Symbolverzeichnis

Die nachfolgende Übersicht enthält die wichtigsten der in diesem Buch verwendeten Symbole. Die hier gegebenen Erläuterungen ersetzen meist nicht die vollständigen Definitionen, sondern sind als knapp gefasste Erinnerungen gedacht.

Mengen

$\varnothing$	Die leere Menge. Man kann sie auch als $\{\}$ schreiben. Sie ist die einzige Menge, die keine Elemente enthält.
$\mathbb{N}$	Die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{N}_0$	Die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$.
$\mathbb{Z}$	Die Menge der ganzen Zahlen $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{Q}$	Die Menge der rationalen Zahlen $\left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$.
$\mathbb{R}$	Die Menge der reellen Zahlen.
$\mathbb{R}^+$	Die Menge der positiven reellen Zahlen.
$\mathbb{R}_0^+$	Die Menge $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
$\mathbb{R}^n$	Die Menge der n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$.
$[a, b]$	Das abgeschlossene Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.
$]a, b[$	Das offene Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
$[a, b[$	Das halboffene Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$. Analog ist $]a, b]$ definiert.
$M_{m \times n}(\mathbb{R})$	Die Menge (der Vektorraum) der $(m \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$. Man kürzt $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ durch $M_n(\mathbb{R})$ ab.
$X \times Y$	Das kartesische Produkt zweier Mengen, d.h. die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$. Beispielsweise ist $\mathbb{R}^n$ das n-fache kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.
$A \setminus B$	Die Differenzmenge $\{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ zweier Mengen A und B. Hierbei ist nicht vorausgesetzt, dass B eine Teilmen-

T. Bauer, *Verständnisaufgaben zur Analysis 1 und 2*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-59703-3

	ge von A ist. So gilt beispielsweise $[0,2] \setminus [1,3] = [0,1[$.
$f^{-1}(M)$	Das Urbild der Menge M unter der Abbildung f. Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und $M \subset B$, so ist $f^{-1}(M)$ die Menge $\{a \in A \mid f(a) \in M\}$. Beachten Sie: Es wird hierbei nicht vorausgesetzt, dass f invertierbar ist. Ist zum Beispiel f die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, so gilt $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$.
G_f	Der Graph der Funktion f. Für eine Funktion $f : A \to B$ ist dies die Menge $\{(x,y) \in A \times B \mid f(x) = y\}$. Der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist also eine Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$; sie wird gerne zur Darstellung der Funktion genutzt.
$U_\varepsilon(a)$	Die ε-Umgebung eines Punkts a in einem metrischen Raum (X, d). Für $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $a \in X$ besteht sie aus allen Punkten $x \in X$, deren Abstand von a kleiner als ε ist: $U_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d(a,x) < \varepsilon\}$. Ist $X = \mathbb{R}$ und d die euklidische Metrik d_2, so ist $U_\varepsilon(a)$ das Intervall $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. Ist $X = \mathbb{R}^2$ und $d = d_2$, so ist $U_\varepsilon(a)$ die offene Kreisscheibe vom Radius ε um den Punkt a.
$\overline{M}$	Der (topologische) Abschluss einer Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen Raums X. Er ist gleich der Menge der Grenzwerte aller in M liegenden konvergenten Folgen. (Deren Grenzwerte müssen nicht in M liegen, es gilt $M \subset \overline{M}$.)
$\mathring{M}$	Das Innere einer Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen Raums X. Es besteht aus allen Punkten $a \in M$, zu denen es eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ gibt, die ganz in M enthalten ist.
∂M	Der Rand einer Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen Raums X. Es gilt $\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$.
$\mathcal{C}^k(M)$	Die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $M \to \mathbb{R}$. Hierbei ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Man verwendet das Symbol $\mathcal{C}^k$ auch in Abkürzungen: Unter einer $\mathcal{C}^1$-Funktion versteht man eine stetig differenzierbare Funktion.

Zahlen, Vektoren, Matrizen

$\binom{n}{k}$	Der Binomialkoeffizient. Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leqslant k \leqslant n$ ist er durch $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ definiert.
$\lvert x \rvert$	Der Betrag (oder: Absolutbetrag) einer Zahl $x \in \mathbb{R}$.

