

Literatur

- [1] Howard Anton. *Lineare Algebra. Einführung, Grundlagen, Übungen*. Spektrum Akademischer Verlag, 1998.
- [2] Artin, M. *Algebra*. Birkhäuser, 1. Auflage, 1998.
- [3] Beutelspacher, A. *Lineare Algebra*. Vieweg, 15. Auflage, 2005.
- [4] Bosch, S. *Algebra*. Springer, 6. Auflage, 2006.
- [5] Bosch, S. *Lineare Algebra*. Springer, 2006.
- [6] Busam, R. und Epp, T. *Prüfungstrainer Analysis*. Spektrum Akademischer Verlag, 1. Auflage, 2007.
- [7] Fischer, G. *Lineare Algebra*. Vieweg, 15. Auflage, 2005.
- [8] Jänich, K. *Lineare Algebra*. Springer, 10. Auflage, 2004.
- [9] Koecher, M. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Springer, 4. Auflage, 2007.
- [10] Kowalsky, G. und Michler, H.-J. *Lineare Algebra*. de Gruyter, 12. Auflage, 2003.
- [11] Kwak, H.-J. *Linear Algebra*. Birkhäuser, 1. Auflage, 1997.
- [12] Lorenz, F. *Lineare Algebra 1*. Spektrum Akademischer Verlag, 4. Auflage, 2003.
- [13] Lüneburg, H. *Vorlesungen über Lineare Algebra*. BI-Wiss.-Verl., 1993.
- [14] Muthsam, J. H. *Lineare Algebra und ihre Anwendungen*. Spektrum Akademischer Verlag, 1. Auflage, 2006.
- [15] Roman, S. *Advanced Linear Algebra*. Springer, 3. Auflage, 2007.
- [16] Strang, G. *Lineare Algebra*. Springer, 1. Auflage, 2007.

Symbolverzeichnis

e	neutrales Element in einer Gruppe, Seite 1
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n$	Restklassengruppe modulo n , Seite 3
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen, Seite 3
K	allgemeiner Körper, Seite 3
K^*	multiplikative Gruppe von K ($= K \setminus \{0\}$), Seite 3
$\text{Aut}(V)$	Automorphismengruppe von V , Seite 4
$\text{GL}(n, K)$	allgemeine lineare Gruppe auf K , Seite 4
$\text{Abb}(M, N)$	Menge aller Abbildungen $M \rightarrow N$, Seite 4
$\text{Sym}(X)$	symmetrische Gruppe auf X , Seite 4
\simeq	isomorph, Seite 9
$\ker F$	Kern von F , Seite 11
$(G : H)$	Index von H in G , Seite 13
G/H	Menge der Linksnebenklassen von G in G , Seite 13
$\text{SL}(n, K)$	<i>Spezielle Lineare Gruppe</i> , Menge der $n \times n$ -Matrizen mit Determinante 1, Seite 17
$\text{sign } \sigma$	Vorzeichen der Permutation σ , Seite 18
A_n	alternierende Gruppe, Seite 20
\mathbb{F}_q	Körper mit q Elementen, Seite 23
$\text{char } K$	Charakteristik von K , Seite 24
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$	Ideal, Seite 25
(a)	von a erzeugtes Hauptideal, Seite 25
$R[X]$	Ring der Polynome über R , Seite 28
\deg	Grad eines Polynoms, Seite 29
ggT	größter gemeinsamer Teiler, Seite 34

