153
 Korrektheit, 21, 73
 Kreisel, 225
 Kripke-Struktur, 221
- L**
- \mathcal{L} -Formel, 45
 \mathcal{L} -Modell, 49
 \mathcal{L} -Struktur (= L -Struktur), 35
 legitim, 68
 Lemma von Euklid, 193
 Lemma von Zorn, 37
 Lindenbaum, 23
 Literal, 10, 45
 Löbsches Axiom, 221
 Löbsches Theorem, 218, 225
 Logikprogramm, 122

logisch gültig, 14, 51

logische Matrix, 40

Lösung, 123

Lücke, 37

M

μ -Operation, 169

beschränkte, 172

Mächtigkeit, 135

Matiyasevich, 199

maximal konsistent, 21

maximales Element, 37

Menge

abzählbare, überabzählbare, 87

dicht geordnete, 137

diskret geordnete, 142

endliche, 87

geordnete, 37

stetig geordnete, 37

wohlgeordnete, 37

Mengenalgebra, 40

Mengenfamilie, xix

Metainduktion, xv, 182

Metatheorie, xv

Minimalmodell, 117

Modell

aussagenlogisches, 7

einer Theorie, 64

freies, 110

prädikatenlogisches, 49

transitives, 229

Modellbegleiter, 157

modellinterpretierbar, 202

modellverträglich, 150

Modellvervollständigung, 155

modellvollständig, 151

Modus Ponens, 15, 29

Monotonieregel, 18

Mostowski, 168, 189, 225

MP-abgeschlossen, 30

N

n -Tupel, xx

Nachfolgerfunktion, 83

Negation, 2

Nichtrepräsentierbarkeitslemma, 194

Nichtstandard-Analyse, 85

Nichtstandardmodell, 83

Nichtstandardzahl, 84

Normalform

disjunktive, 10

kanonische, 12

konjunktive, 10, 58

pränexe, 61

Skolemsche, 70

O

ω -konsistent, 195

ω -Regel, 226

ω -Term, 90

ω -unvollständig, 196

Objektsprache, xv

Operation, xx

wesentlich n -stellige, 8

Ordnung, 37

dichte, 137

diskrete, 142

lineare, partielle, 37

P

p.r. (primitiv rekursiv), 169

Π_1 -Formel, Π_1 -Prädikat, 185

Paarkodierung, 172

Paarmenge, 89

Paradoxie von Skolem, 91

parameterdefinierbar, 85

Paris, 219

Partikularisierung, 62

Peano-Arithmetik, 83

Peirce-Axiom, 14

persistent, 147

Potenzmenge, xix

Potenzmengenaxiom, 89

Prädikat, xx

arithmetisches, 184

diophantisches, 185

- (primitiv) rekursives, 169
- rekursiv aufzählbares, 175
- Präfix, 45
- Prämisse, 18
- Presburger, 159
- Primformel, 4, 45
- primitive Rekursion, 169
- Primkörper, 39
- Primmodell, 133
- Primterm, 44
- Produkt, xxi
 - direktes, 42
 - reduziertes, 163
 - von Abbildungen, xix
- Programmiersprache, 103
- Projektionsfunktion, 169
- PROLOG, 122
- Putnam, 199
- Q**
- Quantifizierung
 - beschränkte, 172, 185
- Quantor, 33
- Quantorenelimination, 157
- Quantorenkompression, 188
- Quantorenrang, 46
- Quasiidentität, Quasivarietät, 100
- Quotientenkörper, 146
- R**
- r.a. (rekursiv aufzählbar), 175
- Rabin, 200
- Rang (einer Formel), 7, 46
- reductio ad absurdum, 19
- Redukt, 36, 62
- Redukt-Theorie, 66
- Reduzierte (einer Formel), 67, 68
- reduziertes Produkt, 163
- Reflektionsprinzip, 220
- Regel, 18
 - der Hornresolution, 116
 - korrekte, 20, 72
 - vom Gentzen-Typ, 20
 - vom Hilbert-Typ, 95
- Regelinduktion, 21, 73
- Rekursionsgleichungen, 169
- rekursive (=induktive) Definition, 7
- Relation, xix, xx
 - antisymmetrische, 36
 - konnexe, 36
 - reflexive, irreflexive, 36
 - symmetrische, 36
 - transitive, 36
- Relationalstruktur, 34
- (P-)Relativierte, 200
- repräsentantenunabhängig, 41
- Repräsentationssatz, 190
 - Stonescher, 40
- Repräsentierbarkeit
 - einer Booleschen Funktion, 8
 - einer Funktion, 187
 - eines Prädikates, 184
- Resolution, erfolgreiche, 114
- Resolutionsbaum, 113
- Resolutionshülle, 113
- Resolutionskalkül, 113
- Resolutionsregel, 113
- Resolutionssatz, 115
- Resolvente, 113
- Ring, 38
- Abraham Robinson, 85
- Julia Robinson, 199, 201
- Rogers, 225
- S**
- S**-invariant, 145
- Σ_1 -Formel, 185
 - spezielle, 208
- Σ_1 -Prädikat, 185
- Σ_1 -Vollständigkeit, 186
 - beweisbare, 215
- Sambin, 225
- Satz
 - von Cantor, 87
 - von Cantor-Bernstein, 135