$\|x\|$	Die Norm des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$. Wenn nicht anders angegeben, dann ist die euklidische Norm $\|x\|_2$ gemeint.
$v \bullet w$	Das kanonische Skalarprodukt zweier Vektoren v und w im $\mathbb{R}^n$. Es ist definiert durch $v \bullet w := \sum_{i=1}^n v_i w_i$. Fasst man v und w als Spaltenvektoren auf, so kann man es auch als Matrizenprodukt $v^t w$ schreiben. Eine alternative Schreibweise für das Skalarprodukt ist $\langle v, w \rangle$.
$\|x\|_2$	Die euklidische Norm (oder: 2-Norm) eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$. Sie ist definiert durch $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Mit dem kanonischen Skalarprodukt kann man dies auch als $\sqrt{x \bullet x}$ schreiben.
$\|x\|_1$	Die 1-Norm (oder: Taxi-Norm, Summennorm) eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$. Sie ist definiert durch $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n \|x_i\|$.
$\|Z\|$	Die Feinheit einer Zerlegung Z des Intervalls $[a, b]$, d.h. die Länge des längsten Teilintervalls.
$\int\limits_a^b f(x)\, dx$	Das Riemann-Integral der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$. Kurz: $\int_a^b f$. Es kann über Riemannsche Summen definiert werden (wie in [7, Abschn. 79] durchgeführt) oder alternativ (und äquivalent) über Unter- und Obersummen (Darbouxscher Zugang, siehe [7, Abschn. 82]). Ist f nicht auf dem ganzen Intervall definiert, so wird dieselbe Schreibweise auch für *uneigentliche* Riemann-Integrale verwendet. Ein Beispiel hierfür ist $\int_0^1 \ln x\, dx$.
$d(x, y)$	Der Abstand zweier Punkte x und y in einem metrischen Raum (X, d). Ist $X = \mathbb{R}^n$, so wird hierfür häufig die euklidische Metrik d_2 verwendet, die durch $d_2(x, y) := \|x - y\|_2$ definiert ist (also auf die 2-Norm zurückgreift).
$\mathrm{Vol}_a(A)$	Das äußere Volumen einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$.
$\mathrm{Vol}_i(A)$	Das innere Volumen einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$. Es gilt immer $\mathrm{Vol}_i(A) \leqslant \mathrm{Vol}_a(A)$. Sind äußeres und inneres Volumen von A gleich, so heißt A *Jordan-messbar*. Der gemeinsame Wert wird dann als *Jordan-Volumen* von A bezeichnet. Er stimmt mit dem Wert $\int_A 1\, dx$ des mehrdimensionalen Riemann-Integrals überein.

Folgen und Funktionen

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Die Folge mit den Gliedern a_n. Man kann sie auch aufzählend schreiben als $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist nichts anderes als eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$.
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$	Die Reihe mit den Gliedern a_n, d. h. die Folge der Partialsummen $(\sum_{i=1}^{n} a_i)_{n\in\mathbb{N}}$. Falls diese konvergent ist, dann wird mit demselben Symbol auch ihr Grenzwert bezeichnet.
$g \circ f$	Die Hintereinanderausführung (Komposition, Verkettung) zweier Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Sie ist definiert durch $x \mapsto g(f(x))$.
f'	Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion f.
f''	Die zweite Ableitung von f, falls f zweimal differenzierbar ist. Es ist dies die Ableitung von f'.
$f^{(n)}$	Die n-te Ableitung von f, falls f n-mal differenzierbar ist. Für kleine Werte von n verwendet man statt $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ meist die Schreibweisen f', f'', f'''.
$D_i f$	Ist f eine Funktion $U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, so bezeichnet $D_i f(a)$ die partielle Ableitung von f an der Stelle $a \in U$ nach der i-ten Variablen. Mit $D_i f$ wird die Funktion $x \mapsto D_i f(x)$ bezeichnet (dort, wo die partielle Ableitung existiert).
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	Eine alternative Schreibweise für $D_i f$.
$D_v f$	Die Richtungsableitung der Funktion f in Richtung des Vektors v. Ist v der i-te Einheitsvektor e_i, dann ist $D_v f = D_i f$ die partielle Ableitung nach der i-ten Variablen.
Df	Die Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix) der Funktion f.
$\operatorname{grad} f$	Der Gradient einer partiell differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Er ist gleich der Transponierten der Jacobi-Matrix Df.
H_f	Die Hesse-Matrix einer zweimal partiell differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Sie enthält die zweiten partiellen Ableitungen von f.
$D^k f$	Ist f eine Funktion $I \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall I und $k \in \mathbb{N}$, so ist dies eine alternative Bezeichnung für die k-te Ableitung $f^{(k)}$. Ist f eine Funktion $U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $k = (k_1, \ldots, k_n)$ ein Vektor aus $\mathbb{N}_0^n$, so be-