K^n	Standardvektorraum über K , Seite 37
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen, Seite 38
\emptyset	leere Menge, Seite 38
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen, Seite 38
$\mathcal{C}^k(M)$	Menge der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $M \subset \mathbb{R}$, Seite 39
$\text{span}(S)$	von $S \subset V$ aufgespannter Unterraum, Seite 40
$\mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$	Basen, Seite 44
e_1, e_2, \dots	Standardbasisvektoren des K^n , Seite 44
rg	Rang, Seite 47
\dim	Dimension, Seite 47
id	identische Abbildung, Seite 53
F, G	lineare Abbildungen, Seite 53
\bar{z}	zu $z \in \mathbb{C}$ konjugiert komplexe Zahl, Seite 54
o	Nullabbildung, Seite 54
$f \circ g$	Verkettung von Abbildungen, Seite 55
f^{-1}	Umkehrabbildung zu f , Seite 55
$\text{im } F$	Bild von F , Seite 56
$\text{Hom}_K(V, W)$	Menge der K -linearen Abbildungen $V \longrightarrow W$, Seite 57
π_U	natürliche Projektion, Seite 63
$A \cdot x$	Produkt einer Matrix mit einem Spaltenvektor, Seite 68
$K^{m \times n}$	Vektorraum der $(m \times n)$ -Matrizen über K , Seite 68
F_A	die der Matrix A zugeordnete lineare Abbildung, Seite 69
A_F	die der linearen Abbildung F zugeordnete Matrix, Seite 69
$A \cdot B$	Matrizenprodukt, Seite 71
$M(n, K)$	Menge der quadratische $n \times n$ -Matrizen über K , Seite 73
rg_s	Spaltenrang, Seite 75
rg_z	Zeilenrang, Seite 75

$A \approx B$	Äquivalenz von Matrizen A und B , Seite 78
$\kappa_{\mathcal{B}}$	Koordinatensystem, Seite 79
$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$	beschreibende Matrix von F , Seite 80
$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$	Matrix des Basiswechsels von \mathcal{B} nach \mathcal{C} , Seite 84
$L(A, b)$	Lösungsraum des LGS $A \cdot x = b$, Seite 92
$\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*, \mathcal{D}^*$	duale Basis, Seite 98
$\text{Alt}^k(V)$	Vektorraum der alternierenden k -Formen, Seite 106
\det	Determinante, Seite 107
$\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$	Diagonalmatrix, Seite 108
$\text{SL}(n, K)$	spezielle lineare Gruppe, Seite 111
A^{ad}	adjungierte Matrix, Seite 115
$\text{Eig}(F, \lambda)$	Eigenraum von F zum Eigenwert λ , Seite 118
$m(\lambda)$	geometrische Vielfachheit, Seite 122
χ_F	Charakteristisches Polynom von F , Seite 123
$\text{Spur}(A)$	Spur von A , Seite 124
$\mu_F(\lambda)$	algebraische Vielfachheit, Seite 126
p_F	Minimalpolynom, Seite 133
$H(F, \lambda)$	Hauptraum, Seite 137
\mathbb{K}	\mathbb{R} oder \mathbb{C} , Seite 144
$\langle v, w \rangle$	Skalarprodukt, Seite 145
$M_{\mathcal{B}}(\Phi)$	Strukturmatrix von Φ , Seite 148
$d(x, y)$	Abstand, Seite 153
$\ \cdot \ _2$	euklidische Norm, Seite 154
\angle	Winkel, Seite 155
$O(n)$	orthogonale Gruppe, Seite 172
$SO(n)$	spezielle orthogonale Gruppe, Seite 172
$U(n)$	unitäre Gruppe, Seite 172

$\mathbb{A}_n(K)$	affiner n -dimensionaler Standardraum, Seite 189
F^*	zu adjungierte Abbildung, Seite 176
$\bigvee_{U \in \mathcal{S}}$	Verbindungsraum, Seite 190
$\langle M \rangle$	affine Hülle von M , Seite 190
$p \vee q$	Verbindungsraum von p und q , Seite 191
\parallel	parallel, Seite 194
\hat{F}	die der affinen Abbildung F zugeordnete lineare Abbildung, Seite 195
TV	Teilverhältnis, Seite 196
pdim	projektive Dimension, Seite 201
$\mathbb{P}(V)$	projektiver Raum, Seite 201
$\mathbb{P}_n(K)$	projektiver Standardraum, Seite 202
$\mathbb{P}(F)$	der linearen Abbildung F zugeordnete projektive Abbildung, Seite 206
DV	Doppelverhältnis, Seite 212
Sign	Signum einer Matrix, Seite 227
$S(A)$	Spaltenraum der Matrix A , Seite 74
S_n	symmetrische Gruppe, Seite 4
$U \hookrightarrow V$	Inklusionsabbildung, Seite 54
$U + W$	Summe der Unterräume U und W , Seite 49
$U \oplus W$	direkte Summe von Unterräumen, Seite 50
U^0	Annulator von U , Seite 99
$v \bullet w$	Standardskalarprodukt in \mathbb{K}^n , Seite 147
V/U	Quotientenvektorraum, Seite 62
$v \perp w$	v und w sind orthogonal, Seite 160
V^*	dualer Vektorraum ($= \text{Hom}_K(V, K)$), Seite 98
V^*	dualer Vektorraum, Seite 98
V_A	Translationsraum, Seite 188