- von Dzhaparidze, 227
- von Goodstein, 219
- von Goryachev, 228
- von Herbrand, 108
- von Lagrange, 198
- von Lindenbaum, 22
- von Lindström, 101
- von Łoś, 164
- von Löwenheim-Skolem, 87, 135, 136
- von Morley, 139
- von Rosser, 196
- von Steinitz, 153
- von Trachtenbrot, 98
- von Visser, 224
- Schnittregel, 20, 100
- Separator, 121
- Sequenz, 18
- Sheffer-Funktion, 2
- Signatur, 34
 - algebraische, 45
 - logische, 4
 - nichtlogische, 34
- Skolem-Funktionen, 69
- SLD-Resolution, 126
- SP**-invariant, 146
- Sprache
 - der 1. Stufe (= elementare), 43
 - der 2. Stufe, 102
- Spracherweiterung, 62
- Stetigkeitsschema, 86
- Struktur, 34
 - algebraische, 34
- Subformel, 6, 46
- Substitution, 16, 47
 - aussagenlogische, 16
 - einfache, simultane, 47
 - globale, 47
 - identische, 47
- Substitutionsfunktion, 193
- Substitutionssatz, 56
- Substruktur, 36
 - (endlich) erzeugte, 36
 - elementare, 133
 - substrukturvollständig, 161
- Subterm, 44
- Subtheorie, 64
- Supremum, 39
- Symbol, xx
 - (explizit) definiertes, 67, 68
 - logisches, 3, 43
 - von T , 64
- T**
- T -Modell, 64
- Tarski, 17, 131, 168
- Tarski-Fragment, 202
- Tautologie, 14, 51
- teilbar, 185
- teilerfremd, 185
- Teilwort, xx
- Term, 44
- termäquivalent, 12
- Termalgebra, 44
- Termfunktion, 53
- Terminduktion, 44
- Termmodell, 78, 106
- tertium non datur, 51
- Theorie
 - (endlich) axiomatisierbare, 81
 - abzählbare, 87
 - elementare (oder 1. Stufe), 64
 - entscheidbare, 93, 177
 - erblich unentscheidbare, 197
 - gödelisierbare, 194
 - induktive, 148
 - konsistente (erfüllbare), 65
 - streng unentscheidbare, 197
 - unentscheidbare, 93
 - universale, 66
 - vollständige, 83
 - wesentlich unentscheidbare, 204
- Träger, 34
- transzendent, 38
- Turing-Maschine, 171

U

U-Resolution, *U*-Resolvente, 125
UH-Resolution, 126
 Ultrafilter, Ultrafiltersatz, 28
 Ultraprodukt, Ultrapotenz, 164
 Umbenennung, 60, 119
 freie, gebundene, 60
 unabhängig, 65, 75
 Unendlichkeitsaxiom, 90
 unentscheidbar, 81, 93
 Unifikationsalgorithmus, 119
 Unifikator, 119
 generischer (= allgemeinsten), 119
 unifizierbar, 119
 universaler Teil, 145
 Universum, 89
 unmittelbarer Nachfolger, 37
 Unvollständigkeitssatz
 erster, 195
 zweiter, 217
 Urelement, 88

V

Variable, 43
 freie, gebundene, 46
 Variablenkollision, 55
 Varietät, 99
 Vaught, 139
 Verband, 39
 Vereinigung, xix
 einer Kette von Strukturen, 148
 Verkettung, xx
 arithmetische, 174
 verträglich, 65
 Verum, 5
 Vervollständigung, 94
 induktive, 150
 Vierfarbensatz, 26
 Vollständigkeitssatz, 80, 96, 97, 222
 aussagenlogischer, 23
 Birkhoffscher, 100
 Gödelscher, 80

Solvayscher, 223

Vorgängerfunktion, 83

W

wahr (in einer Struktur), 196
 Wahrheitsfunktion, 2
 Wahrheitswerte, 2
 Wertematrix, 2
 wertverlaufsgleich, 9, 66
 Wertverlaufsrekursion, 174
 widerlegbar, 65
 Wirkungsbereich, 46
 Wohlordnung, 37
 Wort (über *A*), xx
 Worthalbgruppe, 38