	zeichnet $D^k f$ die höhere partielle Ableitung $D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n} f$. Man verwendet in diesem Kontext die Notation $\lvert k\rvert$ für die Summe $k_1 + \dots + k_n$ und kann dann sagen, dass $D^k f$ eine partielle Ableitung der Ordnung $\lvert k\rvert$ ist.
A^t	Die Transponierte einer Matrix A. Das Element in Zeile i und Spalte j von A^t ist das Element aus Zeile j und Spalte i von A.

Aussagen

$A \subset B$	Die Menge A ist eine Teilmenge der Menge B. Dies bedeutet, dass jedes Element von A auch Element von B ist.
$A \subsetneq B$	Die Menge A ist eine *echte* Teilmenge der Menge B, d.h., es gilt $A \subset B$, aber $A \neq B$.
$A \not\subset B$	Dies ist die Verneinung von $A \subset B$. Es bedeutet also, dass A nicht Teilmenge von B ist, d.h., dass es ein Element $a \in A$ gibt, das nicht in B enthalten ist.
$\dots := \dots$	Durch dieses Symbol wird eine neue Bezeichnung eingeführt. Beispielsweise würde durch $M := \{1, 2, 3\}$ vereinbart, dass im Folgenden M für die Menge $\{1, 2, 3\}$ steht.
$a_n \longrightarrow a$	Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a, d. h., in jeder Umgebung von a liegen fast alle Folgenglieder (d. h. alle bis auf endlich viele). Die Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ drückt dasselbe aus.
$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$	Die Funktion f konvergiert für $x \to a$ gegen b. Eine Möglichkeit, dies auszudrücken (oder sogar zu definieren), ist: Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert, konvergiert die Folge der Funktionswerte $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b. Die Gleichung $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ drückt dasselbe aus.
$f(x) \xrightarrow[x\nearrow a]{} b$	Konvergenz bei linksseitiger Annäherung an a. In der Beschreibung mittels Folgen werden nur Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n < a$ in Betracht gezogen. Die Gleichung $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = b$ drückt dasselbe aus.
$f(x) \xrightarrow[x\searrow a]{} b$	Konvergenz bei rechtsseitiger Annäherung an a. In der Beschreibung mittels Folgen werden nur Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n > a$ in Betracht gezogen. Die Gleichung $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = b$ drückt dasselbe aus.

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, Th.: Peer Instruction als Instrument zur Aktivierung von Studierenden in mathematischen Übungsgruppen. *Math. Semesterberichte*, First Online: 14 Juni 2018

[2] Mazur, E.: Peer Instruction: Wie man es schafft, Studenten zum Nachdenken zu bringen. *Praxis der Naturwissenschaften. Physik in der Schule*, 4(55), 11–15 (2006)

[3] Mazur, E.: *Peer Instruction. Interaktive Lehre praktisch umgesetzt*. Springer, 2017.

[4] Miller, R. L., Santana-Vega, E., Terrell, M. S.: Can good questions and peer discussion improve calculus instruction? *PRIMUS. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies* 16(3), 193–203 (2006)

[5] Forster, O.: *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Vieweg+Teubner, 2011.

[6] Forster, O.: *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen*. Vieweg+Teubner, 2011.

[7] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. Vieweg+Teubner, 2009.

[8] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Vieweg+Teubner, 2009.

[9] Terrell, M. S., Connelly, R., Henderson, D.: *GoodQuestions Project*. Department of Mathematics, Cornell University.
http://pi.math.cornell.edu/~GoodQuestions/

T. Bauer, *Verständnisaufgaben zur Analysis 1 und 2*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-59703-3

Index

Im folgenden Stichwortverzeichnis sind diejenigen Seitenzahlen *kursiv* gedruckt, die auf den Lösungsteil verweisen.

T. Bauer, *Verständnisaufgaben zur Analysis 1 und 2*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-59703-3