$v_{\mathcal{B}}$	Koordinatenvektor von v bezüglich \mathcal{B} , Seite 80
$x \bullet y$	Standardskalarprodukt, Seite 147
x^T	Transponierte des Spaltenvektors $x \in K^n$, Seite 68
$Z(A)$	Zeilenraum der Matrix A , Seite 74
(j,k)	Transposition, Seite 18
A,B,C,\dots	i. d. R. Matrizen, Seite 67
LGS	Lineares Gleichungssystem, Seite 92

Namen- und Sachverzeichnis

- Abbildung, 1
 - adjungierte, 176–181
 - affine, 195
 - duale, 100, 101
 - lineare, 52
 - orthogonale, 170
 - projektive, 206
 - selbstadjungierte, 181–187
 - unitäre, 170
- ABEL, Nils Henrik (1802-1829), 1
- abelsch, 1
- Abstandsfunktion, 153
- adjungierte Abbildung, 177, 178
- Adjunkte, 115
- ähnlich, 119, 125
- äquivalent
 - affin, 224, 230
 - geometrisch, 224
- Äquivalenz
 - affiner Quadriken, 230
 - Matrizen, 79
 - projektiver Quadriken, 224
 - von Matrizen, 78
 - von Normen, 153
- Äquivalenzrelation, 119
- affin unabhängig, 197
- affine Ebene, 61
- affine Gerade, 61
- affine Hülle, 190
- affiner Anteil, 220
- affiner Raum, 188
- affiner Unterraum, 61
- Affinität, 195
- Affinkombination, 198
- algebraischer Abschluss, 24
- alternierend, 104, 105
- alternierende k -Form, 104, 106
- alternierende Gruppe, 20, 21
- Annulator, 99
- antisymmetrisch, 104
- Assoziativgesetz, 1
- assoziert, 32
- Automorphismengruppe, 4
- Automorphismus, 9, 53

- BANACH, Stefan (1892-1945), 152
- Banachraum, 152
- Basis, 44
 - affine, 197
 - duale, 98
 - eines Vektorraums, 44
 - orthonormale, 163
 - projektive, 207
- Basisauswahlsatz, 45
- Basisbildersatz, 57, 66
- Basisergänzungssatz, 45
- Basiswechselformalismus, 85
- Basiswechselmatrix, 84, 85
- Begleitmatrix, 125
- Bild, 56
 - einer linearen Abbildung, 56
- Bilinearform, 144
 - alternierende, 144
 - symmetrische, 144
- Blockmatrix, 113
- BRIANCHON, Charles Julien, 219

- CAUCHY, Augustin (1789-1857), 154
- Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, 154
- CAYLEY, Arthur (1821-1895), 17, 133
- Cayley-Hamilton, Satz von, 133
- Charakteristik eines Körpers, 24
- charakteristisches Polynom, 123, 124
- CRAMER, Gabriel (1704-1752), 109
- Cramer'sche Regel, 109, 110