Z

\mathbb{Z} -Gruppe, 159
 Zeichenfolge, xx
 Zielklausel, 123

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	xix	\mathcal{I}	39	$t^A(\vec{a})$	53
$\cup, \cap, \setminus, \subseteq, \subset$	xix	$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$	40	φ^A	54
$\emptyset, \wp M$	xix	lh	40	$\exists_n, \exists_{=n}, \top, \perp$	54
$\bigcup F, \bigcap F$	xix	$\approx, a/\approx, \mathcal{A}/\approx$	41	$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$	55
$(a, b), M \times N$	xix	$\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i, \mathcal{A}^I$	42	$\mathcal{M}^\sigma, \mathcal{M}_{\vec{x}}^{\vec{t}}$	56
$f(a), fa, a^f$	xix	$\forall, =$	43	$\exists!$	57
$dom f, ran f$	xix	$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$	43	$\equiv_{\mathcal{A}}, \equiv_{\mathcal{K}}$	59
$f: M \rightarrow N$	xix	$\mathcal{T} (= \mathcal{T}_L)$	44	PNF	61
$x \mapsto t, id_M$	xix	$var \xi, var X$	44	$(\forall x \triangleleft t), (\exists x \triangleleft t)$	61
M^I, M^n	xx	\exists, \neq	45	$ $ (teilt)	63
$P\vec{a}, \neg P\vec{a}, \chi_P$	xx	$\mathcal{L}, \mathcal{L}_{\in}, \mathcal{L}_{=}$	45	$\overset{\forall}{\neq}$	63
$f\vec{a}$	xx	$rg \alpha, qr \alpha$	46	T, MdT	64
$graph f$	xxi	$frei \varphi, gbd \varphi$	46	$Taut$	65
$\prod_{i \in I} M_i$	xxi	$\mathcal{L}^0, \mathcal{L}^1, \dots$	47	$T + \alpha, T + S$	65
$\Leftrightarrow, \Rightarrow, \&, \vee$	xxi	$\varphi(x_1, \dots, x_n)$	47	$Th \mathcal{A}, Th \mathcal{K}$	66
$:=$	xxi	$\varphi(\vec{x}), t(\vec{x})$	47	$\mathbf{K} \models \alpha$	66
B_n	2	$f\vec{t}, r\vec{t}$	47	\equiv_T	66
\wedge, \vee, \neg	3	$\varphi \frac{t}{\vec{x}}, \varphi \frac{\vec{t}}{\vec{x}}, \varphi_{\vec{x}}(\vec{t})$	47	$\mathcal{L}[r], \varphi^{rd}$	67
\mathcal{F}, AV	4	ι	47	SNF	70
$\rightarrow, \leftrightarrow, \top, \perp$	5	$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, w)$	49	\vdash	72
$Sf\alpha$	6	$r^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}}$	49	Mon, End	74
$w\alpha$	7	$t^w, t^{\mathcal{M}}, \vec{t}^{\mathcal{M}}, t^{\mathcal{A}}$	49	$\mathcal{L}c, \mathcal{L}C$	76
$\mathcal{F}_n, \alpha^{(n)}$	8	$\mathcal{M} \models \varphi, \mathcal{A} \models \varphi[w]$	49	$\vdash_T, X \vdash_T \alpha$	80
$\alpha \equiv \beta$	9	$\mathcal{M}_x^a, \mathcal{M}_{\vec{x}}^{\vec{a}}, \mathcal{M}_x^t$	50	ACF	82
DNF, KNF	10	$\forall \vec{x} \varphi$	50	$\mathcal{N}, \mathcal{S}, \mathcal{R}$	83
$w \models \alpha, \models \alpha$	14	$\models \varphi, \alpha \equiv \beta$	51	\mathcal{L}_{ar}	83
$X \models \alpha, X \models Y$	15	$\mathcal{A} \models \varphi, \mathcal{A} \models X$	51	PA, IS	83
$\vdash, \not\vdash$	18	$X \models \varphi$	51	$\underline{n} (= S^n 0)$	83
$\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-$	22	$\varphi^{\forall}, X^{\forall}$	51	$M \sim N$	87
\vdash, MP	29	$T_G, T_G^=$	52	ZF, ZFC	88
r^A, f^A, c^A	35	$\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}]$	53	$\{z \in x \mid \varphi\}$	89
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$	36	$(\mathcal{A}, \vec{a}) \models \varphi$	53	ω	90