- DESARGUES, Gérard (1591-1661), 215
- DESCARTES, René (1596-1650), 226
- Determinante
 - einer Matrix, 107–109
 - eines Endomorphismus, 111
 - Rechenregeln, 108, 110
 - Transpositionsinvarianz, 112
- Determinantenform, 104
- Determinantenmultiplikationssatz, 110
- diagonalisierbar, 117, 121, 122
- Diagonalmatrix, 108
- Dimension, 47
 - affine, 189
 - eines affinen Unterraums, 61, 190
 - projektive, 201
- Dimensionsformel
 - für den Verbindungsraum, 193
 - für lineare Abbildungen, 59
 - für projektive Unterräume, 202
 - für Untervektorräume, 49
- direktes Produkt von Gruppen, 4
- Distributivgesetze, 22

- Doppelverhältnis, 212
- Drehung, 71, 73
- Drei-Zyklus, 21
- Dreiecksungleichung, 153
- Dualität, 218
- Dualraum, 98
- Durchschnitt
 - affiner Unterräume, 190
 - linearer Unterräume, 39
 - projektiver Unterräume, 202

- Ebene, 190
- Eigenraum, 117–119
- Eigenvektor, 117–119
- Eigenwert, 117–119
- Einschränkung, 64
- Einsetzungshomomorphismus, 30, 130, 131
- Elementarabbildungen, 82
- Elementarmatrix, 89
- Ellipse, 233
- Ellipsoid, 233
- elliptisches Paraboloid, 229
- endlich erzeugt, 41
- Endomorphismus, 9, 53
 - normaler, 182
 - selbstadjungierter, 181–187
- Entwicklungssatz von Laplace, 115
- Epimorphismus, 9, 53
- Erweiterungskörper, 38
- Erzeugendensystem, 41
- Erzeugnis, 41
- EUKLID, (etwa 365-300 v. Chr.), 146
- euklidischer Ring, 30

- f*-invariant, 117
- Faktorisierungssatz, 64
- Faser, 63
- Fehlstand, 18
- FERMAT, Pierre de (1607-1655), 14
- Funktionenraum, 152

- Gauß-Jordan'sche Normalform, 77
- GAUSS, Carl Friedrich (1777-1855), 86
- Gauß'sches Eliminationsverfahren, 88
- Gerade, 190
- größter gemeinsamer Teiler, 34
- Grad eines Polynoms, 29
- GRAM, Jørgen (1850-1916), 163
- Gruppe, 1
 - abelsche, 1, 6
 - allgemeine lineare, 4, 77
 - orthogonale, 172
 - spezielle lineare, 17, 111
 - spezielle orthogonale, 172
 - symmetrische, 4
- unitäre, 172
- zyklische, 8

- HAMILTON, Sir William (1805-1865), 133
- HAMILTON, William Rowan (1805-1865), 23
- Hauptachsentransformation, 183, 184, 224
- Hauptraum, 137
- Hauptraumzerlegung, 140
- HERMITE, Charles (1822-1901), 145
- hermitesche Form, 145
- HILBERT, David (1862-1943), 152
- Hilbertraum, 152
- Homomorphiesatz
 - für Gruppen, 16
 - für Ringe, 27
 - für Vektorräume, 64
- Homomorphismus, 9, 53
- Hyperbel, 233
- Hyperboloid
 - einschaliges, 233
 - zweischaliges, 229, 233
- Hyperebene, 61, 194, 220

- Ideal, 25
- identische Abbildung, 53
- Index einer Untergruppe, 13
- Inklusionsabbildung, 54
- Integritätsring, 23, 29
- Invarianzsatz für äquivalente Matrizen, 79
- inverses Element, 1, 2
- invertierbar, 76
- Invertierbarkeitskriterium, 77, 109, 110
- irreduzibel, 32
- Isometrie, 170
- isomorph, 9
- Isomorphismus, 9, 11, 53