AI, AF, AC	90	SO, SO ₀₀ , ...	142	$\Delta_0, \Sigma_1, \Pi_1, \Delta_1$	185
\vdash , MP, MQ	95	$\Gamma_k(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \sim_k$	142	\perp (teilerfremd)	185
$\Lambda, \Lambda_1\text{--}\Lambda_{10}$	95	$\mathcal{A} \equiv_k \mathcal{B}$	143	$I\Delta_0$	186
<i>Tautfin</i>	97	T_{\forall}	145	β , beta	189
\vdash^B	99	$\mathcal{A} \subseteq_{ec} \mathcal{B}$	149	$\lceil \varphi \rceil, \lceil t \rceil, \lceil \Phi \rceil$	191
$\mathcal{L}_{II}, \mathcal{L}_{\emptyset}$	102	$D_{\forall}\mathcal{A}$	149	bew_T , bwb_T	191
$\mathcal{F}, \mathcal{F}X$	106	RCF	153	$\dot{a}, \dot{z}, \dot{\alpha}_{\bar{x}}(\bar{a})$	193
$\mathcal{L}^k, \text{Var}_k, \mathcal{T}_k$	107	ZG, ZG ₀	159	sb _x , sb \bar{x} , sb \emptyset	193
$\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_kX$	107	$\approx_F, \prod_{i \in I}^F \mathcal{A}_i$	163	prov	196
GI(X)	107	\mathcal{A}^I/F	164	α^P, X^P, CA	200
$\mathcal{L}_{\infty}, \mathcal{T}_{\infty}, \mathcal{F}_{\infty}$	108	\mathbf{F}_n	169	$\Delta, T^{\Delta}, \mathcal{B}_{\Delta}$	200
$\mathcal{C}_U, \mathcal{C}_T$	110	$h[g_1, \dots, g_m]$	169	TF, ZFC _{fin}	202
\square	112	$P[g_1, \dots, g_m]$	169	$\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$	205
$\mathcal{K} \models H$	112	Oc , Op , Oμ	169	$\square(x), \square\alpha, \diamond\alpha$	210
K, λ	113	$f = \mathbf{Op}(g, h)$	169	Con_T	210
$\bar{\lambda}, \bar{K}$	113	Γ_{ν}^n	169	D0–D3	210
RR, \vdash^{RR} , <i>Rh</i>	113	$K_c^n, \dot{-}, \delta$	170	$d0, d1, \dots$	210
HR, \vdash^{HR} , \mathcal{P}, N	116	sg, prim, rest	171	D1*	211
$V_{\mathcal{P}}, w_{\mathcal{P}}, e_{\mathcal{P}}$	117	$\mu k[P(\bar{a}, k)]$	172	$\square[\varphi]$	214
\mathfrak{M}	119	$\mu k \leq m[P(\bar{a}, k)]$	172	PA ⁺	218
$\dot{-}$	122	\wp	172	D4, D4 ^o	218
GI(\mathcal{K})	123	kgV $\{a_{\nu} \mid \nu \leq n\}$	172	T^n, T^{ω}	220
UR, \vdash^{UR}	125	$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$	173	$\square^n \alpha$	220
UHR, \vdash^{UHR}	125	Gz, ℓ	173	$\square, \square^n, \diamond$	221
$U_{\omega}R, U_{\omega}HR$	125	$(a)_i, (a)_{last}$	174	$\mathfrak{F}_{\square}, \text{MN}$	221
$\mathcal{A}_A, \mathcal{B}_A$	132	$*, \mathbf{Oq}, \bar{f}$	174	$\mathbf{G}, \vdash_{\mathbf{G}}$	221
$D\mathcal{A}$	132	bz $_n^m$	175	$P \Vdash H$	221
$D_{el}\mathcal{A}$	133	$\dot{\xi}, \dot{\varphi}$	176	$\models_{\mathbf{G}}, \equiv_{\mathbf{G}}$	221
$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$	133	$\dot{W}, \dot{P}, \dot{X}, \dots$	177	H^s	223
$ M $	134	<i>bew_T</i> , <i>bwb_T</i>	178	\mathbf{G}_n, GS	224
$\aleph_0, \aleph_1, 2^{\aleph_0}$	135	$\tilde{\sim}, \tilde{\lambda}, \tilde{\rightarrow}$	178	\square, \diamond	226
CH	135	$\tilde{=} , \tilde{\forall}, \tilde{\exists}, \tilde{+}, \tilde{\cdot}$	178	GD	227
DO, DO ₀₀ , ...	137	$\mathcal{T}_{prim}, \mathcal{L}_{prim}$	179	<i>Rf_T</i>	228
L, R	138	$[m]_i^k$	180	Gi, Gj	229
ACF _p	138	$\leq, <$	182		
$\langle X \rangle, \equiv_X$	140	Q, N	182		