- JORDAN, Camille (1838-1922), 117, 141
- Jordan'sche Normalform, 117, 141

- K*-Algebra, 74
- Körper, 21, 22
- kanonische Projektion, 10, 15
- Kegel, 233
- Kern
 - einer linearen Abbildung, 56
 - eines Gruppenhomomorphismus, 11
- Kern eines Homomorphismus, 11, 12
- Klassifikationstheorem
 - für affine Quadriken, 231
 - für projektive Quadriken, 227
- kleiner Fermat'scher Satz, 14
- K*-linear, 53
- kollinear, 196
- Kollineation, 200

- kommutativ, 1
- Komplement
 - orthogonales, 160
- Komplement eines Unterraums, 50
- komplexe Konjugation, 54
- komplexe Zahlen, 38
- Koordinaten
 - homogene, 202
- Koordinatensystem, 79
 - affines, 198
 - projektives, 209
- Koordinatenvektor, 80
- Kürzungsregel, 5
- Kugel, 228

- Lösungsraum, 92
- LAGRANGE, Joseph-Louis (1736-1813), 14
- LAPLACE, Pierre Simon (1749-1827), 115
- LEGENDRE, Adrien-Marie (1752-1833), 165
- Legendre-Polynome, 165
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1646-1716), 112
- Leibniz'sche Determinantenformel, 112
- linear abhängig, 42
- linear unabhängig, 42
- lineare Abbildung, 53
- Lineares Gleichungssystem, 92
 - homogenes, 92
 - inhomogenes, 92
- Linearform, 98
- Linearkombination, 40
 - eines unendlichen Systems, 40
- links-, rechtsinvers, 2
- links-, rechtsneutral, 2
- Linksnebenklasse, 12

- Matrix, 67
 - Äquivalenz, 79
 - adjungierte, 115
 - als lineare Abbildung, 68, 69, 80, 81
 - beschreibende, 80, 81
 - der dualen Abbildung, 100
 - einer Bilinearform, 148
 - eines Basiswechsels, 85
 - eines nilpotenten Endomorphismus, 138
 - hermitesche, 148, 181
 - inverse, 76, 90
 - invertierbare, 76, 77
 - linksinverse, 77
 - orthogonale, 171
 - Produkt, 71, 72
 - Rang, 75, 78
 - rechtsinverse, 77
 - skalares Vielfaches, 68
 - Spaltenindex, 68
 - Spaltenrang, 75
 - Spaltenraum, 74
 - Summe, 68
 - symmetrische, 148, 181
 - unitäre, 171
 - Zeilenindex, 68
 - Zeilenrang, 75
 - Zeilenraum, 74
- Maximumsnorm, 158
- Mengenlehre, 1
- Metrik, 152, 153
- metrischer Raum, 152
- Minimalpolynom, 133
- Monomorphismus, 9
- multilinear, 104
- Multilinearform, 104

- natürliche Projektion, 63
- neutrales Element, 1, 2
- nicht-ausgeartet, 151
- nilpotent, 129, 138
- Nilpotenzindex, 138
- Norm, 151
 - euklidische, 152
 - in euklidischen und unitären Vektorräumen, 155
- normal, 179
- Normalform
 - einer Matrix, 81
- Normalformensatz, 81
- Normalgleichung, 168
- Normalteiler, 15, 16
- normiert, 107
- normierter Raum, 152
- Nullform, 105
- Nullstelle eines Polynoms, 35

- Optimallösung, 167
- Ordnung
 - einer Gruppe, 7
 - eines Gruppenelements, 7
- orthogonal, 160
- Orthogonalsystem, 162
- Orthonormalbasis, 163
- Orthonormalisierungsverfahren, 163
- Orthonormalsystem, 162
- Ortsvektor, 189

- PAPPOS von Alexandria (um 300 n. Chr.), 216
- Parabel, 233
- Paraboloid
 - elliptisches, 233
 - hyperbolisches, 233
- parallel, 61, 193
- Parallelogramm-Gleichung, 157
- Permutation, 6

- gerade, ungerade, 20
- Permutationsgruppe, 4
- Perspektivität, 210
- Polynom, 28
 - homogenes, 219
- Polynomring, 23, 28, 37
- positiv definit, 145
- positiv semidefinit, 145
- Primelement, 32
- Primfaktorzerlegung, 33
- Primkörper, 25
- Projektion
 - eines Unterraums, 158
 - orthogonale, 161
- projektive Dimension, 201
- projektiver Abschluss, 205, 220
- projektiver Raum, 201
- Projektivität, 206
- Proximum, 161
- PYTHAGORAS (etwa 580-500 v. Chr.), 157

- QR*-Zerlegung, 169
- quadratische Form, 150
- Quadrik
 - affine, 230
 - projektive, 219
- Quaternionenschiefkörper, 23
- Quotientenring, 26
- Quotientenvektorraum, 62

- Radikal, 151
- Rang
 - der dualen Abbildung, 101
 - einer linearen Abbildung, 58, 75
 - einer Matrix, 75, 109
 - eines endlichen Systems von Vektoren, 47
- Rechtsnebenklasse, 12
- Regelfläche, 228
- Restklassengruppe, 4
- Restklassenring, 26
- RIEMANN, Bernhard (1826-1866), 147
- Ring, 21
 - der Polynome, 37
 - euklidischer, 31
 - kommutativer, 22
 - mit Eins, 22

- Satz
 - über die Hauptachsentransformation, 183, 184
 - über die Hauptraumzerlegung, 138
 - des Pythagoras, 157
 - von Briauchon, 219
 - von Cayley, 17
 - von Desargues, 215
 - von Lagrange, 14
 - von Pappos, 216
- Schiefkörper, 21–23
- schiefsymmetrisch, 104
- SCHMIDT, Erhard (1876-1959), 163
- SCHWARZ, Hermann Amandus (1843-1921), 154
- selbstadjungiert, 181–187
- Sesquilinearform, 144
- Skalarprodukt, 145
- Spaltenrang, 102
- Spaltenumformung, elementare, 87
- Spektralsatz
 - für normale Endomorphismen, 180
 - für selbstadjungierte Endomorphismen, 183, 184
- Spur, 124
- Standardbasis, 70
- Standardraum
 - affiner, 189
 - projektiver, 202
- Standardskalarprodukt, 147, 164
- Strukturmatrix, 148
- Summe von Untervektorräumen, 49
- SYLVESTER, James (1814-1897), 186
- symmetrische Bilinearform, 223
- symmetrische Gruppe, 4

- Teilverhältnis, 196
- Trägheitssatz von Sylvester, 186, 227
- Transformationsformel für Strukturmatrizen, 149
- Translation, 188
- Translationsraum, 188
- Transponierte, 68
- Transposition, 18, 19
- trigonalisierbar, 128

- Umkehrabbildung, 55
- unabhängig
 - affin, 197
 - linear, 42
 - projektiv, 207
- uneigentlicher Anteil, 230
- unendlich ferne Gerade, 203
- unendlich-dimensional, 47
- Untergruppe, 12
- Unterraum, 38, 40
 - affiner, 190
 - projektiver, 201
- Untervektorraum, 38
- unverkürzbar, 44
- unverlängerbar, 44

Vektorraum, 36, 37
– Axiome, 36
– dualer, 98
– euklidischer, 146
– Isomorphie zu K^n , 80
– Rechenregeln, 36
– unendlich-dimensionaler, 98
– unitärer, 146
verallgemeinerter Eigenraum, 137
Verbindungsraum, 190
Verkettung
– affiner Abbildungen, 196
– linearer Abbildungen, 55
Verknüpfungstafel, 5
Vielfachheit
– algebraische, 126
– geometrische, 121
vollständig, 152
Vorzeichen einer Permutation, 18, 19
Vorzeichenregel von Descartes, 226

WEIERSTRASS, Karl, 104
windschief, 193
Winkel, 155
wohldefiniert, 15, 25, 65, 111

Zeilenrang, 102
Zeilenstufenform, 86
Zeilenumformung, elementare, 87
zyklische Gruppe, 14
Zylinder
– elliptischer, 233
– hyperbolischer, 233
– parabolischer, 233